1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с. 2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с. 3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с. 4. Мовчан А.А. Устойчивость процессов по двум метрикам //Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988-1001. 5. Мовчан А.А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем //Прикл. математика и механика. 1959. Т.23. Вып.3. С. 483-493. 6. Мовчан А.А. Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение //Инж. сб. 1960. Т.29. С.3-20. 7. Мовчан А.А. Об устойчивости процессов деформирования сплошных тел //Archiwum mechaniki stosowanej. 1963. Т. 15. № 5. С. 559-682. 8. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.

Стаття надійшла до редколегії 22.04.94

УДК 539.375

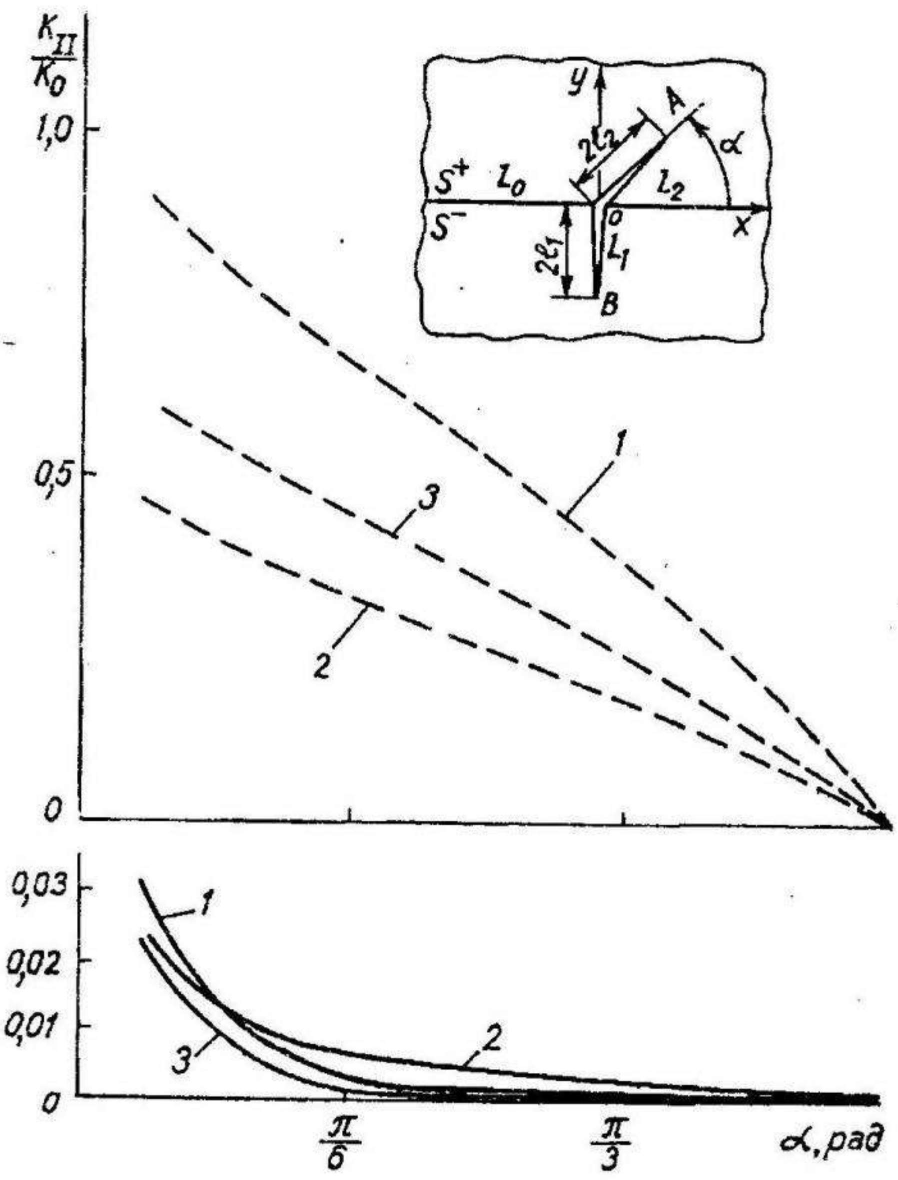
О.О.Євтушенко, В.М.Зеленяк

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН СКЛАДЕНОЇ ПЛАСТИНКИ, ПОСЛАБЛЕНОЇ ЛАМАНОЮ ТРІЩИНОЮ

Задачі про визначення температурних полів і напружень у двох спаяних різнорідних півплощинах, які містять криволінійні включення і тріщини [4] або лише тріщини [1], розв"язувались раніше. Розглянемо випадок перетину дволанкової ламаної тріщини з межею поділу різнорідних півплощин. Аналогічна задача поздовжнього зсуву досліджена у праці [2].

Розглянемо нескінченну площину, що складається з двох спаяних різнорідних ізотропних півплощин S^+, S^- з межею поділу L_0, які мають відповідно модулі зсуву G^+, G^- і коефіцієнти Пуасона μ^+, μ^-. Нижня півплощина послаблена перпендикулярним до L_0 основним розрізом L_1 завдовжки $2\ell_1$. Із правого кінця цього розрізу від лінії спаю L_0 відходить бічний розріз L_2 завдовжки $2\ell_2$ у верхню півплощину під кутом α до осі Ox, яка спрямована вздовж L_0 /див. схему на рис. 1/. Припустимо, що площина зазнає дії стаціонарного температурного поля $T(x,y)$; на лінії спаю L_0 існує ідеальний механічний контакт; береги ламаної тріщини не контактують і не навантажені.

Задача про визначення температурних напружень у такій області зводиться [4] до двох сингулярних інтегральних рівнянь,



які в безрозмірних координатах мають вигляд

$$\int_{-1}^{1}\left[M_{11}(\xi,\eta)\varphi_1(\xi)+N_{11}(\xi,\eta)\overline{\varphi_1(\xi)}+M_{12}(\xi,\eta)\varphi_2(\xi)+\right.$$
$$\left.+N_{12}(\xi,\eta)\overline{\varphi_2(\xi)}\right]d\xi=2\pi R_1^*(\eta),\quad |\eta|<1; \qquad /I/$$

$$\int_{-1}^{1}\left[M_{21}(\xi,\eta)\varphi_1(\xi)+N_{21}(\xi,\eta)\overline{\varphi_1(\xi)}+M_{22}(\xi,\eta)\varphi_2(\xi)+\right.$$
$$\left.+N_{22}(\xi,\eta)\overline{\varphi_2(\xi)}\right]d\xi=2\pi R_2^*(\eta),\quad |\eta|<1.$$

Тут

$$\varphi_1(\xi) = a_1(l_1\xi), \quad \varphi_2(\xi) = a_2(l_2\xi);$$
$$R_1^*(\eta) = R_1(l_1\eta); \quad R_2^*(\eta) = R_2(l_2\eta);$$
$$M_{nk}(\xi,\eta) = l_k R_{nk}(l_k\xi, l_n\eta);$$
$$N_{nk}(\xi,\eta) = l_k S_{nk}(l_k\xi, l_n\eta), \; k=1,2, \; n=1,2;$$
$a_1, a_2, R_1, R_2, R_{nk}, S_{nk}$ - відомі із [4].

Система рівнянь /I/ розв"язується за умови, що забезпечує однозначність зміщень при обході контуру ламаної тріщини:

$$\frac{2iG^-}{1+\varkappa^-}\int_{-1}^{1}\varphi_1(\xi)d\xi + \frac{2\varepsilon G^+}{1+\varkappa^+}\int_{-1}^{1}e^{i\alpha}\varphi_2(\xi)d\xi = 0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon = l_2/l_1$, $\varkappa^{\pm} = (3-\mu^{\pm})/(1+\mu^{\pm})$.

Коефіцієнти інтенсивності напружень $K_I^{\pm}$ і $K_{II}^{\pm}$ у лівій /-/ і правій /+/ вершинах ламаної тріщини знаходимо за формулою [3]

$$K_I^+ - iK_{II}^+ = \frac{\sqrt{\pi l_2}}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k U_2(\xi_k)\,\mathrm{ctg}\,\frac{2k-1}{4n}\pi;$$
$$K_I^- - iK_{II}^- = \frac{\sqrt{\pi l_1}}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n} U_1(\xi_k)\,\mathrm{tg}\,\frac{2k-1}{4n}\pi, \qquad /3/$$

де $\varphi_1(\xi) = \dfrac{U_1(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}$; $\qquad \varphi_2(\xi) = \dfrac{U_2(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$.

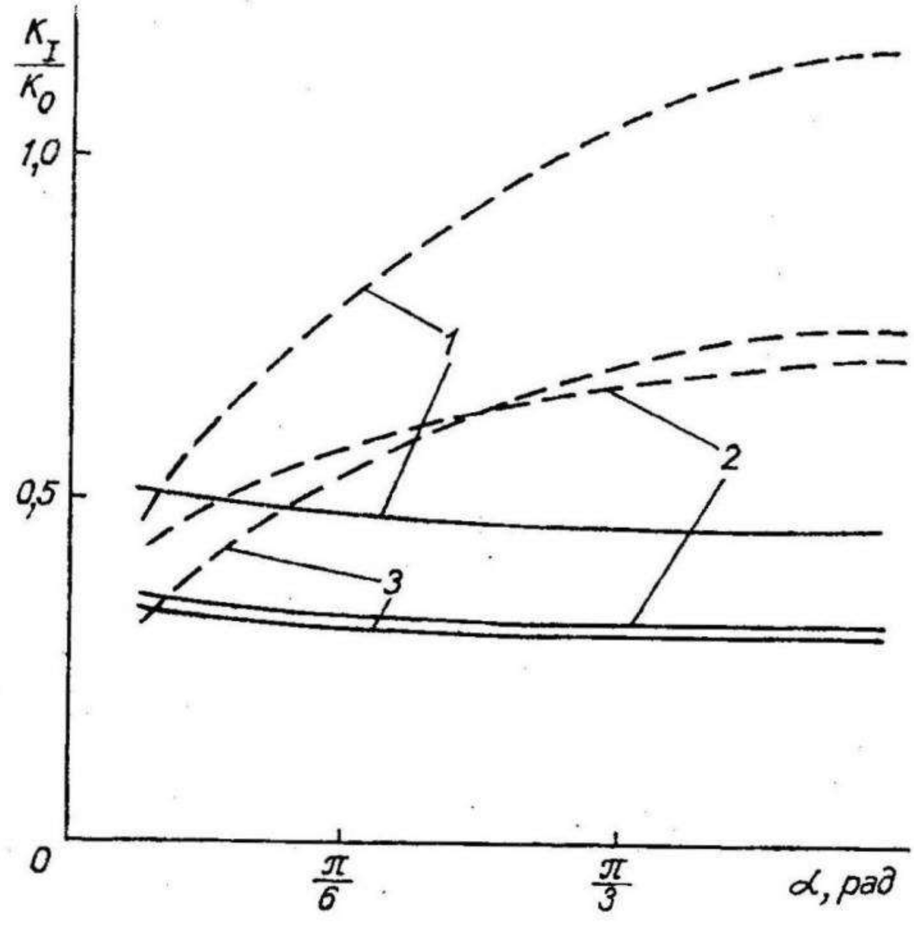
Нехай розглядувана складена пластинка перебуває в умовах сталої температури $T(x,y) = T_0 = const$, яка, однак, не дорівнює температурі ненапруженого початкового стану. Тоді в рівняннях /I/

$$R_1^*(\eta) = G^- T_0(\Gamma_0\beta_-^t - \beta_+^t)/(G^- + \varkappa^- G^+); \qquad /4/$$
$$R_2^*(\eta) = G^- T_0(\Gamma_0\beta_-^t - \beta_+^t)/(G^+ + \varkappa^+ G^-),$$

де $\Gamma_0 = G^+/G^-$; $\beta_{\pm}^t = \alpha_{\pm}^t E^{\pm}/(1+\mu^{\pm})$; $\alpha_+^t, E^+(\alpha_-^t, E^-)$ - коефіцієнт лінійного теплового розширення, модуль пружності верхньої /нижньої/ півплощини.

Числовий розв"язок системи /I/, /2/ з використанням /4/ одержаний методом механічних квадратур [3]. Слід зауважити, що тут не враховані особливості функцій $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ у вершині зламу, оскільки відомо [3], що порядок особливостей цих функцій у кутовій вершині завжди менший, ніж на кінцях розрізу.

На рис. I, 2 зображені залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I і K_{II} /що віднесені до $K_0 = T_0\beta_+^t\sqrt{\pi l_1}$ /



від кута орієнтації бічної ланки α при $\varkappa^- = \varkappa^+ = 2$, $G^+/G^- = 2,5$. Криві 1 /$\varepsilon = 1$/, 2 /$\varepsilon = 0,5$/ – при $\alpha_+^t/\alpha_-^t = 5/2$; криві 3 /$\varepsilon = 1$/ – при $\alpha_+^t/\alpha_-^t = 5/3$. Суцільні лінії – права вершина верхньої ланки /вершина A /, штрихові – ліва вершина нижньої ланки /вершина B /. З обчислення бачимо, що $K_I^\pm$ і $K_{II}^\pm$ для обох вершин ламаної тріщини прямо пропорційні різниці коефіцієнтів теплового розширення півплощин /$\alpha_+^t - \alpha_-^t$ /. Якщо бічна ланка розташована у більш жорсткій півплощині / $G^+ > G^-$ /, то максимум K_I^+ досягається з наближенням її до межі поділу матеріалів / $\alpha \to 0$ /, а K_I^- набуває максимального значення, коли ламана тріщина стає прямолінійною, яка перпендикулярно перетинає лінію спаю матеріалів / $\alpha = \pi/2$ /. Коефіцієнти інтенсивності $K_{II}^\pm$ досягають максимуму одночасно з наближенням бічної ланки до межі поділу півплощин.

1. Зашкильняк И.М. Термоупругое состояние кусочно-однородной плоскости, ослабленной произвольно-ориентированной трещиной //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1976. № 3. С. 82-88.
2. Зеленяк В.М. Продольный сдвиг двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами //Фіз.-

хім. механіка матеріалів. 1989. № 3. С. 75-78. 3. С а в р у к М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К., Наук. думка, 1981. 324 с. 4. С а в р у к М.П., З е л е н я к В.М. Плоская задача теплопроводности и термоупругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1988. № 2. С. 23-28.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.93

УДК 539.3

Д.Г.Хлєбніков, Р.М.Бурда, К.В.Вишневський

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ПРИКЛЕЄНОЮ ПЕРЕГОРОДКОЮ

Розглядається задача про напружено-деформований стан під дією заданого температурного поля тонкої циліндричної оболонки $/0 \le x \le L/$ радіуса R, всередині якої при $x = b$ приклеєна перегородка у вигляді тонкої круглої пластинки.

На контурі з"єднання пластинки, клейового прошарку та оболонки при $r = R$ справедливі геометричні умови рівності переміщень та кутів повороту оболонки $W(b)$, $W'(b)$ кільця $u_к$, $\varphi_к$ та пластинки $u(R)$, $\theta(R)$:

$$W(b) = u_к = u(R), \quad W'(b) = \varphi_к = -\theta(R). \qquad /1/$$

Осесиметричний напружено-деформований стан циліндричної оболонки з вільними краями описується рівнянням [1, 3] щодо прогину оболонки W:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + 4 \cdot \beta^4 \cdot W = \frac{1}{D} \cdot \left[q(x) + q_T(x)\right] \qquad /2/$$

та умовами

$$W''(0) = W''(L) = 0, \quad W'''(0) = W(L) = 0, \qquad /3/$$

де

$$q(x) = P_0 \cdot \delta(x - b) + M_0 \cdot \delta'(x - b); \qquad /4/$$

$$q_T(x) = \frac{2 \cdot E \cdot h \cdot \alpha \cdot T}{R} + \frac{D \cdot (1+\nu) \cdot \alpha}{2 \cdot h} \cdot \frac{d^2(\Delta T)}{dx^2}; \qquad /5/$$

$$D = \frac{2 \cdot E \cdot h^3}{3 \cdot (1 - \nu^2)}; \qquad \beta^4 = \frac{3 \cdot (1 - \nu^2)}{4 \cdot R^2 \cdot h^2}. \qquad /6/$$

Тут P_0, M_0 – невідомі зусилля та момент, що діють з боку клейового прошарку на оболонку; $\delta(u)$ – дельта-функція Дірака; $2 \cdot h$ – товщина оболонки; $T, \Delta T$ – температура її серединної поверхні та