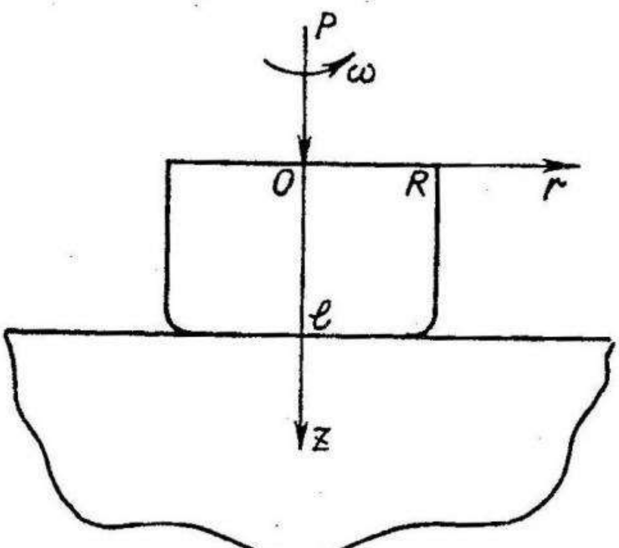
УДК 539.3

В.П.Левицький, В.П.Новосад

ТЕРМОПРУЖНЕ КОНТАКТУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ ПРИ ЗМІННОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Розглянемо штамп радіусом R і заввишки ℓ, який притискується вертикальною силою P до пружного підпростору і обертається зі сталою кутовою швидкістю ω /рис. I/. Розв"язування задачі полягає в тому, щоб задовольнити:



а/ рівняння термопружності для півпростору:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{u_r}{r^2}+k\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]=\frac{\beta}{\mu}\frac{\partial t}{\partial r} \quad /1/$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+k\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]=\frac{\beta}{\mu}\frac{\partial t}{\partial z}; \quad /2/$$

б/ рівняння теплопровідності для циліндра і півпростору:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}=\chi_1\frac{\partial T}{\partial \tau}; \quad /3/$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}=\chi_2\frac{\partial t}{\partial \tau}; \quad /4/$$

в/ температурні граничні умови

$$z = 0: \quad \partial T/\partial z = \gamma_0 T \qquad (0 \le r \le R); \qquad /5/$$

$$r = R: \quad \partial T/\partial r = -\gamma_\alpha T \qquad (0 \le z \le l); \qquad /6/$$

$$z = l: \quad \lambda_2 \partial t/\partial z - \lambda_1 \partial T/\partial z = f_T \omega r \sigma_{zz} \qquad (0 \le r \le R); \qquad /7/$$

$$\lambda_2 \partial t/\partial z + \lambda_1 \partial T/\partial z = h[t - T] \qquad (0 \le r \le R); \qquad /8/$$

$$\partial t/\partial z = \gamma_H t \qquad (r > R); \qquad /9/$$

г/ силові граничні умови

$$z = l: \quad u_z = f \qquad (0 \le r \le R); \qquad /10/$$

$$\sigma_{zz} = 0 \qquad (r \ge R); \qquad /11/$$

$$\tau_{rz} = 0 \qquad (r < \infty); \qquad /12/$$

д/ початкові умови

$$t\big|_{\tau=0} = T\big|_{\tau=0} = 0\ ; \qquad /13/$$

$$f\big|_{\tau=0} = \frac{\partial f}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0} = 0 \qquad /14/$$

де $k = (\lambda + \mu)/\mu = 1/(1-2\nu)$; ν – коефіцієнт Пуасона; $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$; λ, μ – коефіцієнти Ляме; α_T – температурний коефіцієнт лінійного розширення; λ_1 і λ_2 – коефіцієнти теплопровідності відповідно циліндричного штампа і півпростору; $\gamma_0 = \gamma_\alpha = \gamma_H$ – коефіцієнти теплообміну із зовнішнім середовищем відповідно для торця циліндра, його бічної поверхні і вільної поверхні півпростору; T – температура циліндричного штампа, t – півпростору; $\chi_i = 1/a_i$ /$i = 1,2$/, де a_i – коефіцієнти температуропровідності відповідно циліндра і півпростору; h^{-1} – коефіцієнт термічного опору; f_T – коефіцієнт тертя.

Вважаємо, що штамп має заокруглені краї і в області контакту обмежений поверхнею обертання, що складається з двох ділянок: при $0 \le r < r^*$ – площини, при $r^* \le r \le R$ – параболоїду з вершиною в точці r^* [1]. Тому приймаємо

$$f(r,\tau) = f^*(\tau) - \frac{(r^* - r)^2}{2R_p} H(r - r^*), \quad f^* = const,$$

де величина r^* близька до R ; R_p – радіус кривини країв штампа; $H(r - r^*)$ – функція Хевісайда.

При розв"язуванні задачі будемо також використовувати умову динамічної рівноваги штампа:

$$m\,\frac{\partial^2 f^*(\tau)}{\partial \tau^2} = P(\tau) + 2\pi \int_0^R r\,\sigma_{zz}(r,l,\tau)\,dr. \qquad /15/$$

Рівняння /3/ в трансформантах Лапласа і з урахуванням /13/ в безрозмірних координатах $\rho = \frac{r}{R}$, $\zeta = \frac{z}{l}$ має вигляд

$$\frac{\partial^2 T^L}{\partial \zeta^2} = -\frac{l^2}{R^2}\left[\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial T^L}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 T^L}{\partial \rho^2}\right] + l^2 X_1 s T^L. \qquad /16/$$

Якщо, використавши метод прямих і врахувавши умову /6/, записати це рівняння в кожній з N точок розбиття по ρ і звести задачу теплопровідності для циліндра до системи лінійних диференціальних рівнянь, то розв"язок її можна подати у вигляді вектора [2]:

$$\vec{w}^{\,T}(\zeta,s) = \left[T^L(\rho_1,\zeta,s),\ldots,T^L(\rho_N,\zeta,s),\ \frac{dT^L(\rho_1,\zeta,s)}{d\zeta},\ldots,\frac{dT^L(\rho_N,\zeta,s)}{d\zeta}\right] =$$

$$= \exp(B(s)\zeta)\,\vec{d}(s), \qquad /17/$$

де $\exp(B(s)\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n(s)\zeta}{n!}$; $B(s)$ – відома матриця розмірністю $2N\times 2N$; $\vec{d}(s)$ визначаємо, користуючись граничними умовами на ділянці контакту і верхньому торці циліндра.

Рівняння /4/ у трансформантах Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t^L}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial t^L}{\partial r} + \frac{\partial^2 t^L}{\partial r^2} = X_2 s t^L. \qquad /18/$$

Після перетворення Ганкеля нульового порядку по координаті r :

$$\frac{\partial^2 t^{LH}}{\partial z^2} - \xi^2 t^{LH} = X_2 s t^{LH}. \qquad /19/$$

Розв"язок для подвійної трансформанти температури записуємо у вигляді

$$t^{LH}(\xi,z,s) = D(\xi,s)\exp\left(-\sqrt{\xi^2 + X_2 s}\,(z-l)\right). \qquad /20/$$

Розв"язок осесиметричних рівнянь термопружності для півпростору в зображеннях за Ганкелем на границі півпростору, що врахову умову /12/, має вигляд

$$t^{LH}(\xi,l,s) = D(\xi,s); \qquad /21/$$

$$q^{LH}(\xi,l,s) = \lambda_2\sqrt{\xi^2 + X_2 s}\; D(\xi,s); \qquad /22/$$

$$u_z^{LH}(\xi,l,s)=\xi^2\vartheta_1 C_1(\xi,s)-\vartheta_3\frac{\sqrt{\xi^2+X_2 s}}{s}\mathcal{D}(\xi,s); \qquad /23/$$

$$\sigma_{zz}^{LH}(\xi,1,s)=\xi^3\sigma_1 C_1(\xi,s)-\sigma_3\frac{\xi}{s}\left[\frac{\sqrt{\xi^2+X_2 s}}{(k-1)}+\xi\right]\mathcal{D}(\xi,s), \qquad /24/$$

де
$$\vartheta_1=k\frac{k+1}{k-1};\quad \vartheta_3=\frac{b_1}{X_2}\,\frac{k+1}{k-1};\quad \sigma_1=-2\mu\frac{k^2}{k-1};\quad \sigma_3=-\frac{2\mu b_1}{X_2};$$

$b_1=\beta/\mu(1+k)$; $C_1(\xi,s)$; $\mathcal{D}(\xi,s)$ – деякі функції, які визначаємо з граничних і початкових умов.

Якщо в формулах /21–24/ перейти до безрозмірного параметра $\eta=\xi R$ і, застосувавши обернене перетворення Ганкеля, задовольнити граничні умови /7–11/, матимемо рівняння

$$\frac{\lambda_2}{R^3}\int_0^\infty\sqrt{\eta^2+X_2 sR^2}\,F(\eta,s)\eta J_0(\eta\varrho)\,d\eta+\frac{\lambda_1}{l}\left.\frac{\partial T^L(\varrho,\zeta,s)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1}=$$

$$=-f_T\omega\varrho R\,\sigma_{zz}^L(\xi,1,s) \qquad (0\le\varrho\le1); \qquad /25/$$

$$\frac{\lambda_1}{l}\left.\frac{\partial T^L(\varrho,\zeta,s)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1}+hT^L(\varrho,\zeta,s)\Big|_{\zeta=1}=$$

$$=\frac{1}{R^3}\int_0^\infty\lambda_2\left[\sqrt{\eta^2+X_2 sR^2}+hR\right]F(\eta,s)\eta J_0(\eta\varrho)\,d\eta \qquad (0\le\varrho\le1); \qquad /26/$$

$$-\frac{1}{R^3}\int_0^\infty\left[\sqrt{\eta^2+X_2 sR^2}+\gamma_H R\right]F(\eta,s)\eta J_0(\eta\varrho)\,d\eta=0 \qquad (\varrho\ge1); \qquad /27/$$

$$\int_0^\infty\left[\eta^2\vartheta_1 C(\eta,s)-\vartheta_3 R\frac{\sqrt{\eta^2+X_2 sR^2}}{s}F(\eta,s)\right]\eta J_0(\eta\varrho)\,d\eta=R^4 f^L(s,\varrho) \qquad /28/$$
$$(0\le\varrho\le1);$$

$$\frac{1}{R^4}\int_0^\infty\left[\frac{\eta^2}{R}\sigma_1 C(\eta,s)-\sigma_3\frac{\eta}{s}\left[\frac{\sqrt{\eta^2+X_2 sR^2}}{s}+\eta\right]F(\eta,s)\right]\eta J_0(\eta\varrho)\,d\eta=0 \qquad /29/$$
$$(\varrho\ge1).$$

У формулах /25–29/ $C(\eta,s)=C_1(\frac{\eta}{R},s)$; $F(\eta,s)=\mathcal{D}(\frac{\eta}{R},s)$.
Продовжимо /27/ і /29/ на всю вісь ϱ за допомогою функції Хевісайда:

$$-\frac{1}{R^3}\int_0^\infty\left[\sqrt{\eta^2+X_2 sR^2}+\gamma_H R\right]F(\eta,s)\eta J_0(\eta\varrho)\,d\eta=\varphi(\varrho,s)H(1-\varrho); \qquad /30/$$

$$\frac{1}{R^4}\int_0^\infty\left[\frac{\eta^2}{R}\sigma_1 C(\eta,s)-\sigma_3\frac{\eta}{s}\left[\frac{\sqrt{\eta^2+X_2 sR^2}}{s}+\eta\right]F(\eta,s)\right]\eta J_0(\eta\varrho)\,d\eta=$$
$$=\sigma_{zz}^L(\varrho,1,s)H(1-\varrho), \qquad /31/$$

а потім подамо невідомі функції $\varphi(\eta,s)_{zz}$, $\sigma^L(\eta,s)$ у вигляді розкладів у ряди Фур"є-Бесселя:

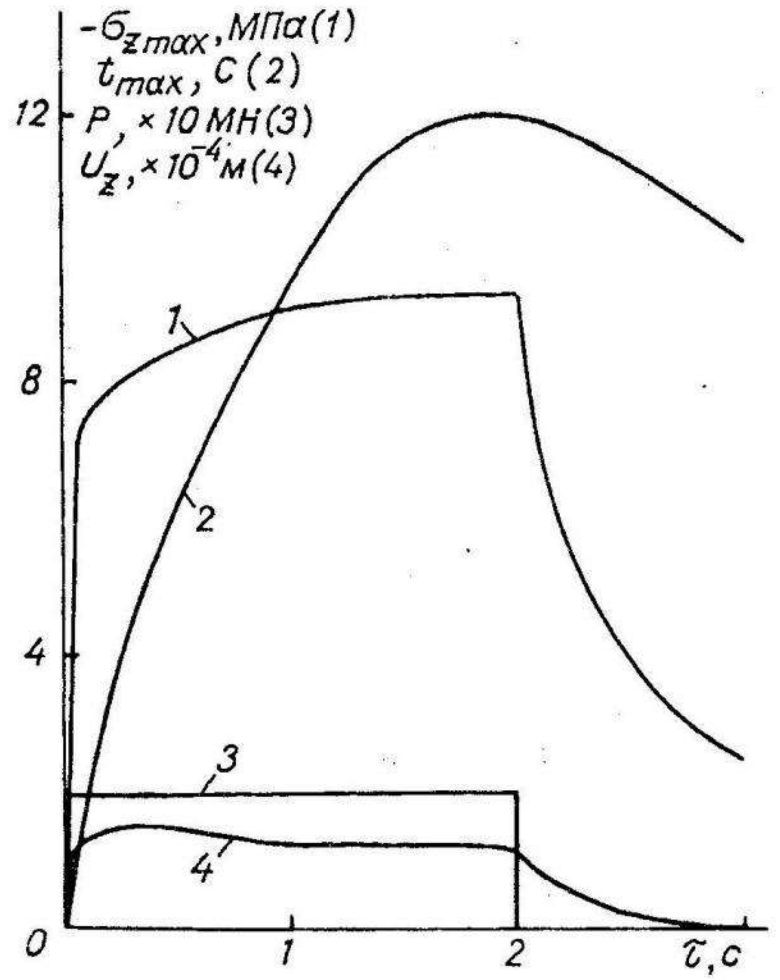
$$\varphi(\eta,s)=b_0(s)+\sum_{n=1}^{N-1} b_n(s)J_0(\mu_n\rho); \qquad /32/$$

$$\sigma^L_{zz}(\eta,s)=\sum_{n=1}^{N-1} a_n(s)J_0(\mu_n\rho). \qquad /33/$$

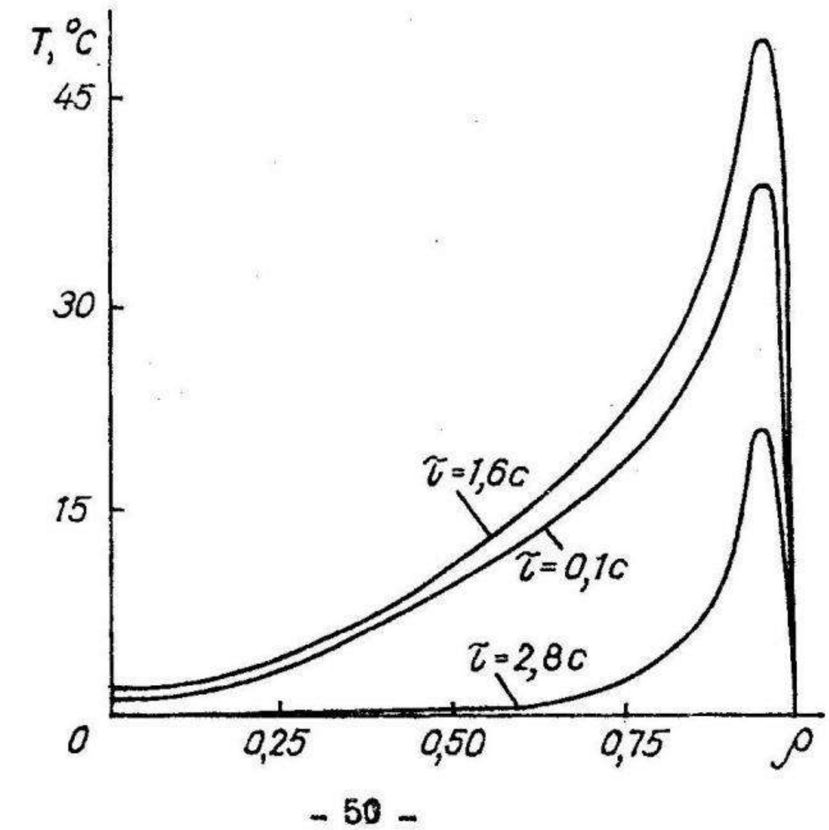
Виразивши функції $C(\eta,s)$, $F(\eta,s)$ через невідомі коефіцієнти, задовольнивши /I5/ і граничні умови /5/, /25/, /26/, /28/ в кожній точці рівномірного розбиття $\rho_i=\Delta\rho(i-1)=(i-1)/(N-1)$, $(i=1,\dots,N)$ прийдемо до системи рівнянь:

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{N} a_n(s)\frac{\vartheta_1 R}{\sigma_1}\mu_n J_1(\mu_n)\Lambda_n(\rho_i)+\frac{b_0(s)}{s}\Pi^*(\rho_i,s)+\\ +\sum_{n=1}^{N-1}\frac{b_n(s)}{s}\mu_n J_1(\mu_n)\Pi_n(\rho_i,s)-f^L(s,\rho)=0; \quad (i=1,\dots,N)\\ \sum_{n=1}^{N} a_n(s)f_T\rho_i\omega R J_0(\mu_n\rho_i)+b_0(s)\lambda_2 I^*(\rho_i,s)+\\ +\sum_{n=1}^{N-1} b_n(s)\lambda_2\mu_n J_1(\mu_n)I_n(\rho_i,s)+\frac{\lambda_1}{l}\sum_{n=1}^{2N}M^*_{N+i,n}(s)d_n(s)=0; (i=1,\dots,N)\\ b_0(s)Y^*(\rho_i,s)+\sum_{n=1}^{N-1} b_n(s)\mu_n J_1(\mu_n)Y_n(\rho_i,s)-\\ -\frac{\lambda_1}{l}\sum_{n=1}^{2N}M^*_{N+i,n}(s)d_n(s)-h\sum_{n=1}^{2N}M^*_{i,n}(s)d_n(s)=0; \quad (i=1,\dots,N)\\ \frac{1}{l}d_{N+i}(s)-\gamma_0 d_i(s)=0; \quad (i=1,\dots,N)\\ 2\pi R^2\sum_{n=1}^{2N} a_n(s)\frac{J_1(\mu_n)}{\mu_n}-ms^2f^L(s)=-P^L(s),\end{cases} \qquad /34/$$

де $\Lambda_n(\rho_i)$, $\Pi^*(\rho_i,s)$, $\Pi_n(\rho_i,s)$, $I^*(\rho_i,s)$, $I_n(\rho_i,s)$, $Y^*(\rho_i,s)$, $Y_n(\rho_i,s)$ – деякі невласні інтеграли, що містять бесселеві функції; $M^*(s)$ – матрична експонента в /I7/ при $\zeta=1$. Трансформанти шуканих функцій виражаються через $a_n(s)$, $b_n(s)$ $(n=1,\dots,N)$ і $d_n(s)$ $(n=1,\dots,2N)$ /компоненти $d(s)$ /. Отже, розв"язуючи систему



$-\sigma_{z\,max}$, МПа(1)
t_{max}, с (2)
P, ×10 МН (3)
U_z, ×10^{-4} м (4)
12
8
4
0
1
2
3
4
1
2
τ, с



T, °C
45
30
15
0
0,25
0,50
0,75
ρ
τ=1,6с
τ=0,1с
τ=2,8с

/34/ для дійсних значень $s_n = (2n+1)\sigma$, $(n = 0, 1, \dots, N^*)$ / σ – параметр обчислень/, можемо методом Папуліса визначити шукані функції.

Розрахунки виконані при $P(\tau) = F H(a - \tau)$ і значеннях сталих, обраних таким чином: $N = 17$; $N^* = 10$; $\gamma_H = \gamma_0 = \gamma_{\alpha_1} = 10$ м$^{-1}$ $h = 10$ кВт/м^{2}К; $\alpha_T = 22{,}9 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; $F = 20$ кН; $\omega = 0{,}5$ с$^{-1}$; $R = 1$ м; $l = 0{,}2$ м; $X_1 = 200000$ с/м^2; $X_2 = 50000$ с/м^2; $a = 1$; $\lambda = 5{,}46 \cdot 10^{10}$ Па; $\mu = 2{,}56 \cdot 10^{10}$ Па; $f_T = 0{,}1$; $\lambda_1 = 22$ Вт/м К; $\lambda_2 = 209$ Вт/мК; $m = 4900$ кг. Отримані результати частково відображені на рис. 2 і 3.

1. Г р и л і ц ь к и й Д.В., К и з и м а Я.М. Осесиметричні контактні задачі теорії пружності і термопружності. Львів: Вища шк. 1981. 136 с. 2. Р а к и т с ь к и й Ю.В., У с т и н о в С.М. Ч е р н о р у ц ь к и й І.Г. Чисельні методи розв"язування жорстких систем. М.: Наука. 1979. 208 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.94

УДК 539.3

Ю.О.Пир"єв, Р.І.Мокрик

НЕЛІНІЙНА НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ПРО ТЕРМОПРУЖНИЙ КОНТАКТ З УРАХУВАННЯМ ТЕРМІЧНОГО ОПОРУ

Розглянемо одновимірну модель термопружного контакту, запропоновану у працях [2–5].

Однорідний шар завтовшки L з модулем Юнга E та коефіцієнтом термічного розширення α розташований між двома жорсткими ідеально провідними стінками A та B з температурами $T_A(t) = T_0 + \theta_1(t)$ та $T_B(t) = T_0 + \theta_2(t)$. Шар жорстко зчеплений зі стінкою A та в початковий момент часу, коли $T_A(0) = T_B(0) = T_0$, наявний невеликий прозір g_0 /або натяг при $g_0 \le 0$ / між вільною поверхнею шару та стінкою B. Вважаємо, що $|g_0/L| \ll 1$. Коефіцієнт Пуассона, теплопровідність та температуропровідність матеріалу шару позначимо через ν, λ, k відповідно.

Між вільною поверхнею шару та стінкою B будемо припускати існування термічного опору R, величина якого приймається деякою функцією $R_s(g)$ від прозору g чи функцією $R_c(p)$ від контактного тиску p. Будемо також вважати, що ці функції є монотонно спадними при зменшенні прозору та при збільшенні контактного тиску,