/34/ для дійсних значень $s_n = (2n+1)\sigma$, $(n = 0,1,\ldots,N^*)$ / σ – параметр обчислень/, можемо методом Папуліса визначити шукані функції.

Розрахунки виконані при $P(\tau) = FH(a-\tau)$ і значеннях сталих, обраних таким чином: $N = 17$; $N^* = 10$; $\gamma_H = \gamma_0 = \gamma_{\alpha_1} = 10$ м$^{-1}$; $h = 10$ кВт/м^{2}К; $\alpha_T = 22{,}9 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$; $F = 20$ кН; $\omega = 0{,}5$ с$^{-1}$; $R = 1$ м; $l = 0{,}2$ м; $X_1 = 200000$ с/м^2; $X_2 = 50000$ с/м^2; а=1; $\lambda = 5{,}46 \cdot 10^{10}$ Па; $\mu = 2{,}56 \cdot 10^{10}$ Па; $f_T = 0{,}1$; $\lambda_1 = 22$ Вт/м К; $\lambda_2 = 209$ Вт/мК; $m = 4900$ кг. Отримані результати частково відображені на рис. 2 і 3.

1. Грилицький Д.В., Кизима Я.М. Осесиметричні контактні задачі теорії пружності і термопружності. Львів: Вища шк. 1981. 136 с. 2. Ракитський Ю.В., Устинов С.М. Черноруцький І.Г. Чисельні методи розв"язування жорстких систем. М.: Наука. 1979. 208 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.94

УДК 539.3

Ю.О.Пир"єв, Р.І.Мокрик

НЕЛІНІЙНА НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ПРО ТЕРМОПРУЖНИЙ КОНТАКТ З УРАХУВАННЯМ ТЕРМІЧНОГО ОПОРУ

Розглянемо одновимірну модель термопружного контакту, запропоновану у працях [2-5].

Однорідний шар завтовшки L з модулем Юнга E та коефіцієнтом термічного розширення α розташований між двома жорсткими ідеально провідними стінками A та B з температурами $T_A(t) = T_0 + \theta_1(t)$ та $T_B(t) = T_0 + \theta_2(t)$. Шар жорстко зчеплений зі стінкою A та в початковий момент часу, коли $T_A(0) = T_B(0) = T_0$, наявний невеликий прозір g_0 /або натяг при $g_0 \leq 0$ / між вільною поверхнею шару та стінкою В. Вважаємо, що $|g_0/L| \ll 1$. Коефіцієнт Пуассона, теплопровідність та температуропровідність матеріалу шару позначимо через ν, λ, k відповідно.

Між вільною поверхнею шару та стінкою В будемо припускати існування термічного опору R, величина якого приймається деякою функцією $R_s(g)$ від прозору g чи функцією $R_c(p)$ від контактного тиску p. Будемо також вважати, що ці функції є монотонно спадними при зменшенні прозору та при збільшенні контактного тиску,

$R_S(0) = R_C(0)$. Функції термічного опору докладно розглянуті у праці [6].

Запропонована конструкція, яка перебуває при $t \in (0,\infty)$ в термопружному контакті, може бути при $t \in t_S$ в умовах наявності прозору $g(t) > 0$ або при $t \in t_C$ в умовах пружного контакту $p(t) > 0$, $t_S \cup t_C = (0,\infty)$.

У рамках наших припущень вважаємо, що процес термопружного контакту тіла зі стінкою описується крайовою задачею

$$\frac{\partial^2\theta(X,t)}{\partial X^2} = \frac{1}{K}\frac{\partial\theta(X,t)}{\partial t}, \quad X \in (0,L), \ t \in (0,\infty); \qquad /1/$$

$$\theta(0,t) = \theta_1(t), \ \lambda \frac{\partial\theta(L,t)}{\partial X} = \frac{\theta_2(t) - \theta(L,t)}{R(q)}, \ t \in (0,\infty); \qquad /2/$$

$$\theta(X,0) = 0, \quad X \in (0,L). \qquad /3/$$

Функція $R(q)$ має вигляд

$$R(q) = R_S(q)H(q) + R_C(-p_0 q)H(-q), \qquad /4/$$

де

$$q(t) = g_0 - \alpha_1 \int_0^L \theta(\xi,t)\,d\xi, \quad p_0 = E_1/L, \quad t \in (0,\infty); \qquad /5/$$

$$\alpha_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha, \quad E = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \theta = T - T_0,$$

а такі характеристики термопружного контакту, як величина прозору $g(t)$ та контактного тиску $p(t)$, визначаються зі співвідношень:

$$g(t) \equiv q(t), \quad q(t) > 0, \ t \in t_S; \qquad /6/$$

$$p(t) \equiv -p_0 q(t), \ q(t) < 0, \ t \in t_C. \qquad /7/$$

Використовуючи метод інтегрального перетворення Лапласа, крайову задачу з нелінійними граничними умовами зведемо до системи нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтера:

$$\theta(L,\tau) = \theta_1(\tau) * \frac{d}{d\tau}G_1(\tau) + Q(\tau) * \frac{d}{d\tau}G_2(\tau),$$

$$q(\tau) = g_0 - \alpha_1 L \left[\theta_1(\tau) * \frac{d}{d\tau} G_2(\tau) + Q(\tau) * \frac{d}{d\tau} G_3(\tau)\right], \qquad /8/$$

$$Q(\tau) = \frac{R_1}{R(q)}\left[\theta_2(\tau) - \theta(L,\tau)\right],$$

де

$$G_j(\tau) = g_j + 2\sum_{m=1}^{\infty} g_{jm} x_m^{-1} \exp(-x_m^2 \tau);$$

$$g_1 = g_2 = 1, \quad g_3 = 0{,}5, \quad g_{1m} = (-1)^m, \quad g_{2m} = -x_m^{-1}, \quad g_{3m} = (-1)^{-m} x_m^{-2};$$

$$x_m = \pi(2m-1); \quad R_1 = L/\lambda; \quad \tau = t/t_*; \quad t_* = L^2/k.$$

"$*$" позначимо згортку функцій за часом.

Для числового аналізу системи інтегральних рівнянь /8/ застосовуємо метод квадратур та ітерацій [1] з урахуванням поведінки функцій:

$$G_1(\tau) \sim 2\,\mathrm{erfc}\,(0{,}5/\tau^{0,5}), \quad G_3(\tau) \sim \tau,$$

$$G_2(\tau) \sim 2\,(\tau/\pi)^{0,5}, \qquad \tau \longrightarrow 0.$$

Будемо вважати, що температура стінок $\theta_n(\tau)$ змінюється за законом

$$\theta_n(t) = \vartheta_n(1 + \psi_n e^{-h^2 t}), \quad n = 1,2.$$

У цьому випадку розв"язок відповідної стаціонарної задачі /в рівнянні /1/ відсутні члени з похідними за часом/ зображається у вигляді

$$q = \tilde{Q}(q), \qquad \theta_s(x) = \vartheta_1\theta_1(x) + \vartheta_2\theta_2(x),$$

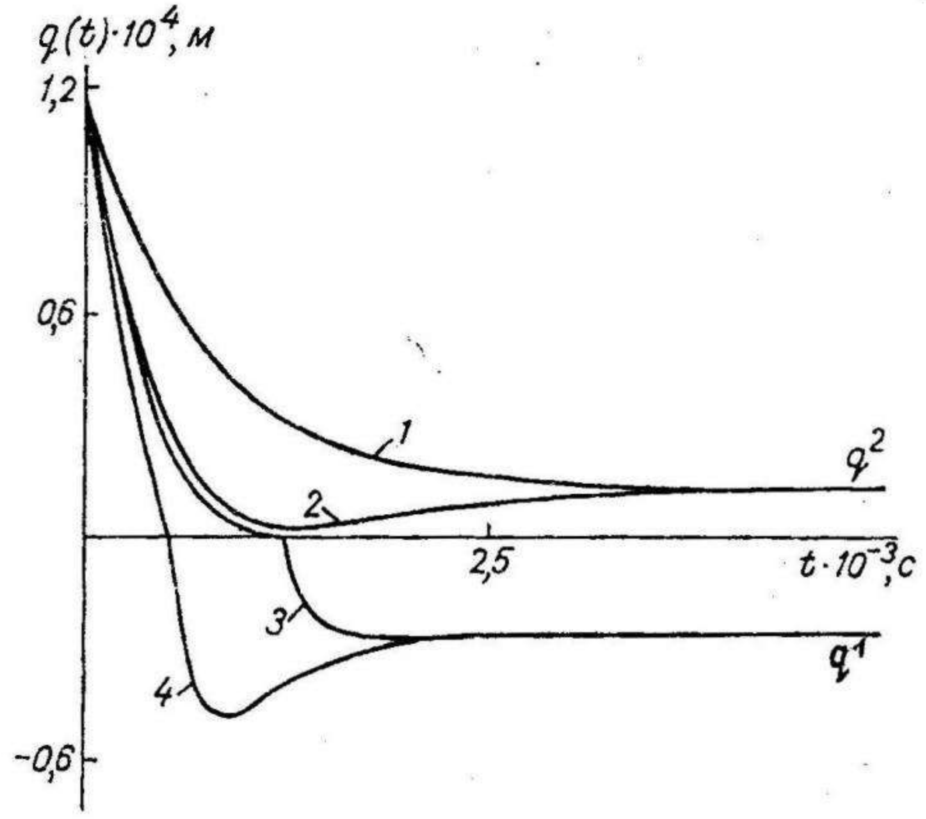
де

$$\theta_1(x) = 1 - (x/L) f(q); \qquad \theta_2(x) = (x/L) f(q);$$

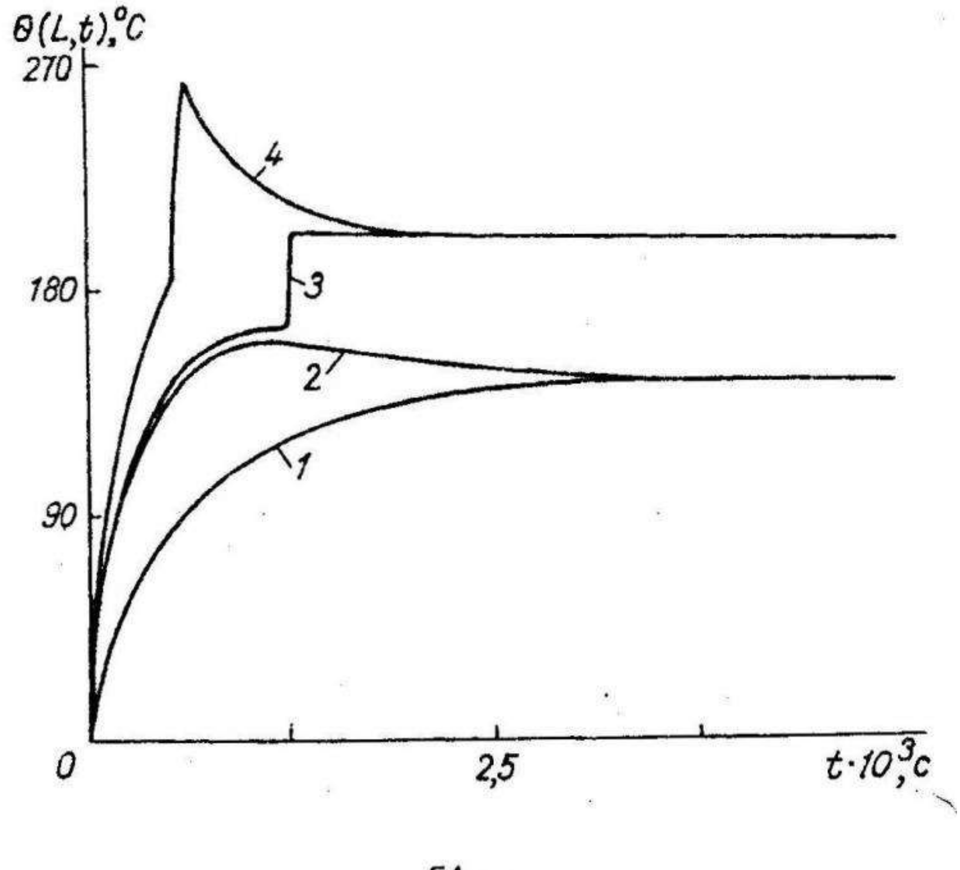
$$\tilde{Q}(q) = Q_\infty + \beta f(q); \qquad \beta = 0{,}5\,\alpha_1 L\,(\vartheta_1 - \vartheta_2);$$

$$f(q) = \left[R(q)/R_1 + 1\right]^{-1}; \quad Q_\infty = g_0 - \alpha_1 L \vartheta_1.$$

Розв"язок стаціонарної задачі може бути як єдиним, так і не єдиним. При виконанні умов $\beta < 0$, $g_0 \in (g_0^-, g_0^+)$ стаціонарна задача має три розв"язки q^1, q^0, q^2 $(q^1 < q^0 < q^2)$, де



q(t)·10⁴, м
1,2
0,6
-0,6
2,5
t·10⁻³, с
1
2
3
4
q²
q¹



θ(L,t), °C
270
180
90
0
2,5
t·10³, с
1
2
3
4

$g_0^- = q^{20} + \alpha_1 L \vartheta_1 - \beta f(q^{20})$; $g_0^+ = q^{10} + \alpha_1 L \vartheta_1 - \beta f(q^{10})$;
q^{10}, q^{20} – відповідно менший та більший корені рівняння $\beta f'(q) = 1$.

Шляхом лінеаризації нелінійної задачі в околі стаціонарних розв"язків легко показати, що стаціонарний розв"язок q^0 є нестійким $\beta f'(q_{v_0}) > 1$, а q^1 та q^2 – стійкі розв"язки. З часом $(t \to \infty)$ залежно від умов теплового збурення нестаціонарний розв"язок прямуватиме до одного зі стійких стаціонарних розв"язків.

При виконанні умов $\beta < 0$, $g_0 = g_0^-$ $(q^2 = q^0 = q^{20})$, або $\beta < 0$, $g_0 = g_0^+ (q^1 = q^0 = q^{10})$ стаціонарна задача має два розв"язки. В усіх інших випадках розв"язок стаціонарної задачі єдиний та стійкий.

Чисельний аналіз розв"язку задачі у випадку сталевого шару виконаний при /$\alpha = 14 \cdot 10^{-6}$ °С$^{-1}$, $\lambda = 21$ Вт·м$^{-1}$·°С$^{-1}$, $k = 5{,}9 \cdot 10^{-6}$ м^2·с$^{-1}$; $\nu = 0{,}3$, $E = 190 \cdot 10^9$ Па/ при $L = 0{,}1$ м та $\vartheta_1 = 10$ °С, $\vartheta_2 = 200$°С.

Термічний опір може бути апроксимований функцією

$$R_S(q) = R(0)\, r\left(\frac{q}{R(0)\lambda_1}\right), \quad R_C(-p_0 q) = R(0)\, r^{-1}(\alpha_* p_0 q),$$

де $r(x) = 1 + x$; $R(0)$ – термічний опір, який відповідає нульовому контактному тиску; λ_1 – теплопровідність повітря між поверхнями. Надалі вважатимемо, що $\alpha_* = 10^{-6}$ Па$^{-1}$, $R(0) = 0{,}11 \cdot 10^{-2}$ м^2 × °С/Ват, $\alpha_* = 10^{-6}$ Па$^{-1}$, $\lambda_1 = 2{,}43 \cdot 10^{-2}$ м$^{-1}$ °С/Ват.

На рис. 1 показана залежність прозору $g(t) = q(t)$ $(q(t) > 0)$ та контактного тиску $p(t) = -p_0 q(t)$ $(q(t) < 0)$ від часу t, $\psi_1 = 0$. Криві 1,2,3,4 відповідають $\vartheta_2 \psi_2 = 0$, 200, 210, 300 °С.

Для цих значень параметрів на рис. 2 зображений характер зміни в часі контактної температури $\theta(L, t)$ /криві 1,2,3,4/.

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, програмы. К., 1986. 2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М., 1989. 3. Barber J.R. Contact problems involving a cooled punch // J. Elasticity. 1978, Vol.8. P.409-423. 4. Barber J.R., Dundurs J., Comninou M. Stability considerations in thermoelastic contact // Transactions of the ASME, J. of Applied Mechanics. 1980. Vol.47. P.871-874. 5. Barber J.R., Zhang R.G. Transient behaviour and stability for thermoelastic contact of two rods of dissimilar materials // Int. J. Mech. Sci. 1988. Vol.30. P.691-704. 6. Shlykov Yu.P., Ganin A. Termal Resistance of Metalic contacts // Int. J. Heat Mass Transfer. 1964. Vol.7. P.243-255.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.94