УДК 539.3

Г.Т.Сулим, Д.В.Лозинський

ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ СТОХАСТИЧНО АРМОВАНИХ СТРІЧКОВИХ КОМПОЗИТІВ

Розглянемо ізотропне тіло, армоване вздовж осі z декартової системи координат тонкими пружними ізотропними стрічками довільного профілю /від еліптичного до прямокутного/. Матеріали матриці та арматури мають пружні сталі E, G, ν і E_B, G_B, ν_B відповідно. Ширина стрічок – $2a$, товщина – $2h$. Контакт між матрицею та арматурою – ідеальний. На нескінченності на тіло діє однорідне навантаження $\sigma_{xx}^{\infty} = p_1$, $\sigma_{yy}^{\infty} = p$, $\sigma_{xy}^{\infty} = \tau_2$, $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1$, $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$.

Напружений стан такої структури розіб"ємо [4] на два незалежних – повздовжній зсув і плоску деформацію. Таким чином, задача теоретичного опису пружної поведінки розглядуваного композиту зводиться до двовимірних задач теорії пружності. Тому надалі будемо розглядати площину $z = const$, яка містить тонкостінні пружні включення довільного профілю, що є поперечними перерізами арматури.

Сумістимо площину $z = const$ з координатною площиною xOy, початок якої – точку O, розмістимо в центрі довільного перерізу. Вважатимемо включення настільки віддаленими одне від одного, що їх взаємодією можна знехтувати. Геометричні параметри включень – півдовжина a і кут α між напрямом осі неоднорідності та осі абсцис – випадкові величини з густиною сумісного розподілу $g(a,\alpha)$ в діапазоні їхніх допустимих значень.

Оскільки взаємодія включень не враховується, можна обмежитись розглядом представницького елемента композиту об"ємом V, який містить одне включення і має форму прямокутника розмірами $2c \times 2d$. Визначимо середні напруження і деформації в такому елементі

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}(x,y,z)\,dV, \qquad \langle\varepsilon_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij}(x,y,z)\,dV,$$

де ε_{ij} і σ_{ij} – компоненти тензорів малих деформацій і напружень, відомі з розв"язків відповідних задач теорії пружності. Тоді ефективні пружні характеристики S^*_{ijkl} визначаються зі співвідношень

$$\langle\varepsilon_{ij}\rangle = S^*_{ijkl}\,\langle\sigma_{kl}\rangle. \qquad /1/$$

Якщо $S^* = \varphi(a, \alpha)$, де S^* – шуканий пружний модуль, $\varphi(a,\alpha)$ – відома функція, то середнє значення /математичне сподівання/ цього пружного модуля визначається формулою [1]

$$\langle S^* \rangle = \iint \varphi(a,\alpha) g(a,\alpha)\, da\, d\alpha, \qquad /2/$$

де інтегрування здійснюється по всій області зміни величин a і α. Якщо випадкові величини статистично незалежні, то $g(a,\alpha) = g(a) q(\alpha)$.

Для визначення дисперсії, яка характеризує відхилення випадкової величини від її середнього значення, можна скористатися формулою [1]

$$\mathcal{D}(S^*) = \int \langle S^* \rangle^2 da\, d\alpha - \langle S^* \rangle^2. \qquad /3/$$

Визначимо середнє по y значення функції $f(x+iy)$ на відрізку $y \in [-d, d]$ при $x = \gamma$ таким чином:

$$\hat{f}(\gamma + id) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^{d} f(\gamma + iy)\, dy, \qquad /4/$$

середнє по x значення функції $f(x+iy)$ на відрізку $x \in [-c, c]$ при $y = \beta_c$

$$\hat{f}(c + i\beta) = \frac{1}{2d} \int_{-c}^{c} f(x + i\beta)\, dx. \qquad /5/$$

Середнє значення похідних функції $f(x+iy)$ в представницькому елементі об"єму композиту з урахуванням симетрії розв"язку задачі теорії пружності можна визначити формулами

$$\langle f_{,x} \rangle = \frac{1}{2cd} \int_{-d}^{d} f(c+iy)\, dy, \quad \langle f_{,y} \rangle = \frac{1}{2cd} \int_{-c}^{c} f(x+id)\, dx. \qquad /6/$$

Тепер, якщо записати /I/ для досліджуваного напруженого стану і скористатися розв"язком відповідної задачі теорії пружності для ізольованого тонкостінного включення в пружному середовищі [2,3] то за допомогою формул /6/ можна отримати вирази для пружних модулів стрічкового композиту як функції величин а та α. Оскільки a і α – випадкові величини, то $\tilde{u}$ – ефективні модулі композиту, які є детермінованими функціями згаданих змінних, також випадкові.

I. Розглянемо визначення ефективних модулів зсуву стрічкового композиту. Співвідношення /I/ тоді має вигляд

$$\langle w_{,y} \rangle = S^*_{44} \langle \tau \rangle + S^*_{45} \langle \tau_1 \rangle, \quad \langle w_{,x} \rangle = S^*_{55} \langle \tau_1 \rangle + S^*_{45} \langle \tau \rangle. \qquad /7/$$

Згідно з [2] при дії напружень на нескінченності переміщення $w(z)$ в площині, яка містить пружне включення еліптичного профілю завдовжки 2a, визначається формулою

$$w(z)=\frac{1}{2G}\,Im\left\{\left[z-\sqrt{z^2-a^2}\right]\left[iA_1^{(5)}-GA_1^{(6)}\right]+2\left[\tau+i\tau_1\right]z\right\}, \qquad /8/$$

де вирази для $A_I^{/5/}$ і $A_I^{/6/}$ подано в роботі [2]; $z=(x+iy)e^{i\alpha}$.

Використовуючи /6/ та /7/, отримуємо

$$S_{44}^*=\langle w_{,y}\rangle/\tau=\frac{1}{2cd\tau}\int_{-c}^{c}w(x+id)\,dx, \quad \text{коли } \tau_1=0,$$

$$S_{55}^*=\langle w_{,x}\rangle/\tau_1=\frac{1}{2cd\tau_1}\int_{-d}^{d}w(c+iy)\,dy, \quad \text{коли } \tau=0,$$

$$S_{45}^*=\langle w_{,x}\rangle/\tau, \text{ коли } \tau=0; \qquad S_{45}^*=\langle w_{,y}\rangle/\tau_1, \text{ коли } \tau=0. \qquad /9/$$

Підставляючи /8/ в /9/, отримуємо вирази для ефективних зсувних модулів стрічкового композиту:

$$S_{44}^*=\frac{1}{4cdG\tau}\left\{2cd\left[2\tau-GA_1^{(6)}\right]\cos(\alpha)+GA_1^{(6)}\,Im\int_{-c}^{c}\sqrt{(x+id)^2e^{2i\alpha}-a^2}\,dx\right\};$$

$$S_{55}^*=\frac{1}{4cdG\tau_1}\left\{2cd\left[-2\tau_1-A_1^{(5)}\right]\cos(\alpha)-A_1^{(5)}\,Re\int_{-d}^{d}\sqrt{(c+iy)^2e^{2i\alpha}-a^2}\,dy\right\}. \qquad /10/$$

2. У випадку плоского напруженого стану співвідношення /1/ мають вигляд

$$\langle u_{,x}\rangle=S_{11}^*\langle p_1\rangle+S_{12}^*\langle p\rangle+S_{13}^*\langle\tau_2\rangle, \quad \langle v_{,y}\rangle=S_{21}^*\langle p_1\rangle+S_{22}^*\langle p\rangle+S_{23}^*\langle\tau_2\rangle,$$

$$\langle u_{,y}\rangle+\langle v_{,x}\rangle=S_{31}^*\langle p_1\rangle+S_{32}^*\langle p\rangle+S_{33}^*\langle\tau_2\rangle. \qquad /11/$$

Згідно з [3] переміщення в площині, що містить окремішне тонке включення еліптичного профілю, визначається за формулою

$$2(u+iv)=\frac{a}{1+\varkappa}\left\{\varkappa\left[A_1^{(2)}-2GA_1^{(4)}\right]\left[z-\sqrt{z^2-a^2}\right]-\right.$$

$$-\left[A_1^{(2)}+2G_1^{(4)}\right]\left[\bar z-\sqrt{\bar z^2-a^2}\right]+\frac{z-\bar z}{\sqrt{\bar z^2-a^2}}\left[\bar z-\sqrt{\bar z^2-a^2}\right]\left.\left[2GA_1^{(4)}-A_1^{(2)}\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{4}\left[(\varkappa-3)p+(\varkappa-1)p_1\right]+i\tau_2, \quad \varkappa=\frac{3-4\nu}{1+\nu}, \quad z=(x+iy)e^{i\alpha}. \qquad /12/$$

Вирази для коефіцієнтів $A_1^{/2/}$ і $A_1^{/4/}$ наведені у праці [3]. Використовуючи співвідношення /6/, /11/ і /12/, знаходимо

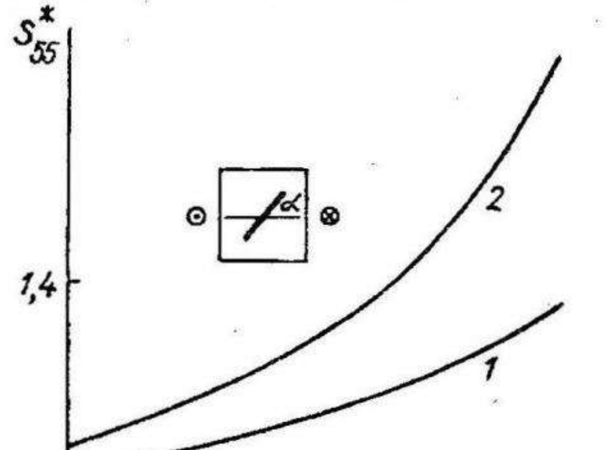
$$S_{11}^{*}=\frac{\langle u,_x\rangle}{\langle p_1\rangle}=\frac{1}{2cd\langle p_1\rangle}\int_{-d}^{d}u(c+iy)\,dy, \qquad \text{коли } p=\tau_2=0;$$

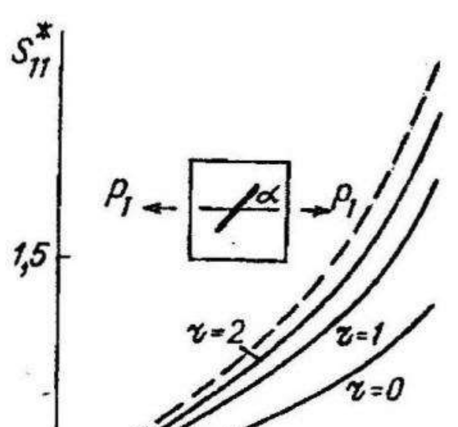
$$S_{22}^{*}=\frac{v,_y}{\langle p\rangle}=\frac{1}{2cd\langle p\rangle}\int_{-c}^{c}v(x+id)\,dx, \qquad \text{коли } p_1=\tau_2=0. \quad /13/$$

Через громіздкість повні вирази для S_{11}^{*} і S_{22}^{*} не виписані. Тепер, якщо відома сумісна густина $g(a,\alpha)$ розподілу випадкових величин a і α, то математичне сподівання ефективних модулів стрічкового композиту визначається за формулою /2/, де функція $\varphi(a,\alpha)$ подається виразами /10/ або /13/. Дисперсія визначається за формулою /3/.

Для прикладу обчислене математичне сподівання ефективного модуля зсуву S_{55}^{*} і модуля пружності S_{11}^{*} у разі, коли випадкова величина $0\le\alpha\le\pi/2$ підкорялась β-розподілу і відношення $E_B/E=100$ $/a/h=10$; $\nu_\beta=\nu=1/3/$ як функції величини $\lambda=a/c$, при цьому величина a вважається постійною. На рис. 1 лінія 1 відповідає прямокутній гратці $/d=2c/$, лінія 2 – квадратній $/c=d/$.

На рис. 2 відображений вплив на жорсткість S_{11}^{*} зміни параметра r розподілу кута α для квадратної гратки. Зі зростанням r жорсткість композиту збільшується, прямуючи до відповідного результату для регулярно армованого композиту /штрихова лінія/, отриманого з допомогою співвідношень /13/ при $\alpha=0$.





1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Наука, 1969. 576 с. 2. Сулим Г.Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде //Прикл. математика и механика. 1981. Т.45. № 2. С. 308-318. 3. Сулим Г.Т. Система лінійних включень у ізотропному середовищі //Дан УРСР. Сер. А. 1980. № 1. С. 62-65.

4. Фильштинский Л.А., Грингауз М.Г. Теория упругого линейно-армированного композиционного материала //Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. № 3. С.537-546.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.94

УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.В.Ковальчук

МЕТОД МАЙЗЕЛЯ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ДИНАМІЧНІЙ ТЕРМОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА

Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω з поверхнею S, у природному стані має температуру t_0. Унаслідок дії теплових або силових чинників тіло буде деформуватися, а його температура змінюватися. У тілі виникнуть переміщення та приріст температури $\theta = t - t_0$. Зміна температури спричинює виникнення деформацій e_{ij} та напружень σ_{ij}, які є функціями координат x_i і часу τ.

Розглядаємо динамічну задачу узагальненої термопружності анізотропного тіла, коли час релаксації теплового потоку має різні значення для головних напрямів. Одержані узагальнені рівняння Майзеля, що дають змогу знаходити переміщення і температуру всередині тіла Ω, коли на частині поверхні S_1 задані переміщення u_i і нормальний градієнт температури K, а на частині поверхні S_2 - поверхневі сили p_i і температура h, причому $S = S_1 + S_2$.

Відповідні результати у випадку, коли час релаксації теплового потоку однаковий для всіх напрямів, наведені в монографії [4].

Для знаходження переміщень і температури всередині тіла Ω використовуємо взаємозв"язану систему рівнянь [1, 3]:

$$c_{ijkl} u_{k,lj} + x_i = \rho \ddot{u}_i + \beta_{ij} \theta_{,j},$$

$$\frac{\lambda^t_{ij}}{\tau_i} \int_0^{\tau} \theta_{,ij}(M,\zeta) \exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right) d\zeta = t_0 \beta_{ij} \dot{e}_{ij} + c_l \dot{\theta} - W_t \qquad M \in \Omega, \qquad /1/$$

де c_{ijkl} - декартові компоненти сталого тензора пружної жорсткості; $\beta_{ij} = \alpha^t_{kl} c_{ijkl}$, α^t_{ij} - температурні коефіцієнти лінійного розширення та зсуву; c_l - об"ємна теплоємність; ρ - густина.

Спочатку визначаємо приріст температури. Для цього обираємо джерело тепла у точці ξ тіла Ω у вигляді $W_t = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)$ і припускаємо при цьому, що масові сили відсутні, тобто $x_i = 0$.