4. Фильштинский Л.А., Грингауз М.Г. Теория упругого линейно-армированного композиционного материала //Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. № 3. С.537-546.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.94

УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.В.Ковальчук

МЕТОД МАЙЗЕЛЯ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ДИНАМІЧНІЙ ТЕРМОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА

Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω з поверхнею S, у природному стані має температуру t_0. Унаслідок дії теплових або силових чинників тіло буде деформуватися, а його температура змінюватися. У тілі виникнуть переміщення та приріст температури $\theta = t - t_0$. Зміна температури спричинює виникнення деформацій e_{ij} та напружень σ_{ij}, які є функціями координат x_i і часу τ.

Розглядаємо динамічну задачу узагальненої термопружності анізотропного тіла, коли час релаксації теплового потоку має різні значення для головних напрямів. Одержані узагальнені рівняння Майзеля, що дають змогу знаходити переміщення і температуру всередині тіла Ω, коли на частині поверхні S_1 задані переміщення u_i і нормальний градієнт температури K, а на частині поверхні S_2 – поверхневі сили p_i і температура h, причому $S = S_1 + S_2$.

Відповідні результати у випадку, коли час релаксації теплового потоку однаковий для всіх напрямів, наведені в монографії [4].

Для знаходження переміщень і температури всередині тіла Ω використовуємо взаємозв"язану систему рівнянь [1, 3]:

$$c_{ijkl} u_{k,lj} + x_i = \rho \ddot{u}_i + \beta_{ij} \theta_{,j},$$
$$\frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i} \int_0^\tau \theta_{,ij}(M,\zeta) \exp\left(\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}\right) d\zeta = t_0 \beta_{ij} \dot{e}_{ij} + c_l \dot{\theta} - W_t \qquad M \in \Omega, \qquad /1/$$

де c_{ijkl} – декартові компоненти сталого тензора пружної жорсткості; $\beta_{ij} = \alpha_{kl}^t c_{ijkl}$, α_{ij}^t – температурні коефіцієнти лінійного розширення та зсуву; c_l – об"ємна теплоємність; ρ – густина.

Спочатку визначаємо приріст температури. Для цього обираємо джерело тепла у точці ξ тіла Ω у вигляді $W_t = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)$ і припускаємо при цьому, що масові сили відсутні, тобто $x_i = 0$.

Тут $\delta(\eta)=\dfrac{dS(\eta)}{d\eta}$, $\delta_+(\tau)=\dfrac{dS_+(\tau)}{d\tau}$, де $S(\eta)$, $S_+(\tau)$ – симетрична й асиметрична одиничні функції.

Спричинені дією цього джерела тепла переміщення $u_i=\tilde{u}_i(x,\xi,\tau)$ і приріст температури $\theta=\tilde{\vartheta}(x,\xi,\tau)$ знаходимо зі системи рівнянь /1/ при початкових умовах:

$$\begin{aligned}&\tilde{u}_i(x,\xi,0)=0, &&\dot{\tilde{u}}_i(x,\xi,0)=0,\\ &\tilde{\vartheta}(x,\xi,0)=0, &&\dot{\tilde{\vartheta}}(x,\xi,0)=0. \quad |x,\xi\in\Omega|\end{aligned} \qquad /2/$$

і крайових умовах:

$$\begin{aligned}&\tilde{u}_i(x,\xi,\tau)=0, &&\tilde{\vartheta}_{,n}(x,\xi,\tau)=0 \text{ на } S_1,\\ &p_i(x,\xi,\tau)=0, &&\tilde{\vartheta}(x,\xi,\tau)=0 \text{ на } S_2.\end{aligned} \qquad /3/$$

Підставляючи $x_i=0$, $W_t=\delta(x-\xi)\delta_+(\tau)$ і знайдені функції $u_i=\tilde{u}_i(x,\xi,\tau)=0$, $\theta=\tilde{\vartheta}(x,\xi,\tau)$ у рівняння взаємності [2], одержуємо

$$\begin{aligned}t(\xi,\tau)=&\int_\Omega d\Omega\int_0^\tau \tilde{\vartheta}(x,\xi,\tau-\tau_0)W_t(x,\tau_0)\,d\tau_0-\\
&-t_0\int_\Omega d\Omega\int_0^\tau x_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial u_i(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}\,d\tau_0+\\
&+\int_{S_1} dS\int_0^\tau \frac{\lambda^t_{ij}K(x,\tau_0)}{\tau_j}\tilde{\varphi}_i(x,\xi,\tau-\tau_0)\,d\tau_0-\\
&-\int_{S_2} dS\int_0^\tau \frac{\lambda^t_{ij}h(x,\tau_0)}{\tau_i}\tilde{\psi}_{in}(x,\xi,\tau-\tau_0)\,d\tau_0-\\
&-t_0\int_{S_2} dS\int_0^\tau p_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial\tilde{u}_i(x,\xi,\tau)}{\partial\tau_0}\,d\tau_0+\\
&+t_0\int_{S_1} dS\int_0^\tau p_i(x,\xi,\tau-\tau_0)\frac{\partial u_i(x,\tau_0)}{\partial\tau_0}\,d\tau_0,\end{aligned} \qquad /4/$$

де
$$\tilde{\varphi}_i(x,\xi,\tau)=\int_0^\tau \tilde{\vartheta}(x,\xi,\zeta)e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}}\,d\zeta;$$
$$\tilde{\psi}_{in}(x,\xi,\tau)=\int_0^\tau \tilde{\vartheta}_{,n}(x,\xi,\zeta)e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}}\,d\zeta.$$

Визначаємо тепер переміщення в тілі Ω. Нехай тепер $W_t = 0$, а масова сила, прикладена в точці $\xi \in \Omega$, має вигляд $x_i = \delta(x-\xi) \times \delta_+(\tau)\delta_{ij}$ і спрямована по осі x_j. Тут δ_{ij} – символ Кронеккера.

Виникаючі під дією цієї миттєвої сили переміщення $u_i = u_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)$ і приріст температури $\theta = \upsilon^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)$ знаходимо зі системи рівнянь /1/ при початкових умовах:

$$u_i^{(\gamma)}(x,\xi,0)=0, \qquad \dot u_i^{(\gamma)}(x,\xi,0)=0, \qquad /5/$$
$$\upsilon^{(\gamma)}(x,\xi,0)=0, \qquad \dot\upsilon^{(\gamma)}(x,\xi,0)=0 \qquad |x,\xi \in \Omega|$$

і крайових умовах:

$$u_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)=0, \qquad \upsilon_{,n}^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)=0 \quad \text{на } S_1,$$
$$p_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)=0, \qquad \upsilon^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)=0 \quad \text{на } S_2. \qquad /6/$$

Підставляючи тепер $x_i = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)\delta_{ij}, W_t=0$ і знайдені функції $u_i = u_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)$, $\theta = \upsilon^{(\gamma)}(x,\xi,\tau)$ у рівняння взаємності /2/ приходимо до рівняння

$$\dot u_j(\xi,\tau) = \int_\Omega d\Omega \int_0^\tau x_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial u_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial \tau_0}d\tau_0 -$$
$$-\frac{1}{t_0}\int_\Omega d\Omega\int_0^\tau \upsilon^{(\gamma)}(x,\xi,\tau-\tau_0)W_t(x,\tau_0)\,d\tau_0 +$$
$$+\int_{S_2} dS\int_0^\tau p_i(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial u_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)}{\partial\tau_0}d\tau_0 -$$
$$-\int_{S_1} dS\int_0^\tau p_i^{(\gamma)}(x,\tau-\tau_0)\frac{\partial u_i^{(\gamma)}(x,\tau_0)}{\partial\tau_0}d\tau_0 +$$
$$+\int_{S_2} dS\int_0^{\tau} \frac{\lambda_{ij}^{t}}{\tau_i} h(x,\tau-\tau_0)\,\psi_{in}^{(\gamma)}(x,\xi,\tau_0)d\tau_0 -$$
$$-\int_{S_1} dS\int_0^\tau \lambda_{ij}^{t} K(x,\tau_0)\,\varphi_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau-\tau_0)d\tau_0, \qquad /7/.$$

де

$$\varphi_i^{(\gamma)}(x,\xi,\tau) = \int_0^\tau \upsilon^{(\gamma)}(x,\xi,\zeta)\,e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}}d\zeta,$$
$$\psi_{in}^{(\gamma)}(x,\xi,\tau) = \int_0^\tau \upsilon_{,n}^{(\gamma)}(x,\xi,\zeta)\,e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_i}}d\zeta.$$

Рівняння /4/, /7/ є узагальненими рівняннями Майзеля для взаємозв"язаних динамічних задач узагальненої термопружності, які враховують ортотропію часу релаксації теплового потоку.

І. Ковальчук Б.В., Гой О.І. Узагальнене енергетичне рівняння і теорема єдиності розв"язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип.40. 1994. С. 104-109. 2. Ковальчук Б.В., Гой О.І. Узагальнене варіаційне рівняння і теорема взаємності розв"язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 41. 1994. С. 71-75. 3. Колянo Ю.М., Ковальчук Б.В., Гой О.И. Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела, учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока //Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1988. № 9. С. 61-65. 4. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.94

УДК 517.95

Г.І.Берегова, В.М.Кирилич

УЗАГАЛЬНЕНА ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА В КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ

У праці [2] розглянута коректна розв"язність задачі Стефана для гіперболічної системи рівнянь першого порядку при заданих початкових, граничних та додаткових умовах.

Наша робота є узагальненням [2] на випадок, коли лінія задання початкових умов вироджується в точку, а граничні умови задаються в інтегральному вигляді, тобто в деякому криволінійному секторі /границі сектора апріорі невідомі/ досліджується система диференціальних та інтегральних рівнянь з додатковою інформацією про поведінку країв області.

Бібліографія з цієї проблеми є у праці [2].

Постановка задачі. Розглядається сукупність із $m \geqslant 1$ систем рівнянь з частинними похідними, в якій s-та система має вигляд

$$\frac{du_i^s}{dt} + \lambda_i^s(x,t)\frac{\partial u_i^s}{\partial x} = f_i^s(x,t;u), \qquad i = \overline{1,n_s}, \qquad /1/$$

де $/x,t/ \in G_{ut}^s := \{(x,t):\ t \in R_+,\ a_{u1}^s(t) \leq x \leq a_{u2}^s(t),\ a_{uk}^s(0) = 0\}$, причому $u_i^s : G_{ut}^s \longrightarrow R$, а функції a_{uk}^s теж невідомі та повинні задовольняти систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{d a_{uk}{}^s}{dt} = h_k{}^s\,(t;u) \qquad \text{для всіх} \quad t \geq 0,\ s=\overline{1,m};\ k=1,2. \qquad /2/$$

Під u розуміємо набір усіх функцій u_i^s. Праві частини в /1/ і /2/ є функціоналами типу Вольтерра /вони можуть бути звичайними функціями/.

Припускаємо, що кожна функція $\lambda_i \in C(R \times R_+)$, $\lambda_i^s \in C^1(R \times R_+)$ та локально задовольняє умову Ліпшіця по x, причому для всіх $t \geq 0$

$$\lambda_i^s(a_{u1}{}^s(t),t) - a_{u1}^{s\prime}(t) > 0, \qquad i=\overline{1,p_s+q_s},$$
$$\lambda_i^s(a_{u2}{}^s(t),t) - a_{u2}{}^s(t) < 0, \quad i=\overline{p_s+1,n_s}, \quad p_s, q_s = \overline{0,n_s}. \qquad /3/$$

Вводимо позначення

$$I_1{}^s = \{ i : \lambda_i{}^s(0,0) > a_{u1}^{s\prime}(0) \},$$

$$I_2{}^s = \{ i : \lambda_i{}^s(0,0) < a_{u2}^{s\prime}(0) \},$$

$$I_1^s \cap I_2^s = n_s + q_s; \qquad N = \sum_{s=1}^{m} (n_s + q_s).$$

Задаємо умови, що заміняють граничні:

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_s} \int\limits_{a_{u1}{}^s(t)}^{a_{u2}{}^s(t)} \alpha_{p_i s}(x,t) \cdot u_{is}(x,t)\,dx = H_p(t), \ p \in I_1{}^s \cap I_2{}^s, \qquad /4/$$

$$\alpha_{p_i s} \in C^1(R \times R_+), \ \ H_p(t) \in C^1(R_+).$$

З /2/ та /3/ випливає, зокрема, що $\lambda_i{}^s(0,0) \neq h_i{}^s\,(0;\,\bar{u}^0)$. Тут u^0 - розв"язок /1/-/4/ при $t=0$. Він одержується з /3/ при виконанні умови

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_s} \alpha_{p_i s}(0,0)(a_{u1 s}^{\prime}(0) - a_{u2 s}^{\prime}(0)) \neq 0. \qquad /5/$$

Припускаємо також, що виконуються умови узгодженості в точці /0,0/:

$$H_{p}^{\prime}(0) = 0, \ p \in \dot{I}_{1s} \cap \dot{I}_{2s}. \qquad /6/$$

На функції f_{is} і h_{is} поширюються ті ж самі умови, що й у [2].

<u>Узагальнений розв"язок.</u> Для всіх $t \geq 0$ введемо допоміжні невідомі функції:

$$u_{is}(a_{u1s}(t),t) = \mu_{is}(t), \qquad i \in \dot{I}_1{}^s,$$
$$u_{is}(a_{u2s}(t),t) = \nu_{is}(t) \qquad i \in \dot{I}_{2s}, \qquad /7/$$

причому $\mu_{i}^{s}(0) = \nu_i^s(0)$, $\quad i \in I_1^s \cap I_2^s$.

Позначимо через $\varphi_i^s(\tau; x, t)$ розв"язок диференціального рівняння $d\xi/d\tau = \lambda_i^s(\xi,\tau)$ такий, що $\varphi_i^s(t; x, t) = x$. Припустимо, що в системі /1/ функції φ_i^s неперервно диференційовані і що справедливі припущення /3/.

Інтегруючи систему /1/ уздовж характеристик, переходимо до системи інтегро-функціональних рівнянь:

$$u_i^s(x,t) = \omega_i^s(x,t;u) + \int\limits_{t_i^s(x,t;u)}^{t} f_i^s(\varphi_i^s(0;x,t),\tau;u)\,d\tau$$

$$t_i^s(x,t;u) \qquad /8/$$

$$s = \overline{1,m}, \quad i = \overline{1,n_s}, \qquad (x,t) \in G_{ut}^s$$

де $t_i^s(x,t;u) : \min\{\tau : (\varphi_i^s(\tau;x,t),\tau) \in G_{ut}^s\}$, а

$$\omega_i^s(x,t;u) = \begin{cases} \mu_i^s(t_i^s(x,t;u)), & \text{при} \\ \qquad \varphi_i^s(t_i^s(x,t;u),x,t) = a_{u1}^s(t_i^s(x,t;u)), & i \in I_1^s, \\ \nu_i^s(t_i^s(x,t;u)), & \text{при} \\ \qquad \varphi_i^s(t_i^s(x,t;u),x,t) = a_{u2}^s(t_i^s(x,t;u)), & i \in I_2^s. \end{cases}$$

Виходячи з цього, під узагальненим /ліпшицевим/ розв"язком задачі /1/-/4/ розумітимемо набір функцій u, які задовольняють умову Ліпшиця, умову /3/ і систему рівнянь /2/ і /7/. Вольтерровість функціоналів f_i^s і h_i^s дає змогу також вести мову про узагальнений розв"язок задачі /1/-/4/, який існує при малих t.

<u>Основна теорема.</u> При згаданих вище припущеннях узагальнений розв"язок задачі /1/-/4/ існує і є єдиним для всіх $t \in [0,\varepsilon]$ і для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$.

Доведення теореми пов"язане з досить громіздкими викладками і здійснюється за такою схемою. Комбінуючи метод характеристик /1/ з методом, використаним у працях [2,3], приходимо до системи інтегро-функціональних операторних рівнянь. А далі, користуючись принципом стискальних відображень у відповідно підібраному просторі, доводимо локальне по t існування та єдиність розв"язку.

1. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости //Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып.3. С. 87-104. 2. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой //Дифференц. урав. 1991. Т.27, № 3. С. 497-503. 3. Ки-

р и л и ч В.М. Нелокальные задачи типа Дарбу для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Донецк, 1984. 20 с.

Стаття надійшла до редколегії 13.04.94

УДК 517.946

П.П.Бабак

АСИМПТОТИКА ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ОДНІЄЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ

Розглядаємо систему з малим параметром $\varepsilon : 0 < \varepsilon \ll 1$:

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon^2 u_{xx} + a_{11}(x)u + a_{12}(x)v = f_1(x,t,\varepsilon) & /1/ \\ v_t \qquad\qquad + a_{21}(x)u + a_{22}(x)v = f_2(x,t,\varepsilon) & /2/ \end{cases}$$

в області $(x,t) \in (0,l)\times\mathbb{R}$

з умовами періодичності по t :

$$u(x,t+2\pi,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon); \qquad v(x,t+2\pi,\varepsilon) = v(x,t,\varepsilon) \qquad /3/$$

і з крайовими умовами:

$$u(0,t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon) \qquad t \in \mathbb{R}. \qquad /4/$$

$$u(l,t,\varepsilon) = \psi(t,\varepsilon). \qquad /5/$$

Для даної задачі доведемо теорему.

Теорема. Якщо виконуються умови:

1/ функції $f_i(x,t,\varepsilon)$, $\varphi(t,\varepsilon)$, $\psi(t,\varepsilon)$ – 2π -періодичні по t, $i = 1,2$;

2/ квадратична форма $a_{11}(x)\xi^2 + (a_{12}(x)+a_{21}(x))\xi\eta + a_{22}(x)\eta^2 \geq \mu(\xi^2+\eta^2)$, де $\xi,\eta \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $x \in [0,l]$;

3/ $a_{ij}(x) \in C^{N+1}([0,l])$, $i,j = 1,2$;

4/ $\varphi(t,\varepsilon), \psi(t,\varepsilon)$: $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^{N+1}}{\partial\varepsilon^{N+1}}\varphi$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^{N+1}}{\partial\varepsilon^{N+1}}\psi$ -кусково-гладкі по t і неперервні;

5/ $f_1(x,t,\varepsilon)$, $f_2(x,t,\varepsilon)$: $\frac{\partial^{N+1}}{\partial\varepsilon^{N+1}}f_i$, $\frac{\partial^N}{\partial x^N}f_i$ – неперервні, $\frac{\partial}{\partial t}$ – кусково-гладкі по t , $i = 1,2$,

тоді можна побудувати наближений розв"язок задачі у вигляді степеневих рядів, за степенями ε, до порядку ε^N , де $N \in \mathbb{N}$. Для побудови