р и л и ч В.М. Нелокальные задачи типа Дарбу для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Донецк, 1984. 20 с.

Стаття надійшла до редколегії 13.04.94

УДК 517.946

П.П.Бабак

АСИМПТОТИКА ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ОДНІЄЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ

Розглядаємо систему з малим параметром $\varepsilon : 0 < \varepsilon \ll 1$:

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon^2 u_{xx} + a_{11}(x)u + a_{12}(x)v = f_1(x,t,\varepsilon) & /1/ \\ v_t \qquad\qquad + a_{21}(x)u + a_{22}(x)v = f_2(x,t,\varepsilon) & /2/ \end{cases}$$

в області $(x,t) \in (0,l)\times\mathbb{R}$

з умовами періодичності по t :

$$u(x,t+2\pi,\varepsilon) = u(x,t,\varepsilon); \qquad v(x,t+2\pi,\varepsilon) = v(x,t,\varepsilon) \qquad /3/$$

і з крайовими умовами:

$$u(0,t,\varepsilon) = \varphi(t,\varepsilon) \qquad t \in \mathbb{R}. \qquad /4/$$

$$u(l,t,\varepsilon) = \psi(t,\varepsilon). \qquad /5/$$

Для даної задачі доведемо теорему.

<u>Теорема</u>. Якщо виконуються умови:

1/ функції $f_i(x,t,\varepsilon)$, $\varphi(t,\varepsilon)$, $\psi(t,\varepsilon)$ – 2π -періодичні по t, $i = 1,2$;

2/ квадратична форма $a_{11}(x)\xi^2 + (a_{12}(x)+a_{21}(x))\xi\eta + a_{22}(x)\eta^2 \geq \mu(\xi^2+\eta^2)$, де $\xi,\eta \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $x \in [0,l]$;

3/ $a_{ij}(x) \in C^{N+1}([0,l])$, $i,j = 1,2$;

4/ $\varphi(t,\varepsilon), \psi(t,\varepsilon)$: $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^{N+1}}{\partial \varepsilon^{N+1}}\psi$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^{N+1}}{\partial \varepsilon^{N+1}}\psi$ -кусково-гладкі по t і неперервні;

5/ $f_1(x,t,\varepsilon)$, $f_2(x,t,\varepsilon)$: $\frac{\partial^{N+1}}{\partial \varepsilon^{N+1}} f_i$, $\frac{\partial^N}{\partial x^N} f_i$ – неперервні, $\frac{\partial}{\partial t}$ – кусково-гладкі по t , $i = 1,2$,

тоді можна побудувати наближений розв"язок задачі у вигляді степеневих рядів, за степенями ε, до порядку ε^N , де $N \in \mathbb{N}$. Для побудови асимптотики розв"язку даної задачі та визначення її коректності використовуємо метод примежового шару [1-3].

1. Коректність задачі. Задачу /1/-/5/ за допомогою заміни легко звести до однорідної крайової задачі. Коректність задачі /1/-/5/ випливає з коректності відповідної однорідної крайової задачі. Інтегральні оцінки розв"язків задачі, виходячи з умов періодичності /3/, зручно здійснювати у просторі $L_2(D^*)$, де $D^* = (0;l) \times (\tau; \tau + 2\pi)$. Використовуючи метод інтегралів енергії, одержуємо нерівність для u, v

$$\|u\|^2_{L_2(D^*)} + \|v\|^2_{L_2(D^*)} \leq C_1 \left(\|f\|^2_{L_2(D_0)} + \|f\|^2_{L_2(D_0)} \right) + \\ + C_2 \left(\|\varphi\|^2_{H^1_t(0;2\pi)} + \|\psi\|^2_{H^1_t(0;2\pi)} \right) \qquad /6/$$

при виконанні умов теореми.

Єдиність і неперервна залежність розв"язку задачі /1/-/5/ від вихідних даних випливає з /6/.

Будувати класичний розв"язок задачі /1/-/5/ зручно у вигляді комплекснозначного ряду Фур"є, перейшовши до відповідної однорідної крайової задачі.

2. Побудова асимптотики та її обгрунтування. Регулярна частина асимптотики. Розв"язок задачі /1/-/5/ шукаємо у вигляді степеневого ряду:

$$\bar{u}(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{u}_j(x,t), \qquad \bar{v}(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{v}_j(x,t). \qquad /7/$$

Розкладаємо функції $f_1(x,t,\varepsilon)$, $f_2(x,t,\varepsilon)$, $\varphi(t,\varepsilon)$, $\psi(t,\varepsilon)$ в околі точки $\varepsilon = 0$ в ряди Тейлора за степенями ε. Підставляючи /7/ і ці розклади функцій у задачу /1/-/5/ та групуючи коефіцієнти при однакових степенях ε, отримуємо задачу для знаходження j-го наближення розв"язку задачі /1/-/3/:

$$\begin{cases} \bar{u}_{jt} + a_{11}(x)\bar{u}_j + a_{12}(x)\bar{v}_j = (f_1)^{(j)}_\varepsilon (x,t,0)\frac{1}{j!} + (\bar{u}_{j-2})_{xx}; & /8/ \\ \bar{v}_{jt} + a_{12}(x)\bar{u}_j + a_{22}(x)\bar{v}_j = (f_2)^{(j)}_\varepsilon (x,t,0)\frac{1}{j!}, & /9/ \end{cases}$$

де

$$j = \overline{0,N}, \quad (x,t) \in D, \quad \bar{u}_{-1} = \bar{u}_{-2} = 0$$

з умовою періодичності:

$$\bar{u}_j(x,t+2\pi)=\bar{u}_j(x,t),\quad \bar{v}_j(x,t+2\pi)=\bar{v}_j(x,t) \qquad /10/$$

де $j=\overline{0,N}$, $(x,t)\in\mathcal{D}$.

Для існування та єдиності розв"язку вищезгаданих задач потрібне виконання умов 2,3,5 вищенаведеної теореми.

Ми побудували розв"язок задачі /1/-/3/ у вигляді скінченних сум рядів /7/:

$$\bar{u}^N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\bar{u}_j(x,t),\quad \bar{v}^N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\bar{v}_j(x,t), \qquad /11/$$

але даний розв"язок /11/ "не зобов"язаний" задовольняти умови /4/, /5/, тому потрібно побудувати функції, які б могли підправити дані умови у сукупності з регулярною частиною розв"язків /11/.

Побудова функцій примежових шарів. У нашій задачі виникає два примежових шари, при $x=0$ і $x=\ell$. Для побудови цих функцій зробимо відповідні заміни: при $x=0$ – $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$, при $x=\ell$ – $\eta=\frac{\ell-x}{\varepsilon}$. Розглядатимемо лише примежовий шар для $x=0$; для $x=\ell$ все робимо аналогічно.

Запишемо задачу для функцій примежового шару при $x=0$, зробивши заміну $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$:

$$\begin{cases}(\Pi u^N)_t-(\Pi u^N)_{\xi\xi}+a_{11}(\varepsilon\xi)\Pi u^N+a_{12}(\varepsilon\xi)\Pi v^N=0; & /12/\\ (\Pi v^N)_t \qquad\qquad +a_{21}(\varepsilon\xi)\Pi u^N+a_{22}(\varepsilon\xi)\Pi v^N=0; & /13/\end{cases}$$
$$(\xi,t)\in\mathcal{D}'=\{(\eta,\tau):0<\eta<\infty,\ \tau\in\mathbb{R}\},$$

з умовами періодичності по t:

$$\Pi u^N(\xi,t+2\pi,\varepsilon)=\Pi u^N(\xi,t,\varepsilon),\ \Pi v^N(\xi,t+2\pi,\varepsilon)=\Pi v^N(\xi,t,\varepsilon), \qquad /14/$$

з крайовою умовою при $\xi=0$ та з крайовою умовою при $\xi\longrightarrow\infty$:

$$\Pi u^N(0,t,\varepsilon)=\varphi(t,\varepsilon)-\bar{u}^N(0,t); \qquad /15/$$

$$\Pi u^N(\xi,t,\varepsilon)\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0, \qquad /16/$$

причому в умові /16/ прямування до нуля експоненціальне. Розв"язок задачі /12/-/15/ шукаємо у вигляді

$$\Pi u^N(\xi,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\Pi u_j(\xi,t),\ \Pi v^N(\xi,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\Pi v_j(\xi,t).$$

Розклавши функції $\varphi(t,\varepsilon)$, $a_{k,l}(\varepsilon\xi), k,l=1,2$ в ряди Тейлора за степенями ε, підставимо розвинення в задачу /12/-/15/, згрупуємо коефіціенти при однакових степенях ε і одержимо задачу для $\Pi u_j, \Pi v_j$, $j=\overline{0,N}$:

$$\begin{cases}(\Pi u_j)_t-(\Pi u_j)_{\xi\xi}+a_{11}(0)\Pi u_j+a_{12}(0)\Pi v_j=G_j^1(\xi,t)\\ (\Pi v_j)_t \qquad\qquad +a_{21}(0)\Pi u_j+a_{22}(0)\Pi v_j=G_j^2(\xi,t)\end{cases} (\xi,t)\in\mathcal{D}'; \qquad /17/$$

$$\Pi u_j(\xi,t+2\pi)=\Pi u_j(\xi,t),\quad \Pi v_j(\xi,t+2\pi)=\Pi v_j(\xi,t); \qquad /18/$$

$$\Pi u_j(0,t)=\frac{1}{j!}\,\frac{\partial^j}{\partial\varepsilon^j}\,\varphi(t,0)-\bar u_j(0,t); \qquad /19/$$

$$\Pi u_j(\xi,t)\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0, \qquad /20/$$

причому в умові /20/ повинна бути експоненціальна збіжність до нуля при $\xi\to\infty$.

Тут

$$G_j^k(\xi,t)=-\sum_{s=0}^{j-1}\frac{\xi^{j-s}}{(j-s)!}\left(\Pi u_s\,\frac{d^{j-s}}{dx^{j-s}}\,a_{k1}(0)+\Pi v_s\,\frac{d^{j-s}}{dx^{j-s}}\,a_{k2}(0)\right), \qquad /21/$$

де $k=\overline{1,2}$, $j=\overline{0,N}$. Єдиність задачі /16/–/20/ можна показати в просторі $L_2(\mathcal{D}')$, де $\mathcal{D}'=(0;\infty)\times(0;2\pi)$. Розв"язок задачі /16/–/20/ знаходимо у вигляді ряду Фур"є:

$$\Pi u_j(\xi,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ikt}\,\Pi u_j^k(\xi),\quad \Pi v_j(\xi,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{ikt}\,\Pi v_j^k(\xi). \qquad /22/$$

Оскільки функції $G_j^1(\xi,t)$, $G_j^2(\xi,t)$, 2π-періодичні, можемо їх розкласти в ряди Фур"є. Підставивши розклади функцій $G_j^1(\xi,t)$, $G_j^2(\xi,t)$ в ряди Фур"є по t і /22/ в задачу /16/–/20/, можна одержати задачу для $\Pi u_j^k(\xi)$:

$$(\Pi u_j^k)_{\xi\xi}-\mu_k(0)\Pi u_j^k=F_j^k(\xi), \qquad \xi\in(0,\infty),\ k\in\mathbb{Z},\ j=\overline{0,N}; \qquad /23/$$

$$\Pi u_j^k(0)=\frac{1}{j!}\,\frac{\partial^j}{\partial\varepsilon^j}\,\varphi^k(0)-\bar u_j^k(0); \qquad /24/$$

$$\Pi u_j^k(\xi)\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0, \qquad /25/$$

де

$$F_j^k(\xi)=G_j^{1,k}(\xi)-G_j^{2,k}(\xi)\,\frac{a_{12}(0)}{a_{22}(0)+ik}; \qquad /26/$$

$$\mu_k(0)=a_{11}(0)+ik-\frac{a_{12}(0)\,a_{21}(0)}{a_{22}(0)+ik}. \qquad /27/$$

Розв"язок цієї задачі можна записати за допомогою функції Гріна. Аналогічно визначаємо існування та експоненціальну поведінку розв"язку задачі /16/-/20/ при $\xi \to \infty$ і відповідно до /12/-/16/.

Те саме стосується функції примежового шару при $x = l$: $Qu^N(\eta,t,\varepsilon), Qv^N(\eta,t,\varepsilon)$. Вона існує, є єдиною, зображається у вигляді

$$Qu^N(\eta,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j Qu_j(\eta,t), \qquad Qv^N(\eta,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j Qv_j(\eta,t) \qquad /28/$$

і має порядок при $\eta\to\infty$: $e^{-\delta\eta}$, де $\eta>0$.

Отже, ми знайшли певне наближення у вигляді степеневого ряду:

$$U^N=\bar u^N(x,t,\varepsilon)+\Pi u^N(\xi,t,\varepsilon)+Qu^N(\eta,t,\varepsilon); \qquad /29/$$

$$V^N=\bar v^N(x,t,\varepsilon)+\Pi v^N(\xi,t,\varepsilon)+Qv^N(\eta,t,\varepsilon). \qquad /30/$$

Для того щоб це було наближення розв"язку задачі /1/-/5/ до порядку ε^N, знайдена оцінка залишкового члена /різниця між розв"язком задачі /1/-/5/ і наближенням /29/-/30/. Вона випливає з оцінки /6/.

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с. 2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром //Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3-122. 3. Треногин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика //Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. № 4. С. 121-156.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.94