УДК 517.956

Г.П.Лопушанська, О.О.Криницька, І.О.Цімарно

ПРО ОДНУ НЕКЛАСИЧНУ ЗАДАЧУ СПРЯЖЕННЯ

В області $\Omega=\{(x,t): x\in(h_1;0)\cup(0;h_2),\ t>0\}$ для рівняння

$$u_t-(a(x)u_x)_x=f(x,t), \qquad /1/$$

де $a(x)=\begin{cases}a_1^2, & x\in(h_1;0),\\ a_2^2, & x\in(0;h_2),\end{cases}$ $f\in\mathcal{E}'(\Omega)$, $u(x,t)=\begin{cases}u^1(x,t), & x\in(h_1;0),\\ u^2(x,t), & x\in(0;h_2),\ t>0,\end{cases}$

розглядаємо задачу: знайти розв"язок $u(x,t)$ рівняння /1/ в Ω та невідомі узагальнені функції $p_1(t)$, $q_1(t)$ при умовах

$$u|_{t=0}=0,\ x\in(h_1;0)\cup(0;h_2),$$

$$u^1|_{x=h_1}=p_1(t),\ u^1_x|_{x=h_1}=q_1(t),\ u^2|_{x=h_2}=p_2(t), \qquad /2/$$

$$u^2_x|_{x=h_2}=q_2(t),\ (u^1-u^2)|_{x=0}=\mu(t),\ (a_1^2u^1_x-a_2^2u^2_x)|_{x=0}=\nu(t).$$

Нехай $\mathcal{D}_0(R_+)=\{\varphi(t)\in C^\infty(R_+):\varphi^{(k)}(t)\underset{t\to 0+}{\Longrightarrow}0,\ k=0,1,\dots\}$, $\mathcal{D}_0'(R_+)$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}_0(R_+)$. Вважаємо, що $p_2(t),\ q_2(t),\ \mu(t),\ \nu(t)\in\mathcal{D}_0'(R_+)$.

Розв"язком задачі /1/-/2/ називаємо узагальнені функції $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$, $p_1, q_1\in\mathcal{D}_0'(R_+)$ такі, що $\tilde u=\begin{cases}u(x,t), & (x,t)\in\Omega\\ 0, & (x,t)\overline{\in}\Omega\end{cases}$ задовольняє у $\mathcal{D}'(R^2)$ рівняння

$$\tilde u_t-(a(x)\tilde u_x)_x=F(x,t), \qquad /3/$$

де

$$F=\mu(t)\cdot\delta'(x)+\nu(t)\cdot\delta(x)-a_1^2p_1(t)\cdot\delta'(x-h_1)-$$
$$-a_1^2q_1(t)\cdot\delta(x-h_1)+a_1^2p_2(t)\cdot\delta'(x-h_2)+$$
$$+a_2^2q_2(t)\cdot\delta(x-h_2)+\tilde f(x,t).$$

Використовуючи перетворення Лапласа за змінною t, будуємо фундаментальну функцію оператора /1/, тобто таку узагальнену функцію $\omega(x,t;\xi,\tau)$, яка у $\mathcal{D}'(R^2)$ задовольняє рівняння

$$\omega_t-((\theta(-x)a_1^2+\theta(x)a_2^2)\omega_x)_x=\delta(x-\xi,t-\tau). \qquad /4/$$

Після перетворення Лапласа $L_t[\omega(x,t;\xi,\tau)] = \hat{\omega}(x,p;\xi,\tau)$ переходять у звичайне диференціальне рівняння:

$$p\hat{\omega} - ((\theta(-x)a_1^2 + \theta(x)a_2^2)\hat{\omega}_x)_x = \delta(x-\xi)e^{-p\tau}$$

з параметрами ρ, ξ, τ . Відомим способом [1,3], вимагаючи додатково, щоб $\hat{\omega}|_{x=0-} - \hat{\omega}|_{x=0+} = 0$, $a_1^2\hat{\omega}_x|_{x=0-} - a_2^2\hat{\omega}_x|_{x=0+} = 0$, знаходимо

$$\hat{\omega}(x,\rho;\xi,\tau) =$$

$$= \frac{e^{-\rho\tau}}{2a_1\sqrt{\rho}}\left\{\theta(-x)\theta(-\xi)\left[e^{-\sqrt{\rho}\frac{|x-\xi|}{a_1}} - \frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}e^{\sqrt{\rho}\frac{(x+\xi)}{a_1}}\right] + \right.$$

$$+ \theta(-x)\theta(\xi)\frac{2a_1}{a_2+a_1}e^{\frac{\sqrt{\rho}x}{a_1} - \frac{\sqrt{\rho}\xi}{a_2}} + \theta(x)\theta(-\xi)\frac{2a_1}{a_2+a_1}e^{-\frac{\sqrt{\rho}x}{a_2} + \frac{\sqrt{\rho}\xi}{a_1}} +$$

$$\left. + \theta(x)\theta(\xi)\frac{a_1}{a_2}\left[e^{\frac{-\sqrt{\rho}|x-\xi|}{a_2}} + \frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}e^{\frac{-\sqrt{\rho}(x+\xi)}{a_2}}\right]\right\},$$

$$\omega(x,t;\xi,\tau) =$$

$$= \frac{\theta(t-\tau)}{2a_1\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left\{\theta(-x)\theta(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1^2(t-\tau)}} - \frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_1^2(t-\tau)}}\right] + \right.$$

$$+ \frac{2a_1}{a_2+a_1}\left[\theta(-x)\theta(\xi)e^{-\left(\frac{x}{a_1}-\frac{\xi}{a_2}\right)^2\frac{1}{4(t-\tau)}} + \theta(x)\theta(-\xi)e^{-\left(\frac{x}{a^2}-\frac{\xi}{a_1}\right)^2\frac{1}{4(t-\tau)}}\right] +$$

$$\left. + \frac{a_1}{a_2}\theta(x)\theta(\xi)\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2^2(t-\tau)}} + \frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_2^2(t-\tau)}}\right]\right\}.$$

Знайдена $\omega(x,t;\xi,t)$ є нормальною фундаментальною функцією оператора /1/, тому, згідно з [2], існує єдиний розв"язок:

$$\tilde{u}(x,t) = \omega(x,t;\xi,\tau) \circledast F(\xi,\tau) \qquad /5/$$

рівняння /3/. Тут $\circledast$ позначає операцію композиції узагальнених функцій [2]. Невідомі узагальнені функції $p_1(t), q_1(t)$, які входять у вираз для $F(\xi,\tau)$, знаходимо з умови

$$\tilde{u}(x,t)=0, \quad x<h_1, \quad x>h_2, \qquad /6/$$

яка, враховуючи однозначну розв"язність задач

$$u_t^1-a_1^2u_{xx}^1=0, \quad x<h_1, \ t>0, \ u^1|_{t=0_+}=u^1|_{x=h_1-}=0,$$

$$u_t^2-a_2^2u_{xx}^2=0, \quad x>h_2, \ t>0, \ u^2|_{t=0_+}=u^2|_{x=h_{2+}}=0,$$

рівносильна тому, що

$$\lim_{\substack{x\to h_1-0\\ \varepsilon\to 0}}\int_\varepsilon^\infty (F(y,\tau),\omega(x,t;y,\tau))\varphi_1(t)dt=0, \qquad /7/$$

$$\lim_{\substack{x\to h_2+0\\ \varepsilon\to 0}}\int_\varepsilon^\infty (F(y,\tau),\omega(x,t;y,\tau))\varphi_2(t)dt=0. \qquad /8/$$

$$\forall \varphi_1(t),\varphi_2(t)\in \overset{0}{\mathcal{D}}(R_+),$$

$$\lim_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}(F(y,\tau),\omega(x,t;y,\tau))\varphi(x)dx=0, \qquad /9/$$

$$\forall\varphi(x)\in\mathcal{D}(-\infty;+\infty),\ supp\,\varphi\subset\{x<h_1\}\cup\{x>h_2\}.$$

Тут через (F,φ) позначаємо дію узагальненої функції F на основну функцію φ.

Зауважимо, що /9/ виконується на підставі властивості фундаментальної функції $\lim\limits_{t\to 0+}\int_{-\infty}^{\infty}\omega(x,t;y,\tau)\varphi(x)dx=\varphi(y)$ і того, що $supp\,F\cap supp\,\varphi=\emptyset$, бо тоді, використовуючи аналог теореми Фубіні, запишемо /9/ як

$$(F,\lim_{t\to 0+}\int\omega(x,t;y,\tau)\varphi(x)dx)=(F,\varphi)=0.$$

Доведемо, що умови /7/ та /8/ дають змогу однозначно визначити $p_1(t),q_1(t)\in\overset{0}{\mathcal{D}}{}'(R_+)$. Припустивши, що є по дві узагальнені функції $p_1(t)$ та $\tilde{p}_1(t)$, $q_1(t)$ та $\tilde{q}_1(t)$ матимемо $\tilde{u}_1(x,t)-\tilde{u}_2(x,t)=$ $=\omega(x,t;y,\tau)\circledast F_1(y,\tau)$, де $F_1=-a_1^2z_1(\tau)\cdot\delta'(y-h_1)-a_2^2z_2(\tau)\delta(y-h_2)$, $z_1(\tau)=$ $=p_1(\tau)-\tilde{p}_1(\tau)$, $z_2(\tau)=q_1(\tau)-\tilde{q}_1(\tau)$.

Тепер із умови /7/ при $F=F_1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\tau^\infty[(z_1(\tau),\omega'_y(h_1-\varepsilon,t;h_1,\tau))+(z_2(\tau),\omega(h_1-\varepsilon,t;h_1,\tau))]\varphi_1(t)dt= \qquad /10/$$

$$=0\ \forall\varphi_1(t)\in\overset{0}{\mathcal{D}}(R_+).$$

Перетворимо ліву частину рівності:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\big(z_1(\tau), \int\limits_\tau \omega_y(h_1-\varepsilon, t; h_1, \tau)\varphi_1(t)\,dt\big)+$$

$$+\big(z_2(\tau), \int\limits_\tau^\infty \omega(h_1-\varepsilon, t; h_1, \tau)\varphi_1(t)\,dt\big)\Big\} =$$

$$= \big(z_1(\tau), \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\tau^\infty \omega(h_1-\varepsilon, t; h_1, \tau)\varphi_1(t)\,dt\big)+$$

$$+\big(z_2(\tau), \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\tau^\infty \omega(h_1-\varepsilon, t; h_1, \tau)\varphi_1(t)\,dt\big)=$$

$$= \big(z_1(\tau), -\frac{1}{2a_1^2}\varphi_1(\tau)+\int\limits_\tau^\infty \omega'_y(h_1, t; h_1, \tau)\varphi_1(t)\,dt\big)+$$

$$+\big(z_2(\tau), \int\limits_\tau^\infty \omega(h_1, t; h_1, \tau)\,\varphi_1(t)\,dt\big).$$

Унаслідок аналогічних перетворень із /8/ одержуємо

$$\big(z_1(\tau), \int\limits_\tau^\infty \omega_y(h_2, t; h_1, \tau)\varphi_2(t)\,dt\big)+\big(z_2(\tau), \int\limits_\tau^\infty \omega(h_2, t; h_1, \tau)\varphi_2(t)\,dt\big)=0 \quad \forall\, \varphi_2(t)\in \underset{0}{\mathcal{D}}(R_+). \qquad /11/$$

Додаючи /10/ та /11/, маємо

$$\big(z_1(\tau), -\frac{1}{2a_1^2}\varphi_1(\tau)+\int\limits_\tau^\infty \omega_y(h_1, t; h_1\tau)\varphi_1(t)\,dt+\int\limits_\tau^\infty \omega_y(h_2, t; h_1, \tau)\varphi_2(t)\,dt\big)+ \qquad /12/$$

$$+\big(z_2(\tau), \int\limits_\tau^\infty \omega(h_1, t; h_1, \tau)\varphi_1(t)\,dt+\int\limits_\tau^\infty \omega(h_2, t; h_1, \tau)\varphi_2(t)\,dt\big)=0 \quad \forall\, \varphi_1, \varphi_2\in \underset{c}{\mathcal{D}}(R_+).$$

Система інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2a_1^2}\varphi_1(\tau)+\int\limits_\tau^\infty \omega_y(h_1, t; h_1, \tau)\varphi_1(t)\,dt+\int\limits_\tau^\infty \omega_y(h_2, t; h_1, \tau)\varphi_2(t)\,dt &= \psi_1(\tau),\\
\int\limits_\tau^\infty \omega(h_1, t; h_1, \tau)\varphi_1(t)\,dt+\int\limits_\tau^\infty \omega(h_2, t; h_1, \tau)\,\varphi_2(t)\,dt &= \psi_2(\tau)
\end{aligned} \qquad /13/$$

має єдиний розв"язок $\varphi_1(t), \varphi_2(t)\in \underset{c}{\mathcal{D}}(R_+)$ при довільних $\psi_1, \psi_2 \in \underset{0}{\mathcal{D}}(R_+)$, оскільки спряжена до неї система інтегральних рівнянь

$$\begin{cases}
-\frac{1}{2a_1^2}K_1(t)+\omega_y(h_1, t; h_1, 0)*K_1(t)+\omega_y(h_2, t; h_1, 0)*K_2(t)=\Psi_1(t)\\
\omega(h_1, t; h_1, 0)*K_1(t)+\omega(h_2, t; h_1, 0)*K_2(t)=\Psi_2(t)
\end{cases}$$

після перетворення Лапласа дає алгебричну систему

$$\begin{cases}
-\frac{1}{2a_1^2}\hat{K}_1(p)+\hat{\omega}_y(h_1, p; h_1, 0)\cdot\hat{K}_1(p)+\hat{\omega}(h_2, p; h_1, 0)\cdot\hat{K}_2(p)=\hat{\Psi}_1(p)\\
\hat{\omega}(h_1, p; h_1, 0)\cdot\hat{K}_1(p)+\hat{\omega}(h_2, p; h_1, 0)\cdot\hat{K}_2(p)=\hat{\Psi}_2(p)
\end{cases}$$

з визначником $\Delta = \frac{1}{2(a_1+a_2)}\, e^{-\sqrt{p}\left(\frac{h_2}{a_2}+\frac{|h_1|}{a_1}\right)} \neq 0.$

Тому із /12/ знаходимо $z_1(\tau) = z_2(\tau) = 0$ у $\overset{\circ}{\mathcal{D}}'(R_+)$, а отже, $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$.

<u>Теорема</u>. Нехай $f(x,t) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mu, \nu, p_2, q_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}'(R_+)$. Існує єдиний розв"язок (u, p_1, q_1) задачі /1/-/2/: узагальнені функції $p_1(t), q_1(t) \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}'(R_+)$ визначаються формулою

$$-(a_1^2 p_1(\tau), \psi_1(\tau)) + (a_1^2 q_1(\tau), \psi_2(\tau)) =$$

$$= (-\mu(\tau), \int_\tau^\infty \omega_y(h_1, t; 0, \tau)\varphi_1(t)\,dt + \int_\tau^\infty \omega_y(h_2, t; 0, \tau)\varphi_2(t)\,dt) +$$

$$+ (\nu(\tau), \int_\tau^\infty \omega(h_1, t; 0, \tau)\varphi_1(t)\,dt + \int_\tau^\infty \omega(h_2, t; 0, \tau)\varphi_2(t)\,dt) -$$

$$-(a_2^2 p_2(\tau), \int_\tau^\infty \omega_y(h_1, t; h_2, \tau)\varphi_1(t)\,dt + \int_\tau^\infty \omega_y(h_2, t; h_1, \tau)\varphi_2(t)\,dt + \frac{1}{2a_2^2}\varphi_2(\tau)) +$$

$$+ (a_2^2 q_2(\tau), \int_\tau^\infty \omega(h_1, t; h_2, \tau)\varphi_1(t)\,dt + \int_\tau^\infty \omega(h_2, t; h_2, \tau)\varphi_2(t)\,dt) +$$

$$+ (f(y,\tau), \int_\tau^\infty \omega(h_1, t; y, \tau)\varphi_1(t)\,dt + \int_\tau^\infty \omega(h_2, t; y, \tau)\varphi_2(t)\,dt),$$

де ψ_1, ψ_2 – довільні функції із $\overset{\circ}{\mathcal{D}}(R_+)$; φ_1, φ_2 – розв"язок системи інтегральних рівнянь /13/, а $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$ в Ω і має вигляд /3/. При $f(x,t) \equiv 0$, $\mu, \nu, p_2, q_2 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(R_+)$, $\hat{\mu}(p), \hat{\nu}(p) = O(e^{-b\sqrt{p}})$, $\hat{p}_2(p)\hat{q}_2(p) = O(e^{-c\sqrt{p}})$, $p \to \infty$, $b > \frac{|h_1|}{a_1}$, $c > \frac{|h_1|}{a_1} + \frac{h_2}{a_2}$.

Існує єдиний розв"язок задачі $u \in C^\infty(\Omega)$, $p_1, q_1 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}(R_+)$, який можна записати в явному вигляді.

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512 с. 2. Лопушанська Г.П. Про один підхід до вивчення крайових задач у просторах розподілів і граничні інтегральні рівняння //Укр.матем. журн. 1991. Т. 43. № 5. С.632-639. 3. Стасюк М., Тацій Р. Структура фундаментальної системи розв"язків диференціального узагальненого квазістаціонарного рівняння 2-го порядку //Диференц. рівняння. 1984. Вип. 182. С. 97-99.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.94