УДК 517.95

В.А.Козицький

ОБЕРНЕНА КОЕФІЦІЄНТНА ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ВОЛОГОПЕРЕНЕСЕННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу визначення пари функцій $(u(x,t),\eta(u)) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)\times C^1(R)$, які задовольняють умови:

$$u_{xxt} - K u_t + (\eta(u)u_x)_x = 0, \quad (x,t)\in Q_T = (0,H)\times(0,T); \qquad /1/$$

$$(u_{xt} + \eta(u)u_x)_{x=0} = -\varphi(t), \qquad t\in[0,T]; \qquad /2/$$

$$u_x(H,t) = 0, \qquad t\in[0,T]; \qquad /3/$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x\in[0,H]; \qquad /4/$$

$$u(x_0,t) = \beta(t), \qquad t\in[0,T], \qquad /5/$$

де x_0 – довільна фіксована точка із $(0,H)$.
Зробимо припущення: $K = const > 0$, $u_0(x)\in C^2[0,H]$, $\varphi(t)\in C^1[0,T]$, $u_0'(H)=0$, $\beta(t)\in C^1(0,T]$, $u_0(x_0)=\beta(0)$, $\eta(\xi)\in C^1(R)$.

Наближений розв"язок оберненої задачі /1/-/5/ будемо шукати шляхом мінімізації функціоналу нев"язки:

$$I(\eta) = \int_0^T [U(x_0,t) - \beta(t)]^2 dt, \qquad /6/$$

де $U(x,t)$ розв"язок прямої задачі /1/-/4/. Для розв"язання оберненої задачі в екстремальній постановці /1/-/4/, /6/ використаємо градієнтний метод оптимізації [2], що потребує, в свою чергу, розв"язання проблеми знаходження градієнта функціоналу $I(\eta)$. Для отримання $\nabla I(\eta)$ скористаємось функціоналом Лагранжа:

$$G(\eta) = I(\eta) + \int_0^T\int_0^H \psi(x,t)[U_{xxt} - KU_t + (\eta(u)U_x)_x]\,dx\,dt, \qquad /7/$$

який дає змогу перейти від задачі умовної мінімізації /1/-/4/, /6/ до задачі безумовної мінімізації. У /7/ $\psi(x,t)$ – множник Лагранжа.

Нехай δG і δu –прирости G і u, які відповідають приросту $\delta\eta$. Відкинувши члени другого порядку мализни і застосувавши формулу інтегрування частинами, отримаємо для приросту δG

$$\delta G = \int_0^H \int_0^T \Big[-\psi_{xxt} + K\psi_t + (\eta(u)\psi_x)_x + 2(u(x_0,t) -$$
$$- \beta(t))\delta(x - x_0)\Big]\delta u \delta x\, dt + \int_0^T \int_0^H \psi_x u_x \delta\eta\, dx\, dt -$$
$$- \int_0^T \Big[\psi\Big(\eta \frac{\partial}{\partial x}(\delta u) + \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}\Big)\Big]_0^H dt + \int_0^T (\eta\psi_x - \psi_{xt}) \times$$
$$\times\, \delta u\big|_{x=H}\, dt + \int_a^H \psi(x,t)\,\delta u\big|_0^T dx,$$
де δx – δ-функція.

Прирівнявши до нуля вирази при δu і взявши до уваги

$$\delta u(x,0) = 0, \quad x \in [0,H], \quad \frac{\partial}{\partial x}(\delta u(H,t)) = 0, \quad t \in [0,T],$$
$$\Big(\eta(u)\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t}\Big)_{x=0} = 0, \quad t \in [0,T],$$

матимемо

$$\delta G(\eta) = \int_0^H \int_0^T \psi_x u_x \delta\eta\, dx\, dt, \qquad /8/$$

де $u(x,t)$ – розв"язок задачі /1/–/4/: $\psi(x,t)$ – розв"язок спряженої задачі:

$$\psi_{xxt} - K\psi_t - (\eta(u)\psi_x)_x = 2(u(x_0,t) - \beta(t))\,\delta(x - x_0); \qquad /9/$$

$$\psi_x(0,t) = 0, \; (\psi_{xt} - \eta(u)\psi_x)_{x=H} = 0, \quad t \in [0,T]; \qquad /10/$$

$$\psi(x,t) = 0, \quad x \in [0,H]. \qquad /11/$$

Для розв"язання коефіцієнтної оберненої задачі для нелінійного рівняння найчастіше використовують параметричну ідентифікацію [1].

Апроксимацію функції $\eta(u)$ запишемо у вигляді

$$\eta(u) = \sum_{s=1}^{M} \eta_s \gamma_s(u), \qquad /12/$$

де $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_M)$ – набір деяких базисних функцій: $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_M)$ – вектор із невідомих компонент.

На практиці за базисні функції переважно беруть кубічні B-сплайни.

Нехай

$$y_0 = \max_{(x,t)\in \bar{Q}_T} u(x,t), \qquad y_1 = \max_{(x,t)\in \bar{Q}_T} u(x,t).$$

Область визначення $\eta(u) \in [y_0, y_1]$. Розглянемо рівномірну сітку

$$W=\{y_0+\Delta y\overset{\circ}{J},\ \overset{\circ}{J}=-2,-1,0,1,\ldots,M+3,\ \Delta y=\frac{y_1-y_0}{M}\}$$
і задамо функцію

$$B_0(\bar u)=\frac{1}{6\Delta y^3}\Big[(\bar u+2\Delta y)_+^3-4(\bar u+\Delta y)_+^3+6(\bar u)_+^3-$$

$$-4(\bar u-\Delta y)_+^3+(\bar u-2\Delta y)_+^3\Big],$$

де $\bar u=u-y_0$; $(a)_+=max\{a,0\}$.

Зауважимо, що $B_0(\bar u)$ має властивість

$$B_0(\bar u)=\begin{cases}>0, & |\bar u|<2\Delta y,\\ =0 & |\bar u|\geq 2\Delta y,\end{cases}$$

яка дає змогу істотно спростити числову реалізацію задачі.

У /12/ за базисні функції $\gamma_s(u)$ візьмемо кубічні B-сплайни:

$$\gamma_1(u)=2B_0(\bar u+\Delta y)+B_0(\bar u),$$

$$\gamma_2(u)=-B_0(\bar u+\Delta y)+B_0(\bar u),$$

$$\gamma_s(u)=B_0(\bar u-s\Delta y),\quad s=\overline{3,M}-2$$

$$\gamma_{M-1}(u)=B_0(\bar u-(M-3)\Delta y)-B_0(\bar u-(M-1)\Delta y),$$

$$\gamma_M(u)=B_0(\bar u-(M-2)\Delta y)+2B_0(\bar u-(M-1)\Delta y),$$

де $M=m+1$.

Градієнтом функції $I(\eta_1,\ldots,\eta_M)$ від M змінних буде вектор із компонент:

$$\frac{\partial I}{\partial\eta_s}=\int_0^T\int_0^H\psi_x\,u_x\,\eta_s(u)\,dx\,dt,\quad s=\overline{1,M}. \qquad /13/$$

де $u(x,t)$ – розв"язок задачі /1/–/4/; $\psi(x,t)$ – розв"язок спряженої задачі /9/–/11/. Таким чином, для знаходження градієнта функціоналу $J(\eta)$ потрібно спочатку розв"язати пряму, потім спряжену задачі і скористатись формулами /12/, /13/.

Ітераційний процес градієнтного методу організовують стандартним методом [1,2], наприклад, методом найшвидшого спуску. В цьому випадку ітераційний процес для знаходження вектора параметрів $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_M)$ будуємо за формулою

$$\eta^{n+1}=\eta^n-\alpha_n J'(\eta^n), \qquad /14/$$

де
$$\alpha_n = \min_{\alpha \geq 0} I(\eta^n - \alpha I'(\eta^n)).$$

Пряму нелінійну задачу /I/-/4/ можна розв"язати методом сіток. У прямокутнику $\{(x,t): 0 \leq x \leq H,\ \ 0 \leq t \leq T\}$ будуємо сітку $x_i = ih,\ t_j = j\tau,\ \ H = nh,\ T = p\tau.$ Уводимо позначення $u(ih, j\tau) = \vartheta_i,\ u(ih,(j+1)\tau) = u_i$. Апроксимуючи похідні скінченно різницевими співвідношеннями, отримуємо схему, яка на j по t шарі характеризується системою алгебричних рівнянь:

$$\frac{1}{h}\eta(\vartheta_0)(u_1 - u_0) + \frac{1}{\tau h}(u_1 - u_0 - \vartheta_1 + \vartheta_0) = -\varphi^j.$$

$$K\frac{u_i - \vartheta_i}{h} = \frac{1}{h^2}\Big[(\eta(\vartheta_{i-1}) - \frac{1}{\tau})\vartheta_{i-1} - (\eta(\vartheta_{i-1}) + \eta(\vartheta_i) - \frac{2}{\tau})\vartheta_i +$$

$$+ (\eta(\vartheta_i) - \frac{1}{\tau})\vartheta_{i+1}\Big] + \frac{1}{\tau h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \qquad /I5/$$

$$u_n = u_{n-1}.$$

де $\varphi^j = \varphi(j\tau)$.

Систему /I5/ можна розв"язати методом прогонки, якщо врахувати, що при $j = 0$; усі ϑ_i відомі з умови /4/. Запишемо рекурентні формули:

$$u_i = \varepsilon_i u_{i+1} + \theta_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad /I6/$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \theta = \frac{K\varphi^j \tau h - (\vartheta_1 - \vartheta_0)}{\eta(\vartheta_0) + 1},$$

$$\varepsilon_i = [2 + kh^2 - \varepsilon_{i-1}]^{-1}, \quad \theta_i = \frac{\theta_{i-1} + k\tilde{\vartheta}_i}{2 + kh^2 - \varepsilon_i - k},$$

$$\tilde{\vartheta}_i = h^2\vartheta_1 + \frac{\tau}{k}\Big[(\eta(\vartheta_{i-1}) - \frac{1}{\tau})\vartheta_{i-1} - (\eta(\vartheta_{i-1}) +$$

$$+ \eta(\vartheta_i) - \frac{2}{\tau})\vartheta_i + (\eta(\vartheta_i) - \frac{1}{\tau})\vartheta_{i+1}\Big], \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Із урахуванням умови $u_n = u_{n-1}$ та формули /I6/ у процесі зворотної прогонки знаходимо u_i. Замінюючи потім значення ϑ_i знайденим значенням u_i на наступному по t шарі /у початковий момент $\vartheta_i = \vartheta(ih)$). Для практичного знаходження $\psi(x,t)$ спряжену задачу /9/-/II/ перепишемо у такому вигляді:

$$\psi_{xxt} - K\psi_t - \frac{\partial}{\partial x}(\eta(u)\psi_x) = 0, \quad (x,t) \in Q_T; \qquad /17/$$

$$\psi_x = (0,t), \quad x \in [0,H]; \qquad /18/$$

$$\psi_x(0,t) = 0, \quad (\psi_{xt} - \eta(u)\psi_x)_{x=H} = 0, \quad t \in [0,T]; \qquad /19/$$

$$[\psi(x,t)]_{x_0} = 0, \quad [\psi_{xt} - \eta(u)\psi_x]_{x_0} = 2(g(t) - u(x_0,t)) \qquad /20/$$

де $[w]_{x_0}$ стрибок функції w у точці x_0.

Остання задача може бути розв"язана методом сіток.

Отже, для знаходження пари функцій $\{u(x,t), \eta(u)\}$ ітераційний процес слід будувати таким чином. Функцію $\eta(u)$ апроксимуємо у вигляді /12/. Задамо початкове наближення невідомих параметрів $(\eta_1, \dots, \eta_M)$ і розв"язуємо крайову задачу /1/-/4/. Потім знаходимо розв"язок спряженої задачі /17/-/20/ і на основі формули /13/ визначаємо складові градієнта функціоналу нев"язки /6/. Далі знаходимо нове наближення невідомих параметрів $(\eta_1, \dots, \eta_M)$ із формули /14/ і процес обчислень повторюємо. Ітераційний процес припиняємо за критерієм нев"язки.

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 289 с. 2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 545 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.94