УДК 517.946+511.2

Т.П.Гой

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Дослідженню задач з нелокальними крайовими умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь останнім часом приділяється велика увага [1,3,4,6], що зумовлене як проблемами загальної теорії граничних задач, так і конкретними задачами математичної фізики, які описують моделі різноманітних фізичних і технічних процесів /див. бібліографію в [6]/.

У даній статті досліджується задача з нелокальними умовами за змінною t та регулярними крайовими умовами за змінною x для одного диференціального рівняння із частинними похідними четвертого порядку. Ця задача є умовно коректною, а її розв"язність пов"язана з проблемою малих знаменників.

1. Розглянемо в області $\Omega=\{(t,x): t\in[0,T],\ x\in[0,\ell]\}$ задачу

$$L(u)\equiv\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial t^4}+\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}=f(t,x); \qquad /1/$$

$$M_q(u)\equiv\frac{\partial^q u}{\partial t^q}\Big|_{t=0}-\mu\frac{\partial^q u}{\partial t^q}\Big|_{t=T}=\varphi_q(x)\quad (q=\overline{0,3}); \qquad /2/$$

$$P_j(u)\equiv\sum_{m=0}^{3}\alpha_m^{(j)}\Big(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\Big)\Big|_{x=0}+\sum_{m=0}^{3}\beta_m^{(j)}\Big(\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\Big)\Big|_{x=\ell}=0\ (j=\overline{1,4}), \qquad /3/$$

де умови /3/ - регулярні; $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\alpha_m^{(j)},\beta_m^{(j)}\in\mathbb{R}$.

Спочатку дослідимо задачу на власні значення

$$X^{(IV)}(x)=\lambda^4X(x),\quad P_j(X(x))=0\quad (j=\overline{1,4}). \qquad /4/$$

Відомо [2], що при $k\to\infty$ власні значення $\lambda_k (k\in\mathbb{N})$ задачі /4/, множину яких позначимо через Λ, мають таку асимптотику:

$$|\lambda_k|=O(k). \qquad /5/$$

Власні функції $X_k(x)$ задачі /4/, що відповідають власним значенням λ_k, мають вигляд

$$X_k(x)=\sum_{s=1}^{4}a_s(\lambda_k)\exp(\lambda_k\psi_s x), \qquad /6/$$

де $\psi_s\ (s=\overline{1,4})$ - корені четвертого степеня з 1, а коефіцієнти $a_s(\lambda_k)(s=\overline{1,4})$ визначаються зі системи рівнянь

11-2241

$$\sum_{s=1}^{4}\sum_{m=0}^{3} a_s(\lambda_k)(\lambda_k\psi_s)^m(\alpha_m^{(j)}+\beta_m^{(j)}\exp(\lambda_k\psi_s l))=0 \quad (j=\overline{1,4}) \qquad /7/$$

Легко показати, що при $|\lambda_k|\longrightarrow\infty$ $|a_s(\lambda_k)|=O(1)$, а

$$X_k(x)=O(\exp(|Re\,\lambda_k|l)). \qquad /8/$$

Введемо функціональні простори, які використовуватимемо надалі: B_δ $(\delta>0)$ – банахів простір функцій $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x)$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi(x)\|_{B_\delta}=\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|\cdot\exp(\delta|\lambda_k|);$$

$C^n([0,T],B_\theta)$ – простір функцій $v(t,x)$ таких, що $\frac{\partial^j v}{\partial t^j}$ $(j=\overline{0,n})$ для кожного $t\in[0,T)$ належить простору B_θ і неперервна по t в нормі B_θ :

$$\|v(t,x)\|_{C^n([0,T],B_\theta)}=\sum_{p=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^p v}{\partial t^p}\right\|_{B_\theta}.$$

Припустимо, що $\varphi_q(x)\in B_\gamma$ $(q=\overline{0,3})$ і $f(t,x)\in C([0,T],B_\alpha)$, де γ,α – деякі додатні числа.

Розв"язок задачі /1/-/3/ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x). \qquad /9/$$

Кожна з функцій $u_k(t)(k\in N)$ визначається як розв"язок задачі

$$L_k(u_k)\equiv u_k^{(IV)}(t)+\lambda_k^4 u_k(t)=f_k(t); \qquad /10/$$

$$M_{qk}(u_k)\equiv\left.\frac{d^q u_k(t)}{dt^q}\right|_{t=0}-\mu\left.\frac{d^q u_k(t)}{dt^q}\right|_{t=T}=\varphi_{qk}\ (q=\overline{0,3}) \qquad /11/$$

де $f_k(x)=\int_0^l f(t,x)X_k(x)dx$, $\varphi_{qk}=\int_0^l\varphi_k(x)X_k(x)dx$ $(q=\overline{0,3})$.

Для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ однорідне рівняння

$$L_k(u_k)=0 \qquad /10'/$$

має фундаментальну систему розв"язків: $u_{kp}=\exp(\lambda_k\omega_p t)$, де ω_p $(p=\overline{1,4})$ –корені четвертого степеня з /-1/, а розв"язок рівняння /10'/, що задовольняє умови

$$M_{qk}(u_k)=0 \qquad (q=\overline{0,3}), \qquad /11'/$$

має вигляд

$$u_k(t)=\sum_{p=1}^{4}b_p(\lambda_k)\exp(\lambda_k\omega_p t). \qquad /12/$$

Сталі $b_p(\lambda_k)(p=\overline{1,4})$ визначаються зі системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{p=1}^{4} b_p(\lambda_k)(\lambda_k\omega_p)^q(1-\mu\exp(\lambda_k\omega_p T))=0 \qquad (q=\overline{0,3}), \qquad /13/$$

визначник якої

$$\Delta(\lambda_k)=16i\lambda_k^6\prod_{p=1}^{4}(1-\mu\exp(\lambda_k\omega_p T)). \qquad /14/$$

Теорема 1. Для єдиності розв"язку задачі /1/-/3/ в просторі $C^4(\Omega)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$|1-\mu\exp(\lambda_k\omega_p T)|\neq 0 \qquad (p=\overline{1,4},\ \lambda_k\in\Lambda). \qquad /15/$$

Доведення здійснюємо за схемою доведення теореми 5.3 у праці [6, розд. 2].

2. Розглянемо питання про існування розв"язку задачі /1/-/3/. Розв"язок задачі /10/-/11/ зображається у вигляді

$$u_k(t)=U_k(t)+V_k(t), \qquad /16/$$

де $U_k(t)$ - розв"язок задачі /10/-/11'/; $V_k(t)$ - розв"язок задачі /10'/-/11/. Нехай виконуються умови /15/. Тоді для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ існує функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі /10'/-/11'/, яка у квадраті $K_T=\{(t,\tau)\in\mathbb{R}_+^2: 0\le t\le T, 0\le\tau\le T\}$, крім сторін $\tau=0$ і $\tau=T$, визначається формулою

$$G_k(t,\tau)=g_k(t,\tau)-\frac{1}{8\lambda_k^3}\sum_{p=1}^{4}\omega_p\exp(\omega_p\lambda_k(t-\tau))\frac{1+\mu\exp(\omega_p\lambda_k T)}{1-\mu\exp(\omega_p\lambda_k T)}, \qquad /17/$$

де $g_k(t,\tau)=\dfrac{sgn(t-\tau)}{8\lambda_k^3}\sum_{p=1}^{4}\omega_p\exp(\omega_p\lambda_k(t-\tau))$;

на сторонах $\tau=0$ $(\tau=T)$ квадрата K_T функція $G_k(t,\tau)$ доозначується за неперервністю справа /зліва/.

Розв"язки задач /10/-/11'/ і /10'/-/11/ зображаються відповідно формулами

$$U_k(t)=\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau, \qquad /18/$$

$$V_k(t)=\sum_{p=1}^{4}\sum_{q=0}^{3}\frac{u_{kp}(t)}{\Delta(\lambda_k)}(-1)^{p+q+1}\varphi_{qk}\lambda_k^{-q}\det\|u_{kr}^{(j)}(0)-\mu u_{kr}^{(j)}(T)\|_{r=\overline{1,4};\ r\neq p}^{j=\overline{0,3};\ j\neq q}. \qquad /19/$$

На основі формул /17/-/19/ отримуємо такі оцінки:

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^l U_k(t)}{\partial t^l}\right|\le c_1\sum_{p=1}^{4}\frac{\exp(2|\lambda_k|T)\cdot|\lambda_k|^{l-3}}{|1-\mu\exp(\omega_p\lambda_k T)|}\int_0^T|f_k(\tau)|d\tau \quad (l=\overline{0,4}); \qquad /20/$$

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^r V_k(t)}{\partial t^r}\right| \le c_2 \sum_{p=1}^{4}\sum_{q=0}^{3} \frac{\exp(|\lambda_k|T)\,|\lambda_k|^{r-q}}{|1-\mu\exp(\omega_p\lambda_k T)|}\,|\varphi_{qk}| \qquad (r=\overline{0,4}), \tag{21}$$

де $c_1>0$, $c_2>0$ – сталі, що не залежать від λ_k.

Розв"язок задачі /1/–/3/ формально зображається у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}(U_k(t)+V_k(t))X_k(x), \tag{22}$$

де $U_k(t)$, $V_k(t)$ визначаються відповідно формулами /18/, /19/. Ряд /22/, взагалі, розбіжний, бо не дорівнюють нулю вирази $|1-\mu\exp(\lambda_k\omega_p T)|$ /$p=\overline{1,4}$/, що входять знаменниками у формули /18/–/19/ і можуть набувати яких завгодно близьких до нуля значень для нескінченної множини значень $\lambda_k\in\Lambda$. Тому питання існування розв"язку задачі /1/–/3/ пов"язане з проблемою малих знаменників.

<u>Теорема 2</u>. Нехай існують стала $M>0$ і $\gamma\in N$, такі, що для всіх /за винятком скінченного числа/ $\lambda_k\in\Lambda$ виконуються нерівності

$$|1-\mu\exp(\omega_p T\lambda_k)|\ge M\cdot|\lambda_k|^{-\gamma-\varkappa}\exp(-T|\lambda_k|) \qquad (p=\overline{1,4});\ 0<\varkappa<1. \tag{23}$$

Якщо $\varphi_q(x)\in B_\delta (q=\overline{1,4})$ і $f(t,x)\in C([0,T],B_\theta)$, де $\delta=2T+\ell+\varepsilon$, $\theta=3T+\ell+\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1)$, то існує розв"язок задачі /1/–/3/ з простору $C^4(\Omega)$, який неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ і $\varphi_q(x)$ /$q=\overline{0,3}$/.

<u>Доведення</u>. З оцінок /8/, /20/, /21/, /23/ і формули /22/ випливає

$$\begin{aligned}\|u(t,x)\|_{C^4(\Omega)} &\le c_3\Big(\sum_{q=0}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{qk}|\cdot\exp((2T+\ell)|\lambda_k|)\cdot|\lambda_k|^{4+\gamma+\varkappa} + \\ &+\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(t)|\exp((3T+\ell)|\lambda_k|\cdot|\lambda_k|^{1+\gamma+\varkappa}\Big) \le \\ &\le c_4\Big(\sum_{q=0}^{3}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{qk}|\exp((2T+\ell+\varepsilon)|\lambda_k|)+\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(t)|\exp(3T+\ell+\varepsilon)|\lambda_k|)\Big)= \\ &= c_4\Big(\sum_{q=0}^{3}\|\varphi_q(x)\|_{B_\delta}+\|f(t,x)\|_{C([0,T],B_\theta)}\Big),\end{aligned} \tag{24}$$

де c_3, c_4 – додатні сталі, що не залежать від λ_k; $0<\varepsilon<1$ і таке, що задовольняє нерівність $|\lambda_k|^{4+\gamma+\varkappa}<c_0\exp(|\lambda_k|\varepsilon)\,(c_0>0)$

З оцінки /24/ випливає доведення теореми.

3. З"ясуємо, коли виконуються оцінки /23/. Для цього потрібне таке твердження.

Лема. Нехай $\varphi(\lambda_k)$ - обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність

$$\left|\varphi(\lambda_k)-\frac{d(\lambda_k)}{|\lambda_k|\cdot T}\right|\leq|\lambda_k|^{-2-\sigma}\qquad(0<\sigma<1)$$
/25/

для майже всіх /щодо міри Лебега/ чисел T має не більше ніж скінченну кількість розв"язків в числах $\lambda_k\in\Lambda$ і $d(\lambda_k)\in\mathbb{Z}$.

Доведення леми здійснюємо за схемою доведення леми 2.4 [6, розд. I] із урахуванням оцінки /5/.

Теорема 3. Для майже всіх /щодо міри Лебега/ чисел T нерівності /24/ виконуються при $\gamma\geq 1$ для всіх /крім скінченної кількості/ $\lambda_k\in\Lambda$.

Доведення. Легко бачити, що

$$|1-\mu\exp(\omega_p\lambda_k T)|\geq|\mu|\exp((\mathrm{Re}\,\omega_p\cdot\mathrm{Re}\,\lambda_k-\mathrm{Im}\,\omega_p\,\mathrm{Im}\,\lambda_k)T)\cdot\sin(\psi+$$
$$+(\mathrm{Re}\,\omega_p\,\mathrm{Im}\,\lambda_k+\mathrm{Im}\,\omega_p\cdot\mathrm{Re}\,\lambda_k)T)\geq|\mu|\exp(-T|\lambda_k|)\cdot\left|\frac{1}{\pi}(\psi+(\mathrm{Re}\,\omega_p\,\mathrm{Im}\,\lambda_k+\right.$$
$$+\mathrm{Im}\,\omega_p\,\mathrm{Re}\,\lambda_k)T)-d_p(\lambda_k)\Big|\geq|\mu|\cdot T|\lambda_k|\exp(-T|\lambda_k|)\Big|(\pi T|\lambda_k|)^{-1}\times$$
$$\times(\psi+(\mathrm{Re}\,\omega_p\,\mathrm{Im}\,\lambda_k+\mathrm{Im}\,\omega_p\,\mathrm{Re}\,\lambda_k)T)-d_p(\lambda_k)/_{|\lambda_k|T}\Big|,$$

де $\psi=\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}\,\mu}{\mathrm{Re}\,\mu}\right)$; $d_p(\lambda_k)\in\mathbb{Z}$ /$p=\overline{1,4}$/ і задовольняє нерівність

$$\left|\frac{1}{\pi}(\psi+(\mathrm{Re}\,\omega_p\cdot\mathrm{Im}\,\lambda_k+\mathrm{Im}\,\omega_p\,\mathrm{Re}\,\lambda_k)T)-d_p(\lambda_k)\right|\leq 1/2 .$$

З нерівності /26/ і доведеної леми випливає доведення теореми.

Результати роботи переносяться на випадок рівняння

$$(\partial^4/\partial t^4+\partial^4/\partial x^4)^n u(t,x)=f(t,x)+\varepsilon\int_0^t K(t,x,y)\cdot F(t,y,\bar u(t,y))dy,$$

де $\bar u(t,y)=\mathrm{col}\left\{\frac{\partial^{s_1+s_2}u(t,y)}{\partial t^{s_1}\partial y^{s_2}};\ s_1+s_2\leq 4n\right\}$; ε - малий параметр; $n\geq 1$.

Нарешті зауважимо, що у праці [2] для рівняння /1/ досліджена задача з локальними чотириточковими умовами за змінною t та самоспряженими умовами за змінною x /частковим випадком умов /3//, які унеможливлюють появу малих знаменників.

1. Борок В.М., Кенне Э. Классификация нелокальных краевых задач в узкой полосе //Укр. мат. журн. 1994. Т.46. № 4. С. 338-346. Валицкий Ю.Н. Условная корректность четырехточечной задачи для одного дифференциального уравнения //Вопр. корректности обрат. задач мат. физики. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР. 1982. С.45-49. 3. Задорожна Н.М., Мельник О.М., Пташник Б.Й. Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь //Укр.мат.журн. 1994. Т.46. № 12. С. 1621-1627/. 4. Лавренюк С.П. Нелокальные задачи для параболических уравнений второго порядка //Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 12. С. 3-5. Наймарк М.А. Линейные диф-

ференциальные операторы. М., 1969. 326 с. 6. Пташник Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 264 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.04.94

УДК 517.948

М.Й.Михалюк, Є.М.Парасюк

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ $u_e(z)=\frac{1}{z}+\frac{a}{z^n}$

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшуканні плоскої однозв"язної області D, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z=z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$, комплексної площини t на область D площини $z=x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z=z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язування нелінійного інтегрального рівняння*

$$\sigma \overline{z_*(t)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{u_e(z(\tau))\,d\tau}{\tau-t}, \quad |t|>1, \qquad /1/$$

де

$$z_*(t)=z\left(\frac{1}{\bar t}\right), \quad u_e(z)=-\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_e}{\partial z},$$
$$z(t)=\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\ldots, \quad \alpha_1>0. \qquad /2/$$

Розглянемо випадок, коли

$$u_e(z)=\frac{1}{z}+\frac{a}{z^n}, \quad n=2,3,4,\ldots \qquad /3/$$

де a – комплексне число; $\sigma=1$.

Підставляючи /3/, /2/ в /1/, отримуємо нелінійну систему рівнянь:

* Иванов В.К. Интегральные уравнения теории потенциала //Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. № 3. С. 409-411.