ференциальные операторы. М., 1969. 326 с. 6. П т а ш н и к Б.Й. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 264 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.04.94

УДК 517.948

М.Й.Михалюк, Є.М.Парасюк

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ $u_e(z)=\frac{1}{z}+\frac{a}{z^n}$

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшуканні плоскої однозв"язної області D, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z=z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$, комплексної площини t на область D площини $z=x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z=z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язування нелінійного інтегрального рівняння*

$$\sigma \overline{z_*(t)} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{u_e(z(\tau))\,d\tau}{\tau - t}, \quad |t|>1, \qquad /1/$$

де

$$z_*(t)=z\left(\frac{1}{\bar t}\right), \quad u_e(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_e}{\partial z},$$
$$z(t)=\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots, \quad \alpha_1>0. \qquad /2/$$

Розглянемо випадок, коли

$$u_e(z)=\frac{1}{z}+\frac{a}{z^n}, \quad n=2,3,4,\ldots \qquad /3/$$

де a – комплексне число; $\sigma = 1$.

Підставляючи /3/, /2/ в /1/, отримуємо нелінійну систему рівнянь:

* И в а н о в В.К. Интегральные уравнения теории потенциала //Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. № 3. С. 409-411.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} - \dfrac{n a \alpha_n}{\alpha_1^{n+1}}, \\ \bar{\alpha}_n = \dfrac{a}{\alpha_1^n}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} = \alpha_{n+1} = \ldots = 0. \end{cases} \qquad /4/$$

Система /4/ має єдиний розв"язок (α_1, α_n) відповідно при

$$|a| \leq \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots, \qquad /5/$$

який задовольняє умову

$$z'(t) \neq 0 \qquad \text{при} \quad |t| < 1.$$

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема. Для потенціалу /3/, який задовольняє умову /5/, обернена задача для постійної густини $\sigma = 1$ має єдиний розв"язок у класі однозв"язних областей. При

$$|a| > \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

задача в цьому класі областей розв"язку не має.

Приклад. Для потенціалу /3/ при

$$a = \sqrt{\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

єдиним розв"язком у класі конформних відображень є відповідно функція

$$z(t) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t + \frac{1}{[(n)(n+1)]^{\frac{1}{2}}} t^n, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Стаття надійшла до редколегії 20.II.93