УДК 517.95

В.М.Сікорський

ТЕОРЕМА ТИПУ ФРАГМЕНА-ЛІНДЕЛЬОФА ДЛЯ ДЕЯКОГО КЛАСУ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

У теоремах типу Фрагмена-Ліндельофа стверджується, що розв"язок однорідної крайової задачі в необмеженій області для еліптичного чи параболічного рівняння є або тотожним нулем, або оцінюється знизу /в деякому сенсі/ певною функцією, яка визначається вихідними даними. Для лінійних рівнянь з теорем типу Фрагмена-Ліндельофа, зокрема, випливають теореми про єдиність розв"язків крайових задач /наприклад, [2]/, а для нелінійних рівнянь - умови єдиності тривіального розв"язку $u \equiv 0$ та оцінка знизу нетривіального розв"язку /наприклад, [3]/. У нашій роботі описаний клас квазілінійних параболічних рівнянь, для яких відповідні однорідні крайові задачі мають тільки тривіальний розв"язок.

Нехай Q - довільна область в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, яка лежить в шарі $\{(x,t): T_0 < t < T_1\}$, де $T_0 \geq -\infty$, $T \leq +\infty$, і її перетини гіперплощинами $\{t=\tau\}$ непорожні для довільних $\tau \in (T_0, T_1)$. Позначимо $\Gamma(Q) = \partial Q \cap \{(x,t): t < T_1\}$. Очевидно, що $\Gamma(Q)$ - параболічна межа області Q.

Розглянемо задачу

$$u_t - a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + b_i(x,t) u_{x_i} + c(x,t,u,\nabla u) = f(x,t) \text{ в } Q; \quad /1/$$

$$u = h \quad \text{на } \Gamma(Q). \quad /2/$$

Тут і далі вважається, що за індексами, які повторюються, ведеться підсумовування від 1 до n. Припустимо, що функції $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$, $f(x,t)$ - визначені всюди на Q, і, крім цього, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $a_{ij}(x,t)\xi_i \xi_j \geq 0$ для довільних $(x,t) \in Q$, $\xi \in \mathbb{R}^n$; функція $c(x,t,s,p)$ визначена для всіх $(x,t) \in Q$, $s \in \mathbb{R}^1$ і $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, причому $c(x,t,0,p) = 0$; функція h визначена і неперервна на $\Gamma(Q)$. Зауважимо, що задача /1/, /2/ є:

а/ першою змішаною задачею, якщо $T_0 > -\infty$, $\partial Q \cap \{T_0 < t < T_1\} \neq \varnothing$;

б/ задачею Коші, якщо $T_0 > -\infty$, $\partial Q \cap \{T_0 < t < T_1\} = \varnothing$;

в/ задачею Фур"є /задачею без початкових умов/, якщо $T_0 = -\infty$.

Означення. Розв"язком задачі /I/, /2/ назвемо функцію $u \in C^{2,1}(Q) \cap (C(\bar{Q})$, яка задовольняє рівняння /I/ в Q та умову /2/.

Цілком очевидно, що функція $u \equiv 0$ є розв"язком задачі /I/, /2/, коли $f \equiv 0$ і $h \equiv 0$. Знайдемо умови на коефіцієнти рівняння /I/, при яких ця задача не має інших, крім тривіального $/ u \equiv 0 /$, розв"язків.

Додатково припустимо, що коефіцієнти рівняння /I/ задовольняють такі умови:

/A/ для довільних $s \in R^1$, $p \in R^n$ і $(x,t) \in Q$

$$c(x,t,s,p)s \geq q(x,t)|s|^{m+1},$$

де $m>1$, $q(x,t)>0$;

/B/ для будь-якої точки $(x_0,t_0) \in Q$

$$\sup_{Q \cap P_R(x_0 t_0)} \left[1+\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}(x,t)|\right] \cdot q^{-1}(x,t) = o(1)R^2 \text{ при } R \longrightarrow +\infty,$$

де $q(x,t)$ і m з умови /A/,

$$P_R(x_0,t_0) = \{(x,t) : |x-x_0|^2 + |t-t_0| < R^2, \; t \leq t_0\} -$$

– обмежений параболоїд;

(C) $b_i(x,t) sgn\, x_i > 0$ на Q.

Теорема. Нехай виконуються умови /A/, /B/, /C/. Тоді задача /I/, /2/, коли $f \equiv 0$, $h \equiv 0$, має лише тривіальний розв"язок $(u \equiv 0)$.

Д о в е д е н н я. Для доведення скористаємося ідеєю з праці /I/. Припустимо, що існує нетривіальний розв"язок задачі /I/, /2/ при $f \equiv 0$ і $h \equiv 0$. Додамо і віднімемо в лівій частині рівняння /I/ з $f \equiv 0$ вираз $q(x,t)|u|^{m-1}u$. Після нескладних перетворень одержимо

$$u_t - a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + b_i(x,t)u_{x_i} + q(x,t)|u|^{m-1}u + c^*(x,t) - q^*(x,t))u = 0, \quad /3/$$

де $c^*(x,t) = c(x,t,u(x,t),\nabla u(x,t))/u(x,t)$, якщо $u(x,t) \neq 0$, і $c^*(x,t) = 0$, якщо $u(x,t) = 0$; $q^*(x,t) = q(x,t)|u(x,t)|^{m-1}$.

Зафіксуємо довільно вибрані точку $(x_0,t_0) \in Q$ і число $R>0$. Розглянемо функцію

$$V(x,t;x_0,t_0,R) = \frac{\eta(x_0,t_0;R)R^{\alpha}}{[R^2 - |x-x_0|^2 - |t-t_0|]^{\alpha}},$$

де $\alpha = \dfrac{2}{(m-1)}$,

$$\eta(x_0,t_0,R)=\sup_{P_R(x_0,t_0)\cap Q}\left(\frac{\alpha\left[1+2\sum_{i=1}^{n}|a_{ii}(x,t)|+4(\alpha-1)\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(x,t)|\right]}{q(x,t)}\right)^{\alpha/2}.$$

Далі, якщо це не викликає сумнівів, писатимемо P і V замість відповідно $P_R(x_0,t_0)$ і $V(x,t;x_0,t_0,R)$. Легко переконатись, що функція V є визначеною на P, задовольняє на $P\cap Q$ нерівність

$$V_t-a_{ij}V_{x_ix_j}+b_iV_{x_i}+qV^m\geq 0 \qquad /4/$$

і згідно з умовою /В/ $V(x_0,t_0;x_0,t_0,R)\to 0$ при $R\longrightarrow+\infty$.

Віднявши від рівняння /3/ нерівність /4/, одержимо

$$(u-V)_t-a_{ij}(u-V)_{x_ix_j}+b_i(u-V)_{x_i}+q(|u|^{m-1}u-|V|^{m-1}V)+$$
$$+(c^*(x,t)-q^*(x,t))u\leq 0 \qquad /5/$$

на $Q\cap P$.

Покажемо, що звідси випливає нерівність $u(x,t)\leq V(x,t;x_0,t_0,R)$ на $Q\cap P$. Дійсно, припустимо, що це не так. Позначимо через М множину точок $(x,t)\in P\cap Q$, таких, що $u(x,t)>V(x,t;x_0,t_0,R)$. Оскільки u є неперервною на $\bar Q$, $u=0$ на $\Gamma(Q)$, а $V(x,t)>0$ на Р і $V(x,t)\to+\infty$, коли $\mathrm{dist}((x,t),S)\to 0$, де $S=\partial P\cap\{t<t_0\}$, то множина М перебуває на додатній відстані від поверхні $\sigma=\partial(Q\cap P)\cap\{t<t_0\}$. Звідси та з неперервності на $Q\cap P$ функції $(u-V)(x,t)$ випливає існування точки (x_1,t_1), яка належить М і в якій функція $(u-V)(x,t)$ набуває найбільшого на М додатного значення. Очевидно, що

$$(u-V)_t\big|_{(x_1,t_1)}\geq 0,\quad (u-V)_{x_i}\big|_{(x_1,t_1)}=0,\ i=1,2,\dots,n,$$
$$a_{ij}(x_1,t_1)(u-V)_{x_ix_j}\big|_{(x_1,t_1)}\leq 0.$$

Оскільки $u(x_1,t_1)>V(x_1,t_1;x_0,t_0,R)>0$ і функція $|\lambda|^{m-1}\lambda$ строго зростаюча, то

$$q(|u|^{m-1}u-|V|^{m-1}V)|_{(x_1,t_1)}>0.$$

Таким чином, перші три доданки в лівій частині /5/ є невід"ємними, четвертий - строго додатний. Згідно з умовою /А/, врахувавши, що $u(x_1,t_1)>0$, маємо

$$[c^*(x_1,t_1)-q^*(x_1,t_1)]u(x_1,t_1)=[c(x,t,u,\nabla u)-qu^m]|_{(x_1,t_1)}\geq 0.$$

Отже, ліва частина нерівності /5/ в точці (x_1,t_1) набуде додатного значення. Ми прийшли до протиріччя. Таким чином, виконується нерівність $u(x,t)\leq V(x,t;x_0,t_0,R)$ на $Q\cap P$.

Покажемо, що $-u(x,t) \le V(x,t;x_0,t_0,R)$ на $P \cap Q$. Для цього зробимо в рівнянні /1/ $(f=0)$ та умові /2/ заміну $w=-u$ і приймемо позначення $\bar{c}(x,t,w) = -c(x,t,-w)$. У результаті отримаємо задачу, цілком аналогічну вихідній задачі; для неї справедливі умови /A/, /B/, /C/. Отже, як вище показано, $w(x,t) \le V(x,t;x_0,t_0,R)$ на $Q \cap P$. Звідси і з попереднього випливає нерівність

$$|u(x,t)| \le V(x,t;x_0,t_0,R) \text{ на } Q \cap P. \qquad /6/$$

Тепер приймемо в /6/ $x=x_0, t=t_0$ і перейдемо до границі при $R \longrightarrow +\infty$. Одержимо $u(x_0,t_0)=0$. Оскільки точка (x_0,t_0) довільна, то $u \equiv 0$ в Q. Теорема доведена.

1. Б о к а л о М.М. О единственности решений краевых задач для некоторых почти линейных параболических уравнений в неограниченных областях //Нелинейн. гранич. задачи. 1992. № 4. С.12-18. 2. О л е й н и к О.А., Р а д к е в и ч Е.Ф. Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений //Функц. анализ и его прилож. 1974. Т.8. № 4. С. 59-70. 3. Х а л л а е в М.Х. Некоторые теоремы типа Фрагмена-Линделефа для решений полулинейных параболических неравенств //Мат. заметки. 1990. Т. 48. № 3. С. 151-153.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.94

УДК 511.364

Я.М.Холявка

СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ ЧИСЕЛ, ЗВ"ЯЗАНИХ З $\wp(z)$ ТА $sn(z)$*

Нехай $\wp(z)$ – еліптична функція Вейєрштрасса, g_2, g_3 – її інваріанти, 2ω, $2\omega_1$ – деяка фіксована пара основних періодів. Відомо [1], що існує еліптична функція Якобі $sn\, z$ для якої $4K=4\omega$, $2iK'=2\omega_1$ є основними періодами. Позначимо через $\varkappa$ модуль $sn\, z$, $\xi_0, \dots, \xi_6$ – наближаючі алгебричні числа, n_i та L_i – їхні степені та довжини, $n = deg\, Q(\xi_0,\dots,\xi_6)$. У нашій роботі наведена схема доведення оцінки сумісного наближення алгебричними числами деяких чисел, зв"язаних з еліптичними функціями Якобі та Вейєрштрасса.

<u>Теорема</u>. Нехай $\beta \in \mathbb{C}$, β відрізняється від полюсів $\wp$ та $sn\, z$,

* Ця робота частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук /грант № APU 051106/.