

ISSN 0201-758X

ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

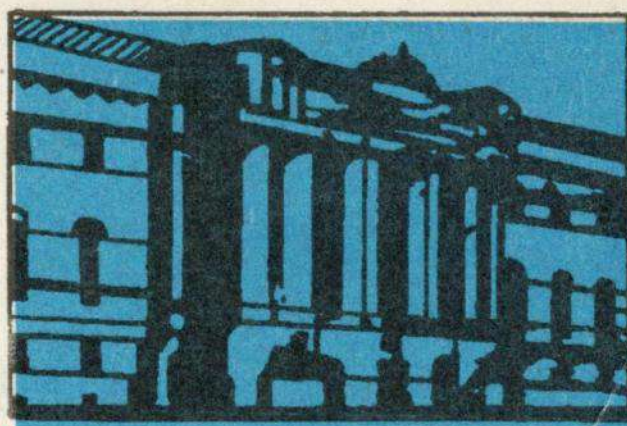
ПИТАННЯ АЛГЕБРИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

43

1996



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

Випуск 43

ПИТАННЯ АЛГЕБРИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Львів

Видавництво "Світ"

1996

УДК 513

Вісник містить статті з теорії функції, алгебри, топології, теорії пружності, крайових задач для диференціальних рівнянь.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

Бібліогр. у кінці статей.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. В.Є.Л я н ц е
/відп. ред./, канд. фіз.-мат. наук, доц. Є.М.П а р а с ю к
/відп. секр./, д-р фіз.-мат. наук, проф. Я.Й. Б у р а к,
д-р фіз.-мат. наук, проф. М.М.З а р і ч н и й, канд. фіз.-мат.
наук, доц. Л.О.Г о р б а ч у к, д-р фіз.-мат. наук, проф.
А.А.К о н д р а т ю к, канд. фіз.-мат. наук, доц. В.Г.К о с-
т е н к о.

Відповідальний за випуск доц. Є.М.П а р а с ю к

Адреса редколегії:

290000 Львів, вул. Університетська, 1

Університет, кафедра диференціальних рівнянь.

Тел. 794-593

В I602II0000-020 225-96 Замовне

© Львівський державний
університет, 1996

ПРО МЕТРИЗАЦІЮ ГІПЕРПРОСТОРУ ОРІЄНТОВАНИХ ДУГ

Із багатьох праць про топологію гіперпросторів зупинимося на тих, що стосуються гіперпросторів дуг [3,4]. Зокрема, Р.Коті [3] описав топологію гіперпростору дуг на поверхнях.

Розглянемо гіперпростір $\Gamma(M)$ орієнтованих дуг у метричному просторі (M, d) . Точніше, $\Gamma(M) = \{(A, a) \mid a \in A \subseteq M \text{ і пара } (A, \{a\}) \text{ гомеоморфна парі } (I, \{0\})\}$ /через I позначаємо відрізок $[0, 1]$ /.

Нехай $\Omega = \{\tau \in C(I, I) \mid \tau(0) = 0, \tau(1) = 1\}$.

Свого часу І.М.Песін висловив гіпотезу, що формула

$$\rho((A_1, a_1), (A_2, a_2)) = \inf \sup d(\gamma_1(\tau_1(t)), \gamma_2(\tau_2(t))), \quad (*)$$

де $\gamma_i: I \rightarrow A_i$ - такий гомеоморфізм, що $\gamma_i(0) = a_i$, $i = 1, 2$, задає метрику в $\Gamma(M)$. Легко бачити, що права частина $*/$ не залежить від вибору гомеоморфізмів γ_1, γ_2 .

Мета цієї роботи - довести цю гіпотезу, а також простежити зв'язок одержаної метрики ρ зі звичайною метрикою Гаусдорфа.

Нам знадобиться одне допоміжне твердження.

Лема. Нехай $f_i: I \rightarrow I$, $i = 1, 2, 3, 4$ - кусково-лінійні відображення, такі, що $f_i^{-1}(0) = \{0\}$, $f_i^{-1}(1) = \{1\}$. Тоді існують кусково-лінійні відображення $g_i: I \rightarrow I$, $i = 1, 2, 3$, такі, що для кожного $t \in I$ існують $\theta, \tau \in I$, для яких $g_1(t) = f_1(\theta)$, $g_2(t) = f_2(\theta) = f_3(\tau)$, $g_3(t) = f_4(\tau)$.

Доведення. Очевидно, що множина $\{(f_1(t), f_2(t)) \mid t \in I\}$ містить множину L , гомеоморфну відрізку, що з'єднує точки $(0, 0)$ і $(1, 1)$ у квадраті $I \times I$. Множина $K = \{(t, f_3(\tau), f_4(\tau)) \mid t, \tau \in I\} \cap (L \times I)$ є перегородкою /у розумінні [1] / між точками $(0, 0, 0)$ та $(1, 1, 0)$ у множині $L \times I$, гомеоморфній квадратові. Нескладні міркування, що ґрунтуються на теоремі про перегородки для квадрата [1], показують, що точки $(0, 0, 0)$ та $(1, 1, 1)$ належать одній компоненті зв'язності множини K . Оскільки K - підполієдр в I^3 , то існує кусково-лінійне відображення $g = (g_1, g_2, g_3): I \rightarrow I^3$ таке, що $g(0) = (0, 0, 0)$, $g(1) = (1, 1, 1)$ і $g(I) \subseteq K$. Очевидно, що відображення g_1, g_2, g_3 є шуканими.

Теорема I. Функція ρ є метрикою на $\Gamma(M)$.

Доведення потребує лише нерівність трикутника. Нехай $(A_i, a_i) \in \Gamma(M)$, $i = 1, 2, 3$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Нехай $\gamma_i: I \rightarrow A_i$ — такі гомеоморфізми, що $\gamma_i(0) = a_i$, $i = 1, 2$. Існують $\tau_1, \tau_1^*, \tau_2, \tau_3 \in \Omega$ такі, що

$$|\rho((A_1, a_1), (A_2, a_2)) - \max_{t \in I} d(\gamma_1(\tau_1(t)), \gamma_2(\tau_2(t)))| < \varepsilon,$$

$$|\rho((A_1, a_1), (A_3, a_3)) - \max_{t \in I} d(\gamma_1(\tau_1^*(t)), \gamma_3(\tau_3(t)))| < \varepsilon.$$

Можна додатково вважати, що функції $\tau_1, \tau_1^*, \tau_2, \tau_3$ є кусково-лінійними і такими, що набувають значення 0 лише в точці 0, а значення 1 — лише в точці 1.

Скориставшись лемою, знайдемо відображення $g = (g_1, g_2, g_3): I \rightarrow I^3$ таке, що $g/0/ = /0, 0, 0/$, $g/1/ = /1, 1, 1/$ і для кожного $t \in I$ існують $\theta, \theta' \in I$ такі, що

$$g_1(t) = \tau_2(\theta), \quad g_2(t) = \tau_1(\theta) = \tau_1^*(\theta'), \quad g_3(t) = \tau_3(\theta').$$

Оцінимо $\max_{t \in I} d(\gamma_2(g_1(t)), \gamma_3(g_3(t)))$. Цей максимум досягається для деякого $t_0 \in I$. Візьмемо $t', t'' \in I$ такі, що $g_1(t_0) = \tau_2(t')$, $g_2(t_0) = \tau_1(t') = \tau_1^*(t'')$, $g_3(t_0) = \tau_3(t'')$. Звідси

$$\rho((A_2, a_2), (A_3, a_3)) \leq d(\gamma_2(g_1(t_0)), \gamma_3(g_3(t_0))) =$$

$$= d(\gamma_2(\tau_2(t')), \gamma_3(\tau_3(t''))) \leq d(\gamma_2(\tau_2(t')),$$

$$\gamma_1(\tau_1(t')) + d(\gamma_1(\tau_1^*(t'')), \gamma_3(\tau_3(t''))) \leq$$

$$\leq \rho((A_1, a_1), (A_2, a_2)) + \rho((A_2, a_2), (A_3, a_3)) + c,$$

де $|c| < 2\varepsilon$. За довільністю ε одержуємо нерівність трикутника.

Нагадаємо /див., наприклад, у праці [2]/, що метрика Гаусдорфа d_H на просторі всіх непорожніх компактних підмножин в M задається формулою

$$d_H(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Метрика d_H не враховує орієнтованості дуг, тому порівнюватимемо d_H і ϱ на підпросторі $\Gamma(M; m_0, m_1)$ орієнтованих дуг з фіксованим початком m_0 і кінцем m_1 . Очевидно, що $d_H \leq \varrho$. Наступний приклад свідчить, що, взагалі кажучи, $d_H < \varrho$.

Нехай $M = \mathbb{R}^2$, $m_0 = (0, 0)$, $m_1 = (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.
Нехай дуга A_n є об'єднанням двох півкіл, що лежать у верхній півплощині, діаметрами яких є відрізки $[(0, 0), ((n+1)/n, 0)]$, $[(1/n, 0), (1, 0)]$ та півкола у нижній півплощині, діаметром якого є відрізок $[(1/n, 0), ((n+1)/n, 0)]$.
Нехай дуга B_n є об'єднанням двох півкіл, що лежать у верхній півплощині, діаметрами яких є відрізки $[(0, 0), ((n-1)/n, 0)]$, $[(1/n, 0), ((n-1)/n, 0)]$ та півкола у нижній півплощині, діаметром якого є відрізок $[(1/n, 0), (1, 0)]$. Легко бачити, що $\lim d_H(A_n, B_n) = 0$, а водночас нескладні міркування показують, що числа $\rho(A_n, B_n)$ відокремлені від нуля додатною константою.

Наступну теорему подаємо без доведення.

Теорема 2. Топології, індуковані метриками ϱ і d_H , рівні на просторі $\Gamma(M; m_0, m_1)$.

Зауваження 1. Формула /ж/ нагадує формулу для відстані Морса, однак суть її цілком інша. Пропонуємо читачеві самому знайти геометричну інтерпретацію /ж/.

2. Слід зазначити, що, на відміну від метрики Гаусдорфа, метрика ϱ може бути поширена *verbatim* також на орієнтовані параметризовані криві. З огляду на викладене у праці [3] виникає така проблема.

Проблема. Описати топологію простору параметризованих дуг на поверхні. Як у цьому просторі лежить підпростір параметризованих дуг зі скінченним числом самоперетинів?

І. А л е к с а н д р о в П.С., П а с ы н к о в Б.А.
Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 2. Ф е д о р ч у к В.В., Ф и л и п п о в В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: МГУ, 1988. 3. Cauty R. L'espace des arcs d'une surface // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 16. P. 18-21. 4. Eberhart C., Nadler S.B., Nowell W.O. Spaces of order arcs in hyperspaces // Fund. Math. 1981. Vol. 112. P. 111-120.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.94

О.Й.Ткач

ТОПОЛОГІЯ ПРОСТОРУ ЧАСТКОВИХ ПЕРЕРІЗІВ
РОЗШАРУВАНЬ НАД КОНТИНУУМАМИ ПЕАНО

Через $\exp X$ позначається множина непорожніх замкнених підмножин топологічного простору X , а через $\exp_c X$ - множина компактних підмножин X . Топологію на $\exp X$, яка називається топологією В'єторіса, визначають базисні множини виду

$$0 < U_1, \dots, U_n > = \{A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, A \cap U_i \neq \emptyset, \dots, A \cap U_n \neq \emptyset\},$$

де $U_1, \dots, U_n$ - відкриті множини в X [3]. Для метричного компакта X ця топологія збігається з топологією, породженою метрикою Гаусдорфа d_H , $d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}$, де $O_\varepsilon(A)$ - ε -окіл множини A в метриці простору X .

Частковим відображенням з топологічного простору X в топологічний простір Y називається неперервне відображення $s: A \rightarrow Y$, де $A \in \exp_c X$. За допомогою природного виледення $s \mapsto grs$, $grs = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in \mathcal{D}s, y = s(x)\}$, де $\mathcal{D}s$ - множина визначення відображення s , на просторі $C_{uc}(X, Y)$ часткових відображень з X в Y індукується топологія В'єторіса з $\exp(X \times Y)$.

Нехай $\xi = (X, \rho, B)$ - локально-тривіальне розшарування з шаром Y .

Часткове відображення $s \in C_{uc}(B, X)$ називається частковим перерізом розшарування ξ , якщо $\rho s = I_{B_s}$. Позначимо через $\Gamma_{uc}(\xi)$ множину всіх часткових перерізів розшарування ξ . Відображення $s \mapsto s(\mathcal{D}s)$ ін'єктивне. Розглядаючи його як виледення $\Gamma_{uc}(\xi)$ в $\exp X$, індукуємо на $\Gamma_{uc}(\xi)$ топологію В'єторіса з $\exp X$. У випадку тривіального розшарування $\xi = (B \times Y, \rho, B)$ маємо $\Gamma_{uc}(\xi) = C_{uc}(B, Y)$.

Надалі вважатимемо, що $\xi = (X, \rho, B)$ - локально-тривіальне розшарування з шаром $Y \in ANR(\mathcal{M})$, де B - континуум Пеано; X - компактний метричний простір.

Лема 1. Існують виледення $j: X \rightarrow B \times Q$ і відображення $\gamma: U \rightarrow X$, де U - окіл множини $j(X)$ в $B \times Q$, такі, що діаграми

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\iota} & B \times Q \\
 \searrow \rho & & \nearrow \rho_B^r \\
 & B &
 \end{array}
 , \quad
 \begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{r} & X \\
 \searrow \rho_B^r & & \nearrow \rho \\
 & B &
 \end{array}$$

комутативні і $\iota \circ \rho = 1_X$. Через Q позначається гільбертовий куб.

Доведення випливає з локальної м'якості відображення ρ /докладніше у праці [4]/.

З леми 1 випливає, що без обмеження загальності можна вважати, що розшарування $\xi = (X, \rho, B)$ таке, що $X \subset B \times Q$, $\rho = \rho_B^r|_X$, $\Gamma_{uc}(\xi) = \{s \in C_{uc}(B, Q) \mid \rho \circ s \subset X\}$, існує відкрита множина U , $X \subset U \subset B \times Q$ і пошарова ретракція $r: U \rightarrow X$, тобто така, що комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{r} & X \\
 \searrow \rho_B^r & & \nearrow \rho_B^r \\
 & B &
 \end{array}$$

Через $\tilde{\Gamma}_{uc}(\xi)$ позначимо поповнення $\Gamma_{uc}(\xi)$ в повному метричному просторі $\exp X$.

Лема 2. $\Gamma_{uc}(\xi)$ є G_δ -множиною в $\tilde{\Gamma}_{uc}(\xi)$.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{A}_i = \{A \in \exp X \mid \exists b \in B : \text{diam}(\rho^{-1}(b) \cap A) \geq \frac{1}{i}\}$. Легко бачити, що $\Gamma_{uc}(\xi) = \bigcap_{i=1}^{\infty} ((\exp X \setminus \mathcal{A}_i) \cap \tilde{\Gamma}_{uc}(\xi))$. Доведемо від супротивного, що $\mathcal{A}_i$ - замкнені в $\exp X$. Нехай $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_i$ така, що $\lim_{j \rightarrow \infty} A_j = A \notin \mathcal{A}_i$. Позначимо через $b \in B$ таке, що $\text{diam } c_j \geq \frac{1}{i}$, де $c_j = (\rho^{-1}(b_j) \cap A_j) \in \exp X$, $1 \leq j < \infty$.

Згідно з компактністю $\exp X$ виберемо з послідовності $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ збіжну підпослідовність $(c_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ і позначимо через $c = \lim_{k \rightarrow \infty} c_{j_k}$. Тоді існує $b = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{j_k}$, де $b_{j_k} = \rho(c_{j_k})$. Легко бачити, що $c \subset A \cap \rho^{-1}(b)$ і $\text{diam } c \geq \frac{1}{i}$, а отже, $A \in \mathcal{A}_i$. Ми одержали суперечність.

З леми 2 і теореми Александрова [3] випливає, що $\Gamma_{uc}(\xi) \in \mathcal{M}_1$ /через $\mathcal{M}_1$ позначається клас сепарабельних топологічних просторів, топологія яких задається деякою повною метрикою/.

Нагадаємо, що ймовірнісною мірою на компактї B називається неперервний невід'ємний функціонал μ на просторі $C(B, \mathbb{R})$, такий, що $\|\mu\| = 1$. Простір ймовірнісних мір $P(B)$, розглянутий у слабкій топології, є опуклим компактом в $\Pi\{R\varphi \mid \varphi \in C(B, \mathbb{R})\}$.

Простір B можна вкласти у $P(B)$, поставивши кожній точці $b \in B$ міру Дірака δ_b , зосереджену в цій точці.

Лема 3. Нехай E - передгільбертовий простір; $\exp^0 E$ - підпростір $\exp E$, який складається з опуклих компактів. Відображення $h: E \times \exp^0 E \rightarrow E$ таке, що $h(x, A) = y$, де точка $y \in A$ реалізує відстань точки x до множини A , тобто $\|x - y\| = \inf_{z \in A} \|x - z\|$, - неперервне.

Доведення - у праці [2].

Теорема 1. Нехай $\xi = (X, p, B)$ - локально-тривіальне розшарування з шаром $Y \in ANR(\mathcal{M})$, базой якого є континуум Пеано. Тоді $\Gamma_{uc}(\xi) \in ANR(\mathcal{M})$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли ξ - тривіальне розшарування і $Y = I = [0, 1]$. Тоді $\Gamma_{uc}(\xi) = C_{uc}(B, I)$.

Можна вважати, що $B \subset P(B) \subset E$, де E - деякий передгільбертовий простір.

Нехай $s \in C_{uc}(B, I)$, $A = \mathcal{D}s$. Справедливі такі вкладення:

$$A \subset P(A)$$

$$\cap \cap$$

$$B \subset E, \quad \text{причому } P(A) \text{ опуклий компакт в } E.$$

Побудуємо продовження $\varphi(s)$ часткової функції s на простір B . Прийmemo $\varphi(s)(b) = h(b, P(A))(s)$ для кожного $b \in B$. Якщо $b \in A$, то $h(b, P(A)) = b$, $\varphi(s)(b) = b(s) = \delta_b(s) = s(b)$, тобто $\varphi(s)|_{\mathcal{D}s} = s$.

З неперервності відображення h і функтора P в категорії компактів [8] випливає, що $\varphi(s) \in C(B, I)$ і відображення $\varphi: C_{uc}(B, I) \rightarrow C(B, I)$, $s \mapsto \varphi(s)$ - неперервне.

Означимо неперервне відображення $u: C_{uc}(B, I) \rightarrow C(B, I) \times \exp B$, $u(s) = (\varphi(s), \mathcal{D}s)$. Легко бачити, що $u u = 1_{C_{uc}(B, I)}$, де $u: C(B, I) \times \exp B \rightarrow C_{uc}(B, I)$, таке, що $u(f, A) = f|_A$. Отже, u є r -відображенням з добутку $C(B, I) \times \exp B$ в $C_{uc}(B, I)$. Оскільки $C(B, I) \times \exp B \in ANR$ [1, 7], то $\Gamma_{uc}(\xi) = C_{uc}(B, I) \in ANR(\mathcal{M})$.

Нехай ξ - тривіальне розшарування з шаром $Y = Q$, $s \in \Gamma_{uc}(\xi) = C_{uc}(B, Q)$. Тоді $s = (s_1, s_2, \dots)$, де $s_i \in C_{uc}(B, I)$. Позначимо через $u: C_{uc}(B, Q) \rightarrow C(B, Q) \times \exp B$ таке відображення, що $u(s) = ((\varphi(s_1), \varphi(s_2), \dots), \mathcal{D}s)$, де φ - відображення продовження функцій з $C_{uc}(B, I)$, означене вище: $u: C(B, Q) \times \exp B \rightarrow C_{uc}(B, Q)$, $u(f, A) = f|_A$. Легко бачити, що $u u = 1_{C_{uc}(B, Q)}$. Аналогічно до попереднього випадку з цього випливає, що $\Gamma_{uc}(\xi) = C_{uc}(B, Q) \in ANR(\mathcal{M})$.

Тепер нехай ξ - локально-тривіальне розшарування з шаром $Y \in ANR(\mathcal{M})$. Легко бачити, що відображення $R: \langle u \rangle \cap C_{uc}(B, Q) \rightarrow \Gamma_{uc}(\xi)$,

таке, що $gr R(s) = r(gr s)$ є ретракцією, де $r: U \rightarrow X$ – пошарова ретракція. Очевидно, що $\langle U \rangle \cap C_{uc}(B, A) \in ANR(\mathcal{M})$ як відкрита підмножина $C_{uc}(B, A)$. Тоді $\Gamma_{uc}(\xi) \in ANR(\mathcal{M})$. Теорему доведено.

Наступна теорема випливає з теореми 1 і характеристичної теореми Торуньчика для ℓ_2 -многовидів [6].

Теорема 2. Нехай $\xi = (X, \rho, B)$ – локально-тривіальне розшарування з шаром $Y \in ANR$. Тоді $\Gamma_{uc}(\xi)$ є ℓ_2 -многовидом.

На завершення зазначимо, що топологію простору повних перерізів ANR – розшарувань розглянув К.Сакаї [5]. Він довів, що такий простір є ℓ_2 -многовидом.

1. Б о р с у к К. Теория ретрактов. М.: Мир, 1971. 291 с.
2. Б у р б а к и Н. Топологические векторные пространства. М.: Изд. ин. лит., 1959. 401 с.
3. Ф е д о р ч у к В.В., Ф и л и п о в В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд. МГУ, 1988. 252 с.
4. Ф е д о р ч у к В.В., Ч и г о г и д з е А.Ч. Абсолютные ретракты и бесконечномерные многообразия. М.: Наука, 1992. 232 с.
5. S a k a i K. The space of cross sections of a bundle // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 103, N3. P. 956-960.
6. T o r u ŋ c z y k H. Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of ℓ_2 -manifolds // Fund. Math. 1978. Vol. 101, P. 93-110.
7. W o j d y s l a w s k i M. Retracts absolus et hyperespaces des continus // Fund. Math. 1939. Vol. 32, P. 184-192.
8. Z a r i c h n y i M. M. On covariant topological functors, I // Ques. and Answ. Gen. Top. 1990. Vol. 8, N2. P. 317-369.

Стаття надійшла до редакції 11.05.94

УДК 512.7/78

В.І.Андрійчук

ПРО ЕЛІПТИЧНІ КРИВІ З ВИРОДЖЕНОЮ РЕДУКЦІЄЮ

Нехай A – еліптична крива визначена над псевдолокальним полем k , тобто над повним щодо дискретного нормування полем k з псевдоскінченним [5] полем класів лишків k ; A_k – група k -раціональних точок кривої A ; $H^1(k, A)$ – група головних однорідних просторів кривої A над полем k .

У випадку локального основного поля k та абелевого многовиду A над k існує двосторонньо невироджений добуток Тейта-Шафаревича [4, 7]:

$$H^1(k, A) \times A_k \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}. \quad //I/$$

© Андрійчук В.І., 1996

2-2241

О.М.Введенський у праці [3] поставив задачу про пошук класу загальних локальних полів, над якими добуток Тейта-Шафаревича /1/ в еліптичних кривих не вироджений зліва. Як виявилось, такий клас утворюють псевдолокальні поля. Наша робота продовжує дослідження не виродженості зліва добутку Тейта-Шафаревича в еліптичних кривих над псевдолокальними полями. Метою роботи є доведення такої теореми.

Теорема. Нехай еліптична крива A визначена над псевдолокальним полем k з полем лишків $\mathfrak{x}$ характеристики 2.

(i) Якщо A має тип (c_3) або (c_6) за Нероном [6], то добуток Тейта-Шафаревича /1/ не вироджений зліва.

(ii) Якщо добуток Тейта-Шафаревича /1/ не вироджений зліва для еліптичних кривих типів (c_2) , (c_4) і (c_5) за Нероном, то він не вироджений зліва для всіх еліптичних кривих з адитивною редукцією над полем k .

Доведення. Нехай $\mathcal{O}_k$ означає кільце цілих елементів поля k , $\mathcal{U}_k$ - група одиниць кільця $\mathcal{O}_k$, π - простий елемент поля k . Якщо ℓ/k - розширення поля k , то відповідні об'єкти поля ℓ позначимо відповідно через $\mathcal{O}_\ell$, $\mathcal{U}_\ell$ і Π . Для $a \in \mathcal{O}_\ell$ $\bar{a}$ означає $a \pmod{\Pi}$.

Вейерштрассове рівняння кривої A має вигляд

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6. \quad /2/$$

Через $\Delta(A)$ будемо позначати дискримінант кривої A .

(i) Нехай крива A має тип (c_3) за Нероном. Тоді $a_1 \in \pi \mathcal{O}_k$, $a_4, a_6 \in \pi^2 \mathcal{O}_k$, $a_3^2 + 4a_6 \notin \pi^3 \mathcal{O}_k$, отже, $a_3 \notin \pi^2 \mathcal{O}_k$. Міркуємо за схемою, наведеною у праці [6], де досліджені криві типу (c_3) над псевдолокальними полями з полями лишків характеристики, більшої від 3.

Припустимо спочатку, що у полі k міститься первісний корінь ζ 3-го степеня з одиниці. Розглянемо розширення $\ell = k(\sqrt[3]{\pi})$. Над полем ℓ крива A ізоморфна кривій B з не виродженою редукцією. Справді, розділивши рівняння /2/ кривої A на π^2 , одержимо

$$\left(\frac{y}{\pi}\right)^2 + \frac{a_1}{\pi} \cdot \frac{x}{\pi^2} \cdot \frac{y}{\pi} + \frac{a_3}{\pi} \cdot \frac{y}{\pi} = \left(\frac{x}{\pi^2}\right)^3 + \left(\frac{a_2}{\pi^2}\right)\left(\frac{x}{\pi^2}\right)^2 + \frac{a_4}{\pi^4} \cdot \frac{x}{\pi^2} + \frac{a_6}{\pi^6},$$

де $\Pi = \sqrt[3]{\pi}$. Позначивши $x = \Pi^2 u$ і $y = \pi v$, одержимо, що рівняння кривої B над полем ℓ має вигляд $v^2 + a'_1 u v + a'_3 v = u^3 + \dots + a'_6$. Тут $a'_i \Pi^i = a_i$, $a'_3 \in \mathcal{U}_\ell$, $a'_i \in \Pi \mathcal{O}_\ell$ для $i = 1, 2, 4, 6$.

Редукція $\bar{B}$ кривої B є невиродженою, оскільки $\Delta(\bar{B}) = \bar{a}'_3 \neq \bar{0}$. Ізоморфізм над полем ℓ кривих A і B визначає ізоморфізм $\sigma_f = \text{Gal}(\ell/k)$ -модулів їх ℓ -раціональних точок

$$\alpha: A_\ell \longrightarrow B_\ell, \quad /3/$$

де A_ℓ - σ_f -модуль з природною дією; B_ℓ - σ_f -модуль з наведеною дією групи σ_f : для $\sigma \in \sigma_f$

$$\sigma_{\text{наб}}(u, v) = (\tau^2 \sigma u, \sigma v).$$

Розглянемо для кривої B точну послідовність редукції

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}(B_\ell) \longrightarrow B_\ell \longrightarrow \bar{B}_\ell \longrightarrow 0.$$

Ядро редукції $\mathcal{T}(B_\ell)$ є когомологічно σ_f -тривіальним. Тому

$$H^i(\sigma_f, A_\ell) \simeq H^i(\sigma_f, B_\ell) \simeq H^i(\sigma_f, \bar{B}_\ell), \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Тут і далі через $H^i(\sigma_f, X)$ позначаємо тейтові когомології Галуа σ_f -модуля X .

Редукція $\bar{B}_\ell$ є σ_f -модулем з наведеною за допомогою ізоморфізму /3/ дією групи σ_f : $\sigma(\bar{u}, \bar{v}) = (\tau^2 \bar{u}, \bar{v})$, де $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{B}_\ell$, $\bar{v}^2 + \bar{a}'_3 \bar{v} = \bar{u}^3 + \bar{a}'_6$.

Обчислимо групи $H^i(\sigma_f, A_\ell)$, $i \in \mathbb{Z}$. Якщо рівняння

$$v^2 + \bar{a}'_3 v + \bar{a}'_6 = 0 \quad /4/$$

не має коренів в полі лишків поля ℓ , то $H^i(\sigma_f, A_\ell) = H^i(\sigma_f, \bar{B}_\ell) = 0$. У цьому випадку з діаграми з точними стрічками [7] /вертикальні гомоморфізми індуковані добутком Тейта-Шафаревича/

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow H^1(\sigma_f, A_\ell) & \longrightarrow & H^1(k, A) & \longrightarrow & H^1(\ell, A) \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \longrightarrow H^0(\sigma_f, A_\ell) & \longrightarrow & A_k^* & \longrightarrow & A_\ell^* \end{array} \quad /5/$$

і з невиродженості зліва добутку Тейта-Шафаревича над полем ℓ [2] впливає його невиродженість зліва і над полем k .

Далі вважаємо, що рівняння /4/ має корені в полі лишків. Якщо $\sigma(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v})$, то $\bar{u} = \bar{0}$, а $\bar{v}$ - один з коренів рівняння /4/. Легко перевірити, що $N_{\sigma_f} \bar{B}_\ell$ складається лише з ∞ /нуль групи $\bar{B}_\ell$ /. Звідси випливає, що $H^0(\sigma_f, \bar{B}_\ell) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Для обчислення групи $H^1(\sigma_f, \bar{B}_\ell)$ зауважимо, що $\text{Ker } N_{\sigma_f} = \bar{B}_\ell$. Хочемо показати, що $H^1(\sigma_f, \bar{B}_\ell) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, а це означає, що існує точка $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{B}_\ell$, така, що $(\bar{u}, \bar{v}) \notin (\sigma - 1) \bar{B}_\ell$ і

$3\bar{B}_x \subset (\sigma-1)\bar{B}_x$. Тепер легко зрозуміти, що твердження про те, що $H^1(\mathcal{O}_f, \bar{B}_x) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, можна сформулювати мовою першого порядку як властивість елементів поля лишків x . Використовуючи елементарну еквівалентність скінченних і псевдоскінченних полів [5] і той факт, що у випадку скінченного поля лишків групи $H^0(\mathcal{O}_f, A_\ell)$ і $H^1(\mathcal{O}_f, A_\ell)$ ізоморфні [7], одержуємо, що $H^1(\mathcal{O}_f, A_\ell) = H^0(\mathcal{O}_f, A_\ell) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Залишається перевірити, що добуток Тейта-Шафаревича

$$H^1(\mathcal{O}_f, A_\ell) \times H^0(\mathcal{O}_f, A_\ell) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad /6/$$

невироджений зліва. Представником нетривіального класу групи $H^1(\mathcal{O}_f, A_\ell)$ є коцикл $f(\sigma) = (\bar{P}\bar{x}, \bar{x}t)$, де $(\bar{x}, \bar{t}) \notin (\sigma-1)\bar{B}_x$. Нехай $a_k = (0, \bar{x}a)$ – представник нетривіального класу групи $H^0(\mathcal{O}_f, A_\ell)$. Міркуючи так само, як і у випадку $\text{char } x > 3$ /такі міркування наведені у праці [1], можемо сформулювати твердження про невідродженість добутку /6/ мовою першого порядку у вигляді деякої властивості поля лишків. Тому невідродженість зліва добутку у нашому випадку впливає з відповідного правильного твердження для еліптичних кривих над локальним полем.

Обмеження стосовно первісного кореня 3-го степеня з одиниці можна усунути, застосувавши ще раз діаграму /5/.

Аналогічно досліджується випадок кривих типу (c_6) за Нероном.

(ii) Друга частина теореми впливає з того, що криві типів (c_1) і (c_8) ізоморфні кривим типу (c_4) , а крива типу (c_7) – кривій типу (c_2) над слабо розгалуженим розширенням ℓ/k степеня 3. У всіх цих випадках потрібно застосувати діаграму /5/.

1. А н д р і й ч у к В.И. Об эллиптических кривых над псевдолокальными полями //Мат. сб. 1979. Т.110 /152/. № 1 /9/. С.88-101.
2. А н д р і й ч у к В.И. Про еліптичні криві над локальними та псевдолокальними полями з полями лишків характеристики 2 //Алгебра і топологія: Темат. збірник наук. праць. К.: ІСДО, 1993. С. 3-13.
3. В в е д е н с к и й О.Н. О локальных "полях классов" эллиптических кривых //Изв. АН СССР. Сер. математ. 1973. Т.37. С.20-88.
4. Ш а ф а р е в и ч И.Р. Группа главных однородных алгебраических многообразий //Докл. АН СССР, 1959. Т.124. № 1. С. 42-43.
5. A x J. The elementary theory of finite fields //Ann. Math., 1968. Vol.88. №2. P.239-271.
6. N e r o n A. Modeles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux //Publ. Math. IHES. 1964. №21. P.1-128.

Стаття надійшла до редколегії 05.05.94

СИНГУЛЯРНІ ДІЛЬНИКИ МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА

Основи теорії виділення з матричного многочлена

$$A(x) = \sum_{i=0}^m A_i x^{m-i}, \quad A_i \in M_n(\mathbb{C}), \quad \det A(x) \neq 0, \quad /1/$$

регулярного множника, тобто зображення $A(x)$ у вигляді

$$A(x) = B(x) C(x), \quad /2/$$

де $B(x) = \sum_{i=0}^r B_i x^{r-i}$, причому $\det B_0 \neq 0$, були розроблені у праці [2]. У даній роботі запропонований метод факторизації /2/ у випадку, коли дільник $B(x)$ - сингулярний, тобто $B(x)$ - неособливий матричний многочлен із виродженим старшим коефіцієнтом B_0 .

Нехай $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^{m-i}$ - деякий многочлен /зокрем $A(x)$ вигляду /1//. Тоді позначатимемо через $\tilde{f}(x)$ зворотний до $f(x)$ многочлен $\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$. Якщо $\deg f(x) = m$, то, очевидно, $\tilde{f}(x) = x^m f(\frac{1}{x})$.

Нехай $A_k(x)$ і $\tilde{A}_k(x)$ - відповідні підматриці k -го порядку матриць $A(x)$ із /1/ і $\tilde{A}(x)$, $1 \leq k \leq n$.

Твердження 1. $\det A_k(x) = x^{S_k} \det \tilde{A}_k(x)$, $0 \leq S_k \leq mk$.

Доведення. Якщо $\deg \det A_k(x) = \rho_k \leq mk$, то

$$\det \tilde{A}_k(x) = x^{mk} \det A_k(\frac{1}{x}) = x^{mk-\rho_k} x^{\rho_k} \det A_k(\frac{1}{x}) = x^{mk-\rho_k} \det \tilde{A}_k(x).$$

Узявши $S_k = mk - \rho_k$, бачимо, що твердження 1 доведене.

Нехай канонічна форма Сміта [1] матричного многочлена $A(x)$ має вигляд

$$D^A = \text{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)), \quad /3/$$

де $\varepsilon_i(x) = (x - \alpha_1)^{\ell_{1i}} \dots (x - \alpha_t)^{\ell_{ti}}$, причому $0 \leq \ell_{k1} \leq \ell_{k2} \leq \dots \leq \ell_{kn}$, $k=1, \dots, t$. Вважатимемо, що у /3/ всі корені α_i не дорівнюють нулю, оскільки в разі потреби це завжди можна досягнути заміною змінної $x = y - \beta$, де β - довільне число, що відрізняється від скінченної кількості коренів α_i многочлена $\det A(x)$. Як відомо із [1], інваріантні многочлени $\varepsilon_i(x)$ визначаються через найбільші спільні дільники мінорів матриці $A(x)$, тому враховуючи твердження 1, одержуємо такий результат.

Твердження 2. Якщо форма Сміта матричного многочлена $A(x)$ має вигляд /3/, то формою Сміта матричного многочлена $\tilde{A}(x)$ є матриця

$$D^{\tilde{A}} = \text{diag}(\tilde{\varepsilon}_1(x), \dots, \tilde{\varepsilon}_n(x)), \quad /4/$$

де

$$\tilde{\varepsilon}_i(x) = x^{k_i} (x - \frac{1}{\alpha_1})^{\ell_{1i}} \dots (x - \frac{1}{\alpha_t})^{\ell_{ti}},$$

$$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Зауважимо, що елементарні дільники x^{k_i} матричного многочлена $\tilde{A}(x)$ називають [1] нескінченними елементарними дільниками сингулярного матричного многочлена $A(x)$. Якщо $A(x)$ регулярний то, очевидно, всі k_i дорівнюють нулю. Крім цього, зважаючи на те, що згідно зі зробленим вище припущенням $\alpha_i \neq 0$, бачимо, що $\tilde{A}(x)$ регулярний матричний многочлен.

Твердження 3. Якщо для матричного многочлена /1/ справедливий розклад вигляду /1/, де $B(x)$ – деякий сингулярний матричний многочлен, то $\tilde{B}(x) \tilde{C}(x) = \tilde{A}(x)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\deg B(x) + \deg C(x) = \deg A(x). \quad /5/$$

Доведення. Нехай у розкладі /2/: $\deg B(x) = r$, $\deg C(x) = s$. Тоді $\tilde{B}(x) = x^r B(\frac{1}{x})$, $\tilde{C}(x) = x^s C(\frac{1}{x})$. Якщо $A(x) = B(x)C(x)$ то

$$\tilde{B}(x) \tilde{C}(x) = x^{r+s} B(\frac{1}{x}) C(\frac{1}{x}) = x^{r+s} A(\frac{1}{x}).$$

Отже, $\tilde{B}(x) \tilde{C}(x) = \tilde{A}(x)$ тоді і лише тоді, коли $r + s = \deg A(x)$. Твердження 3 доведене.

Із тверджень 2 і 3, враховуючи те, що якщо для неособливого матричного многочлена $A(x)$ справедливий розклад /2/, то інваріантні многочлени матриць $B(x)$ і $C(x)$ ділять відповідні інваріантні многочлени $A(x)$ [2], одержуємо такий результат.

Твердження 4. Якщо сингулярний матричний многочлен $A(x)$ зображається у вигляді $A(x) = B(x)C(x)$, то нескінченні елементарні дільники матриці $A(x)$ діляться на відповідні елементарні дільники матриць $B(x)$ і $C(x)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова /5/.

На основі доведених тверджень і розробленої у праці [2] теорії виділення із матричного многочлена $A(x)$ регулярного множника одержуємо такий критерій виділення із $A(x)$ сингулярного множника

$B(x)$ за умови /5/ із наперед заданою системою інваріантних многочленів і нескінченних елементарних дільників.

Теорема. Нехай форму Сміта /3/ матричного многочлена $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$D^A = \text{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \text{diag}(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)),$$

де $\varphi_i(x) = (x - \alpha_1)^{q_{1i}} \dots (x - \alpha_t)^{q_{ti}}$,
 $0 \leq q_{k1} \leq q_{k2} \leq \dots \leq q_{kn}$, $k = 1, \dots, t$,
 $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \deg \varphi_i(x) = S < mn$.

Для того щоб матричний многочлен /I/ міг бути зображений у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x), \quad /6/$$

де $B(x)$ - сингулярний матричний многочлен степеня r з формою Сміта $\text{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ і нескінченними елементарними дільниками $x^{l_1}, \dots, x^{l_n}$, $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n$, необхідно і достатньо, щоб із зворотного матричного многочлена $\tilde{A}(x)$ виділявся регулярний множник степеня r з формою Сміта

$$\text{diag}\left(x^{l_1} \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)^{q_{11}} \dots \left(x - \frac{1}{\alpha_t}\right)^{q_{t1}}, \dots, x^{l_n} \left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)^{q_{1n}} \dots \left(x - \frac{1}{\alpha_t}\right)^{q_{tn}}\right),$$

Зауваження. І. Як наслідок з теореми одержуються умови і метод розкладу матриці $A(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ у вигляді $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x), C(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ і

$$\deg B(x) + \deg C(x) = \deg A(x).$$

2. Використовуючи результати із [2], можна дослідити питання про єдиність розкладу /6/ і метод його фактичної побудови.

І. Г а н т м а х е р Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
 2. К а з і м і р е ь к и й П.С. Розклад матричних многочленів на множники. К.: Наук. думка, 1981.

Стаття надійшла до редколегії 12.05.94

А.І.Гаталевич

ПРО АДЕКВАТНІ ПРАВИ ДУО-КІЛЬЦЯ

У даній статті вивчаються адекватні кільця за допомогою поняття адекватного елемента. Основний результат підтверджує, що права дуо-область Безу адекватна справа тоді і тільки тоді, коли її довільний ненульовий простий ідеал містить хоча б один адекватний справа елемент. Доведено також, що адекватна справа дуо-область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є лівою дуо-областю. Ці результати є узагальненням уже відомих, які наведені у праці [2].

Під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце з одиницею. Правим дуо-кільцем називаємо кільце, в якому довільний правий ідеал є двостороннім. Скажімо, матриця A з елементами кільця R має діагональну редукцію, якщо існують такі зворотні матриці P і Q відповідних розмірів з елементами кільця, що виконується

$$PAQ = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \epsilon_n \end{bmatrix}, \text{ де } R\epsilon_{i+1}R \subset \epsilon_i R \cap R\epsilon_i, \\ i = 1, 2, \dots, n$$

Якщо над кільцем R довільна матриця має діагональну редукцію, тоді кільце R називають кільцем елементарних дільників. Позначимо через $U(R)$ групу одиниць кільця R . Назвемо ненульовий елемент a кільця R адекватним справа, якщо для кожного ненульового елемента $b \in R$ знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що $1/a = rs$; $2/rR + bR = R$; $3/$ для будь-якого $s' \in R$ з включення $sR \subset s'R \neq R$ випливає, що ідеал $s'R + bR$ властивий.

Кільце, в якому кожний ненульовий елемент є адекватним справа, називається адекватним справа.

Назвемо властивий правий ідеал кільця адекватним справа, якщо він містить хоча б один адекватний справа елемент.

У протилежному випадку правий ідеал називається неадекватним. Для неадекватних ідеалів на підставі леми Цорна справедливий такий результат.

Довільний неадекватний правий ідеал міститься хоча б в одному максимально неадекватному правому ідеалі.

Позначимо через $A_r(R)$ множину всіх адекватних справа елементів кільця R .

Твердження І. Кожний максимально неадекватний правий ідеал P правої дуо-області R є простим ідеалом.

Доведення. Поведемо його від супротивного. Нехай існують такі елементи $a, b \in R \setminus P$, що $ab \in P$. Розглянемо ідеал $P + aR$. Оскільки $a \notin P$ і P максимально неадекватний ідеал, то існує такий елемент $c \in A_r(R)$, що $c \in P + aR$. Розглянемо ідеал $I = \{x / cx \in P\}$. Очевидно, що $P \subseteq I$, причому $I \neq P$, оскільки $b \in I$ і $b \notin P$. Отже, існує такий елемент $d \in A_r(R)$, що $d \in I$. Із визначення ідеалу I випливає, що $cd \in P$, тобто ідеал P містить добуток двох адекватних справа елементів. Доведемо, що cd -адекватний справа елемент. Нехай k - довільний ненульовий елемент кільця R . Існують $r, m, t, l \in R$, для яких $c = rm$, $d = tl$ і $rR + kR = R$, для довільного m' з умови $mR \subset m'R \neq R$ випливає $m'R + kR \neq R$, $tR + kR = Rm$, для довільного l' з умови $lR \subset l'R \neq R$ випливає $l'R + kR \neq R$. Маємо $cd = rmtl$, $mt = ta$, $a \in R$, оскільки R - праве дуо-кільце, $cd = rtal$.

Доведемо, що $rtR + kR = R$. Нехай $rtR + kR = hR$, тоді $rt = hr_0$, $k = hk_0$, $r_0, k_0 \in R$. Оскільки $rR + kR = R$, тоді $rR + hR = R$. Звідси $ru + hv = 1$, $u, v \in R$, $rut + hvt = t$, $rtu' + htv' = t$, $u', v' \in R$. Тоді $hr_0u' + htv' = t$, $tr \subset hR$. Оскільки $tR + kR = R$, то звідси випливає, що $rtR + kR = R$.

Тепер доведемо, що $mR + tR = R$. Припустимо, що $mR + tR = hR$. З включення $tR \subset hR$ випливає $hR + kR = R$.

З іншого боку, $mR \subset hR \neq R$ і $hR + kR \neq R$. Звідси випливає, що $h \in U(R)$.

Доведемо, що $aR = mR$, $mR + tR = R$ і $mt = ta$, існують $u, v \in R$, що $mu + tv = 1$, $mu + tva = a$, $mau' + tav' = a$, $mau' + mtv' = a$. Отже, $tx = a$ і звідси випливає $aR \subset mR$. З включення $Rm \subset mR$ випливає $tm = mx$, $mt = ta = tmx = mx$, $t = zx$, $mu + tv = z$, $u', v' \in R$, $mu + tv = tmu' + tvv' = z$. Таким чином, $ty = z$.

Маємо $t = zx$ і $ty = z$. Звідси випливає $xy = 1$, $x \in U(R)$ і $aR \supset mR$.

Отже, $aR = mR$ і для довільного a' із включення $aR \subset a'R \neq R$ випливає $a'R + kR \neq R$. Таким чином, $cd \in A_r(R)$. Доведемо, що ідеал P містить деякий адекватний справа елемент, що суперечить попередньому припущенню. Твердження справедливе також у випадку, коли R - ліва дуо-область.

Нехай R - права дуо-область.

Твердження 2. В області R будь-який лівий дільник адекватного справа елемента адекватний справа.

Доведення. Нехай $a \in A_r(R)$ і $a = dx, x \in R, d \in R$. Для кожного існують $r, m \in R$, що $a = rm, rR + cR = R$ і з умови $mR \subseteq m'R \neq R$ випливає $m'R + cR \neq R$. Нехай $dR + rR = hR$.

Тоді $hd_0u + hr_0v = h, d = hd_0, r = hr_0, d_0, r_0, u, v \in R$.
 $h(1 - d_0u - r_0v) = 0, d_0u + r_0v = 1, d_0um + r_0vm = m, d_0mu' + r_0mv' = m$, оскільки R - права дуо-область, $u', v' \in R$. Оскільки $dx = rm$, тоді $d_0x = r_0m$.

Звідси випливає $mR \subseteq d_0R, d_0y = m, y \in R$. Якщо тепер $d_0R \subseteq d'_0R \neq R$, то d_0 можна взяти як m' і отримати $d'_0R + cR \neq R$. Враховуючи $hr + cR = R$, бачимо, що розкладення $d = hd_0$ має властивості, описані у визначенні адекватного елемента.

Правильне також таке твердження.

Твердження 2'. У лівій дуо-області Безу будь-який правий дільник адекватного зліва елемента адекватний зліва.

Теорема 1. Права /ліва/ дуо-область Безу адекватна справа /зліва/ тоді і тільки тоді, коли довільний її ненульовий простий ідеал містить хоча б один адекватний справа /зліва/ елемент.

Доведення. Дамо його для правої дуо-області Безу. Припустимо, що в R існують неадекватні елементи, а кожний ненульовий простий ідеал містить принаймні один адекватний справа елемент. Нехай a - ненульовий неадекватний елемент. Якщо ідеал aR містить адекватний справа елемент $b \in R$, то $b = ax, x \in R$. Ненульовий неадекватний елемент a буде адекватним справа як лівий дільник елемента b . Отже, aR не містить жодного адекватного справа елемента. Згідно з твердженням 1, ідеал aR міститься в деякому максимально неадекватному ідеалі P . З твердження 2 випливає, що P - простий ідеал.

Таким чином, P містить деякий адекватний справа елемент, що суперечить неадекватності ідеалу P . Звідси випливає, що в кільці R немає ненульових неадекватних елементів.

Обернена імплікація очевидна.

Прикладом адекватного справа правого дуо-кільця може служити праве дуо ланцюгове справа кільце.

Нехай $a \neq 0$. Для довільного $b \in R$ маємо $aR \subseteq bR$, або $bR \subseteq aR$.

1. Якщо $aR \subseteq bR$, тоді $a = bx, x \in R$. Нехай існує $a' \notin U(R)$ такий, що $aR \subseteq a'R$, але $a'R + bR = R$. Унаслідок локальності R і того, що $a' \notin U(R)$ випливає, що $b \in R$. Тобто a - адекватний справа до елемента b .

2. Якщо $bR \subseteq aR$, тоді $b = ax$ і $a = 1a, R + bR = R, a'R + bR = a'R \neq R$, для довільного $a' \in R$ такого, що $aR \subseteq a'R \neq R$.

Теорема 2. Адекватна справа права дуо-область Безу є областю елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли вона є лівою дуо-областю.

Доведення. Необхідність відразу випливає з [1].

Достатність: на основі результатів [3], [4] достатньо довести, що матриця $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ має діагональну редукцію, де $aR + bR + cR = R$. Нехай $c = rs$, де $rR + aR = R$ і з умови $sR \subset s'R \neq R$ випливає $s'R + aR \neq R$.

$$\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+rb & rc \\ * & * \end{bmatrix},$$

де $\begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ – зворотна матриця.

Доведемо, що $(a+rb)R + rcR = R$.

Припустимо, що $(a+rb)R + rcR = hR$, $h \notin U(R)$.

1. $rc = rrs$, $rR + hR = h'R$, $(a+rb)R \subset h'R$. Звідси випливає, що $a \in h'R$ і $aR \subset h'R$. Отримуємо протиріччя з $R = rR + aR \subset h'R + aR \neq R$.

2. Оскільки $rR + hR = R$, тоді $r^2R + hR = R$, $r^2u + hv = 1$, $r^2us + hvs = s$, $r^2su' + hsu' = s$, $u, v, u', v' \in R$.

Звідси $sR \subset hR$.

Маємо $hR + aR = h'R$, де $h' \notin U(R)$.

$a = h'a'$, $(a+rb)R = h'R$, $rbR \subset h'R$, $R = rR + aR = rR + h'R$, $bR \subset h'R$, $aR \subset h'R$, $cR \subset h'R$.

Отримуємо $R = aR + bR + cR = h'R$ і звідси випливає, що $h' \in U(R)$.

І. Забавский Б.В., Комарницький М.Я. Дистрибутивные области с элементарными делителями // Укр. мат. журн. 1990. Т.42. С. 1000-1004. 2. Забавський Б.В., Комарницький М.Я. Про адекватні кільця // Вісн. Львів. ун-ту. 1988. Вип.30. С. 39-43. 3. Забавский Б.В. О некоммутативных кольцах с элементарными делителями // Укр. мат. журн. 1990. Т.42. С.847-850. 4. Kaplansky I. Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 66. P.464-491.

Стаття надійшла до редколегії 16.05.94

О.Г.Оришин

АНАЛОГИ ТЕОРЕМИ ВІМАНА
ДЛЯ ЦІЛОГО КРАТНОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай $F(z)$ - ціла функція, представлена абсолютно збіжним у $\mathbb{C}^p$ кратним рядом Діріхле:

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{\infty} a_n \exp\{ \langle z, \lambda_n \rangle \}, \quad /I/$$

де

$$n = (n_1, \dots, n_p), \quad \|n\| = n_1 + \dots + n_p,$$

$$a_n = a_{n_1, \dots, n_p} \in \mathbb{C}, \quad z = (z_1, \dots, z_p), \quad z = \sigma + it =$$

$$= (\sigma_1 + it_1, \dots, \sigma_p + it_p), \quad \lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \dots, \lambda_{n_p}^{(p)}),$$

$$0 \leq \lambda_{n_j}^{(j)} \longrightarrow +\infty, \quad (n_j \longrightarrow +\infty), \quad j = 1, \dots, p;$$

$\langle z, \lambda_n \rangle = z_1 \lambda_{n_1}^{(1)} + \dots + z_p \lambda_{n_p}^{(p)}$. Через $S_p(\Lambda)$ позначимо клас усіх функцій виду /I/.

Якщо $\{G(r, a)\}_{r \geq 0}$ система a -подібних полілінійних областей ($a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$), яка вичерпанням $\mathbb{C}^p$, тобто $G(r_1, a) \subset G(r_2, a)$ для $r_1 < r_2$ і $\bigcup_{r \geq 0} G(r, a) = \mathbb{C}^p$ /означення системи a -подібних полілінійних областей [3, с. 301]/, а

$G_c(r, a)$ - образ $G(r, a)$ в $\mathbb{R}^p$ при відображенні $w = \operatorname{Re} z$, то для функції $F \in S_p(\Lambda)$ прийемо $S_F(r, a) = \sup\{|F(z)| : z \in G(r, a)\}$. Оскільки $S_F(r, a)$ - опукла функція при $r \geq 0$ [3, с. 302], то у неї всюди існує правостороння похідна. Тому позначимо $L_F(r, a) = (\ln S_F(r, a))'_+$. У праці [3, с. 302], по суті, доведено твердження, яке ми сформулюємо для класу $S_p(\Lambda)$.

Теорема 1. Нехай $F \in S_p(\Lambda)$ і $a \in (\mathbb{R}_+^0)^p$ таке, що $L_F(r, a) \nearrow +\infty$ ($r \rightarrow +\infty$). Тоді знайдеться така множина $E \subset \mathbb{R}_+$ - скінченної міри, що для всіх $r \in \mathbb{R}_+ \setminus E$

$$F(w + a\eta) = (1 + \omega(\eta)) F(w) \exp\{\eta L_F(r, a)\},$$

де $|\omega(\eta)| < \eta (L_F(r, a) \ln^{1+\alpha} L_F(r, a))^{1/2}$, $\alpha > 0$, точка $w \in \partial G(r, a)$ така, що $|F(w)| \geq L_F^{-\beta(r)}(r, a) S_F(r, a)$; $\beta(r)$ - довільна функція така, що $0 \leq \beta(r) \leq q < \frac{1}{2}$.

Скориставшись міркуваннями [2, лема 3] і застосувавши теорему 1, отримаємо аналог класичної теореми Вімана.

Теорема 2. Нехай $F \in S_p(\Lambda)$ і $a \in (\mathbb{R}_+^0)^p$ таке, що $L_F(r, a) \nearrow +\infty$, $r \rightarrow +\infty$. Тоді співвідношення

$$B_F(r, a) = \sup\{\operatorname{Re} F(z) : z \in \partial G(r, a)\} = (1 + o(1)) S_F(r, a)$$

та

$$A_F(r, a) = \inf\{\operatorname{Re} F(z) : z \in \partial G(r, a)\} = -(1 + o(1)) S_F(r, a)$$

справджуються при $r \rightarrow +\infty$ ($r \in \mathbb{R}_+ \setminus E$, E - скінченної міри/).

Доведення. Прийнемо спочатку $\eta = i(\pi - \arg F(z))/L_F(r, a)$. За теоремою 1 при $r \rightarrow +\infty$ ($r \in \mathbb{R}_+ \setminus E$) маємо

$$\begin{aligned} |\omega(\eta)| &\leq (\pi - \arg F(z)) (L_F(r, a) \ln^{1+\alpha} L_F(r, a))^{1/2} / L_F(r, a) \leq \\ &\leq \pi (\ln^{1+\alpha} L_F(r, a) / L_F(r, a))^{1/2} = o(1), \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

$$\text{і } F(z + a\eta) = (1 + o(1)) |F(z)| \exp\{i\pi\} = -(1 + o(1)) |F(z)|.$$

Враховавши, що точка $z \in \partial G(r, a)$ така, що $|F(z)| \geq L_F^{-\beta(r)}(r, a) \times S_F(r, a)$, де $\beta(r)$ - довільна функція така, що $0 \leq \beta(r) \leq q < \frac{1}{2}$ і $F(z + a\eta) \geq \operatorname{Re} F(z + a\eta) \geq A_F(r, a)$, отримаємо

$$A_F(r, a) \leq -(1 + o(1)) S_F(r, a) / L_F^{\beta(r)}(r, a).$$

Оберемо $\beta(r)$ так, що $L_F^{-\beta(r)}(r, a) = 1 + o(1)$, для цього достатньо взяти $\beta(r) = \ln L_F(r, a)^{-3/2}$. Звідси негайно одержимо

$$A_F(r, a) \leq -(1 + o(1)) S_F(r, a), \text{ що разом з нерівністю}$$

$|A_F(r, a)| \leq S_F(r, a)$ доводить друге співвідношення теореми 2.

Прийнявши тепер $\eta = -i \arg F(z) / L_F(r, a)$ і застосувавши теорему 1, отримаємо $F(z + a\eta) = (1 + o(1)) |F(z)|$ при $r \rightarrow +\infty$, $r \in \mathbb{R}_+ \setminus E$, тобто $S_F(r, a) \geq B_F(r, a) = \sup\{\operatorname{Re} F(z) : z \in \partial G(r, a)\} \geq \operatorname{Re} F(z + a\eta) = (1 + o(1)) |F(z)| \geq (1 + o(1)) S_F(r, a) / L_F^{\beta(r)}(r, a)$ при $r \rightarrow +\infty$, $r \in \mathbb{R}_+ \setminus E$. Остання нерівність з $\beta(r) = (\ln L_F(r, a))^{-3/2}$ повністю доводить теорему 2.

Конусом зростання максимального члена $\mu(\sigma, F)$ ряду $/I/$ називаємо конус

$$\gamma_F = \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln \mu(\sigma^t, F) / t) = +\infty\}$$

/див., наприклад, [1]/.

Твердження. Для функції $F \in S_p(\Lambda)$ $L_F(r, a) \nearrow +\infty$ ($r \rightarrow +\infty$) тоді і тільки тоді, коли $a \in \gamma_F$.

Доведення. Покажемо спочатку, що якщо $a \in \gamma_F$, то $L_F(r, a) \nearrow +\infty$ / $r \rightarrow +\infty$ /. Справді, оскільки $L_F(r, a)$ - неспадна функція

від r , то з припущення, що умова $L_F(r, a) \nearrow +\infty (r \rightarrow +\infty)$ не виконується, послідовно виводимо $L_F(r, a) = O(1) (r \rightarrow +\infty)$ і $\ln S_F(r, a) = O(r) (r \rightarrow +\infty)$. Зауважимо тепер, що [3, с. 302]

$$S_F(r, a) = \sup \{ |F(z)| : z \in G_c(r, a) \} = \sup \{ \sup \{ |F(t + a\tau)| : \operatorname{Re} \tau = r \} : z \in G_c(0, a) \}, \text{ а також [3, с. 353]} \\ \max \{ |a_m| \exp \{ \langle \sigma, \lambda_m \rangle \} : \sigma \in \partial G_c(r, a) \} = d_m(G) |a_m| \exp \{ r \langle a, \lambda_m \rangle \},$$

де $\ln d_m(G) = \sup \{ \langle z, \lambda_m \rangle : z \in G(0, a) \}$. Тому з нерівності Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$ при фіксованому $m \in \mathbb{Z}_+^P$ маємо

$$|a_m| d_m(G) \exp \{ r \langle a, \lambda_m \rangle \} \leq \sup \{ M(\sigma, F) : \sigma \in \partial G_c(r, a) \} \leq S_F(r, a).$$

Звідси, якщо $a_m \neq 0$, негайно одержуємо

$$\langle a, \lambda_m \rangle \leq \ln S_F(r, a) / r + O(1) = O(1), (r \rightarrow +\infty),$$

що неможливо, оскільки $a \in \gamma_F$, і тому

$$\sup \{ \langle a, \lambda_m \rangle : m \in \mathbb{Z}_+^P \} = +\infty.$$

Отже, припущення, зроблене на початку доведення, не правильне і $L_F(r, a) \nearrow +\infty (r \rightarrow +\infty)$ для кожного $a \in \gamma_F$. З іншого боку, оскільки

$$S_F(r, a) \leq \sum_{\|n\|=0}^{\infty} |a_n| \exp \{ \sup \{ \langle \operatorname{Re} z, \lambda_n \rangle : z \in G(r, a) \} \} \leq \\ \leq \sum_{\|n\|=0}^{\infty} |a_n| d_n(G) \exp \{ r \langle a, \lambda_n \rangle \} \leq \sum_{\|n\|=0}^{\infty} |a_n| d_n(G) \times \\ \times \exp \{ r \sup \{ \langle a, \lambda_n \rangle : n \in \mathbb{Z}_+^P \} \},$$

то враховуючи, що з умови $L_F(r, a) \nearrow +\infty (r \rightarrow +\infty)$ випливає $\ln S_F(r, a) / r \rightarrow +\infty (r \rightarrow +\infty)$, негайно одержуємо $\sup \{ \langle a, \lambda_n \rangle : n \in \mathbb{Z}_+^P \} = +\infty$, тобто $a \in \gamma_F$.

У зв'язку з доведеним твердженням висловимо таке припущення, правильність якого потребує доведення.

Припущення. Твердження теорем 1 та 2 справедливі для всіх $a \in \gamma_F$.

На основі розвитку методу типу Вімана-Валірона для цілих кратних рядів Діріхле можна довести таке твердження.

Теорема 3. Нехай для функції $F \in S_p(\Lambda)$ виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \lambda_k} < +\infty \quad (\forall_j = \overline{1, p}).$$

Тоді співвідношення

$$B(\sigma, F) = \sup \{ \operatorname{Re} F(\sigma + it) : t \in \mathbb{R}^P \} = (1 + O(1)) M(\sigma, F)$$

121

та

$$A(\sigma, F) = \inf \{ \operatorname{Re} F(\sigma + it) : t \in \mathbb{R}^p \} = -(1 + o(1)) M(\sigma, F)$$

виконуються при $|\sigma| \rightarrow +\infty$, $\sigma \in \bar{K} \setminus E$, K - довільний конус з вершиною в початку координат, такий, що $\bar{K} \setminus \{0\} \subset \gamma_F$; $E \subset \mathbb{R}^p$ - множина виняткових значень, міра Лебега перетину якої з множиною S_R має оцінку

$$\operatorname{meas}_p \{E \cap S_R\} \leq A(2R)^{p-1}.$$

Тут S_R - циліндр, який є образом $(p-1)$ -вимірного циліндра $S'_R = \{x' = (x'_1, \dots, x'_p) \in \mathbb{R}^p : (x'_2)^2 + \dots + (x'_p)^2 \leq R^2\}$ при повороті навколо початку координат, при якому додатна піввісь переходить у промінь $\xi = \{x = (x_1, \dots, x_p) : x_1 = x_2 = \dots = x_p\}$. Однак довести цю теорему плануємо в окремій статті.

І. Г р е ч а н ю к М.Й. Конуси росту цілих кратних рядів Діріхле // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1991. № 9. С. 19-25. 2. С к а с к и в О.Б. Обобщение малой теоремы Ликара // Теория функций и функц. анализа и их приложения. Харьков. 1986. Т.46. С. 90-100. 3. С т р е л и ц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Вильнюс: Минтис, 1972. 468 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.94

УДК 517.535

О.Б.Скасків

ПРО ЦЕНТРАЛЬНИЙ ПОКАЗНИК АБСОЛЮТНО ЗБІЖНОГО У ПІВПЛОЩИНІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай $H(\Lambda)$ - клас аналітичних у півплощині $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ функцій F , що зображаються абсолютно збіжними у цій півплощині рядами Діріхле:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z \lambda_n}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty \quad (1 \leq n \rightarrow +\infty), \quad //1/$$

де $\Lambda = (\lambda_n)$. Позначимо $M(\sigma, F) = \sup \{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma \lambda_n} : n \geq 0\}$ і $\nu(\sigma) = \max\{n : |a_n| e^{\sigma \lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$. Відомо, що $\ln M(\sigma, F)$ - опукла функція [4, 6], тому її похідна справа існує для всіх $\sigma < 0$, позначимо її $L(\sigma) = (\ln M(\sigma, F))'_+$.

© Скасків О.Б., 1996

Одним із центральних питань в теорії Вімана-Валірона є з'ясування умов, достатніх для справедливості співвідношення

$$L(\sigma) = (1 + o(1)) \lambda_{\nu(\sigma)} \quad /2/$$

при $\sigma \rightarrow -0$ зовні виняткової множини. У працях [1,4] наведена ціла низка таких тверджень. Однак, як бачимо в замітці [3], теореми 1.5.25 і 1.6.25 [4, с. 285-287], а також теорема 5 [4] /тобто, всі твердження, що стосуються співвідношення /3/ в описаній ситуації/ неправильні.

У цій статті вкажемо на те, якого типу умови забезпечують справедливість співвідношення /2/. Справджується наступна теорема.

Теорема. Нехай для функції $F \in H(\Lambda)$ виконуються умови

$$(\exists \vartheta > 1): \lim_{\sigma \rightarrow -0} |\sigma|^{\vartheta} \ln \mu(\sigma, F) > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^{1/(1+\vartheta)} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k \lambda_k} = 0.$$

Тоді співвідношення /2/ виконується при $\sigma \rightarrow -0$ ($\sigma \in [-1; 0) \setminus E$), E - множина нижньої нульової щільності в точці $\sigma=0$, тобто

$$dE \stackrel{\text{det}}{=} \lim_{\sigma \rightarrow -0} \frac{1}{|\sigma|} \text{meas}(E \cap [\sigma, 0)) = 0.$$

Доведення теореми спирається на лему, яка є простим наслідком леми 1 [2].

Лема 1. При виконанні умов теореми знайдеться функція $C(t) \uparrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$) і множина E ($dE=0$), такі, що для всіх $n \geq 0$ і всіх $\sigma \in [-1; 0) \setminus E$

$$|a_n| e^{\sigma \lambda_n} \leq \mu(\sigma, F) \exp \left\{ - \int_{\lambda_{\nu(\sigma)}}^{\lambda_n} (\lambda_n - t) t^{-2} C(t) \ln n(4t) dt \right\}, \quad /3/$$

$$n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1.$$

Використовуючи співвідношення /3/, подібно як і в [5], встановлюємо, що

$$F'(s) = \lambda_{\nu(\sigma)} (1 + o(1)) F(s) \quad /4/$$

при $\sigma \rightarrow -0$ ($\sigma \notin E$, $dE=0$) для всіх s , таких, що

$$\text{Re } s = \sigma, |F(s)| = (1 + o(1)) M(\sigma, F) \quad (\sigma \rightarrow +\infty). \quad /5/$$

Залишилось скористатись лемою, що є наслідком теореми 2.2.25 [4, с. 274].

Лема 2. Нехай $F \in H(\Lambda)$. Якщо $\lambda = \lim_{\sigma \rightarrow -0} \ln L(\sigma) / \ln \frac{1}{|\sigma|} > 1$, то співвідношення /4/ справджується при $\sigma \rightarrow -0$ ($\sigma \notin E_1$ - скінченної логарифмічної міри, тобто $\int_{E_1 \cap [-1; 0]} \frac{1}{|\sigma|} d\sigma < +\infty$) для всіх δ таких, що виконується умова /5/.

Зауважимо тепер, що при виконанні умов теореми $\lambda \geq \varrho > 1$, тому скориставшись лемами 1 і 2, одержимо, що співвідношення /2/ справджується при $\sigma \rightarrow -0$ ($\sigma \notin E \cup E_1$). Для завершення доведення теореми залишилось зауважити, що

$$\int_{E_1 \cap [-R, 0]} \frac{1}{|\sigma|} d\sigma \geq \frac{1}{R} \text{meas}(E_1 \cap [-R, 0])$$

і тому

$$d(E \cup E_1) = 0.$$

1. Дагген Е. О центральном показателе ряда Дирихле // Лит. мат. сб. 1968. Т.8. № 3. С. 503-520. 2. Скаскив О.Б. К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т.53. № 4. С.833-850. 3. Скаскив О.Б. Про центральний показник абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле // Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. 1993. Вип. 2. С. 35-40. 4. Стрелиц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. Вильнюс: Минтис, 1972. 5. Шеремета М.Н. О производной целого ряда Дирихле // Мат. сб. 1988. Т.137 /179/. № 1 /9/. С. 128-139. 6. Doetsch G. Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf Geraden // Math. Zeitschr. 1920. Bd.8. S.237-240.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.94

УДК 517.53

Я.Я.Притула

ПРО МАКСИМУМ МОДУЛЯ

І МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

1. Для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ і $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n > 0\}$. Неважко показати, що $M_f(r) = \mu_f(r(1+o(1)))$, $r \rightarrow \infty$, а це співвідношення використовується в загальній теорії функцій, особливо у працях Б.В.Винницького [1-3].

© Притула Я.Я., 1996

Безпосереднім узагальненням цілої функції є цілий /абсолютно збіжний в $\mathbb{C}$ / ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it, \quad /1/$$

де послідовність $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ - невід'ємна і зростаюча до $+\infty$. Клас таких функцій F позначимо через $S(\Lambda)$, і нехай $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, а $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ - максимальний член ряду /1/. Аналог наведеного вище співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом цілої функції для цілого ряду Діріхле /1/ має вигляд

$$M(\sigma, F) = \mu(\sigma + o(1), F), \quad \sigma \rightarrow \infty. \quad /2/$$

Це співвідношення виконується /1/, якщо $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$. Тому природним є поставлене Б.В.Винницьким питання про істотність останньої умови для виконання співвідношення /2/. Відповідь на це питання, при $\tau = 0$, впливає з такої теореми.

Теорема 1. Нехай $\tau \in [0, +\infty)$. Для того щоб для кожної функції $F \in S(\Lambda)$ справджувалось співвідношення

$$M(\sigma, F) \leq \mu(\sigma + \tau + o(1), F), \quad \sigma \rightarrow \infty \quad /3/$$

необхідно і досить, щоб

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln n = \tau. \quad /4/$$

З теореми 1 бачимо, що якщо $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, то $M(\sigma, F) \leq \mu(2\sigma, F)$ для всіх досить малих σ . Якщо ж

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln n = \infty, \quad /5/$$

то не можна вказати сталої $\Lambda \in [1, +\infty)$, такої, щоб для кожної $F \in S(\Lambda)$ виконувалась нерівність $M(\sigma, F) \leq \mu(\Lambda\sigma, F)$ для всіх $\sigma \geq \sigma_0$. Про це свідчить така теорема.

Теорема 2. Для кожної послідовності Λ , яка задовольняє умову /5/, і сталої $\Lambda \in [1, +\infty)$ існують функція $F \in S(\Lambda)$ і зростаюча до $+\infty$ послідовність (σ_j) , такі, що

$$M(\sigma_j, F) \gg \mu(\Lambda\sigma_j, F). \quad /6/$$

2. При доведенні теорем 1 і 2 використовуємо лему, доведену М.М.Шереметом [6].

Лема 1. З кожної послідовності Λ , для якої

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} > \Lambda > 0$$

можна виокремити підпослідовність $\Lambda^* = (\lambda_k^*)$ таку, що

$$\ln k \leq A \lambda_k^* + 1 \quad /7/$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$

$$\ln k_j \geq A \lambda_{k_j}^* \quad /8/$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Нам потрібне також одне узагальнення леми 1.

Лема 2. Якщо послідовність Λ задовольняє умову /5/, то існують додатна повільно зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція ψ і підпослідовність $\Lambda^* = (\lambda_k^*) \subset \Lambda$, такі, що

$$\ln k \leq \lambda_k^* \psi(\lambda_k^*) + 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad /7'/$$

і

$$\ln k_j \geq \lambda_{k_j}^* \psi(\lambda_{k_j}^*) \quad /8'/$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Дійсно, з умови /5/ випливає існування додатної повільно зростаючої до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функції ψ такої, що

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \psi(\lambda_n)} > 1. \quad /9/$$

Подальше доведення леми 2 таке ж, як і доведення леми 1. Досить усяди в /6/ замість Λ ставити $\psi(\lambda_k)$.

3. Доведемо теорему 1. У праці [5, с. 184] показано, що якщо виконується умова /4/, то для кожного $\varepsilon > 0$ при $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$ справедлива нерівність $M(\sigma, F) \leq \mu(\sigma + \varepsilon, F)$, і отже, достатність умови /4/ доведена.

Припустимо тепер, що умова /4/ не виконується, тобто

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = R > \tau.$$

Тоді, якщо $\tau < A < B$, то за лемою 1 існує підпослідовність $\Lambda^* = (\lambda_k^*)$ послідовності Λ , для якої виконуються нерівності /7/ і /8/. Прийmemo $a_n = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda_k^*$ і $a_n = a_k^*$ при $\lambda_n = \lambda_k^*$, де $a_k^* = \exp\{-\lambda_k^* \ln \lambda_k^*\}$. Так прийдемо до ряду Діріхле

$$F_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\lambda_k \ln \lambda_k + s \lambda_k\},$$

де, для простоти, $\lambda_k = \lambda_k^*$. Оскільки $\ln k = O(\lambda_k^*)$, $k \rightarrow \infty$, то цей ряд Діріхле є цілим.

Легко бачити і це добре відомо, що $\ln \mu(\sigma, F_1) \leq \exp(\sigma - 1)$. Далі, якщо прийmemo $q_j = [\frac{1}{2} k_j]$, то завдяки /7/ і /8/,

$$\lambda_{q_j} \geq \frac{1}{A} (\ln q_j - 1) \geq \frac{1}{A} (\ln k_j - 3) \geq \frac{1}{A} (A \lambda_{k_j} - 3) = \lambda_{k_j} - \frac{3}{A}.$$

Тому

$$\begin{aligned} M(\sigma, F_1) &\geq \sum_{q_j \leq k \leq k_j} \exp \{-\lambda_k \ln \lambda_k + \sigma \lambda_k\} \geq \\ &\geq \frac{k_j}{2} \exp \{-\lambda_{k_j} \ln \lambda_{k_j} + \sigma \lambda_{q_j}\} \geq \\ &\geq \frac{k_j}{2} \exp \{-\lambda_{k_j} \ln \lambda_{k_j} + \sigma \lambda_{k_j} - \frac{3\sigma}{A}\}, \end{aligned}$$

отже,

$$M(\sigma, F_1) \geq \exp \{-\lambda_{k_j} \ln \lambda_{k_j} + (\sigma + A) \lambda_{k_j} - \frac{3\sigma}{A} - \ln 2\}.$$

Якщо тепер виберемо $\sigma_j = \ln \lambda_{k_j} - A + 1$ ($j \geq j_0$), то матимемо

$$\begin{aligned} \ln M(\sigma_j, F_1) &\geq \lambda_{k_j} - \frac{3\sigma_j}{A} - \ln 2 = \\ &= \exp \{\sigma_j + A - 1\} - \frac{3\sigma_j}{A} - \ln 2 \geq \\ &\geq \ln \mu(\sigma_j + A, F_1) - \frac{3\sigma_j}{A} - \ln 2. \end{aligned}$$

Оскільки $\frac{1}{\sigma} \ln \mu(\sigma, F) \rightarrow +\infty$ ($\sigma \rightarrow \infty$), для кожного цілого ряду Діріхле і $\ln \mu(\sigma, F)$ — опукла функція, то $\ln \mu(\sigma_j + A) + O(\sigma) = \ln \mu(\sigma_j + A + o(1))$, $\sigma \rightarrow \infty$. Тому

$$\ln M(\sigma_j, F_1) \geq \ln \mu(\sigma_j + A + o(1), F_1), \quad j \rightarrow \infty,$$

тобто для функції F_1 співвідношення /З/ не виконується. Теорема I доведена.

4. Нарешті, доведемо теорему 2. Нехай функція ψ і послідовність $\Lambda^* \subset \Lambda$ такі, як у лемі 2. Як і при доведенні теореми I, приймемо $a_n = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda_k^*$ і $a_n = a_k^*$ при $\lambda_n = \lambda_k^*$, де $a_k^* = \exp\{-(1+q)\lambda_k^* \psi(\lambda_k^*)\}$, $q > 0$ — довільне число, вибір якого зробимо пізніше. Таким чином, прийдемо до ряду

$$F_2(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-(1+q)\lambda_k \psi(\lambda_k) + \sigma \lambda_k\},$$

де, для простоти, $\lambda_k = \lambda_k^*$. Завдяки /8°/ цей ряд Діріхле є цілим.

Зрозуміло, що $\ln \mu(\sigma, F_2) \leq \max \{\Psi(t) : t \geq 0\}$, де $\Psi(t) = -(1+q)t \psi(t) + \sigma t$. Оскільки $\Psi'(t) = -(1+q)\psi(t) - (1+q)\psi'(t)t + \sigma$ і ψ — повільно зростаюча функція, то

$$\ln \mu(\sigma, F_2) \leq t_0 \{-(1+q)\psi(t_0(\sigma)) + \sigma\} = (1+q)\psi'(t_0(\sigma))t_0^2(\sigma),$$

де $t_0(\sigma)$ - розв'язок рівняння $\psi(t) + t\psi'(t) = \frac{\sigma}{1+q}$. Легко бачити, що $\psi(t_0(\sigma)) \leq \frac{\sigma}{1+q}$, тобто $t_0(\sigma) \leq \psi^{-1}(\frac{\sigma}{1+q})$, і отже,

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma, F_2) &\leq (1+q) \frac{t_0(\sigma)\psi'(t_0(\sigma))}{\psi(t_0(\sigma))} \psi(t_0(\sigma))t_0(\sigma) = \\ &= o\left(\sigma \psi^{-1}\left(\frac{\sigma}{1+q}\right)\right), \quad \sigma \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

/10/

З іншого боку, якщо (k_j) - послідовність з леми 2, то, як і при доведенні теореми I,

$$M(\sigma, F_2) \geq \frac{k_j}{2} \exp\{-\lambda_{k_j}(1+q)\psi(\lambda_{k_j}) + \sigma\lambda_{q_j}\},$$

де $q_j = [\frac{1}{2} k_j]$ і, завдяки /7'/ і /8'/,

$$\lambda_{q_j} \geq \frac{\ln q_j - 1}{\psi(\lambda_{q_j})} \geq \frac{\ln k_j - 3}{\psi(\lambda_{k_j})} \geq \lambda_{k_j} - \frac{3}{\psi(\lambda_{k_j})}.$$

Отже, завдяки /8'/,

$$\ln M(\sigma, F_2) \geq -(1+q)\lambda_{k_j}\psi(\lambda_{k_j}) + \sigma\lambda_{k_j} - \frac{3\sigma}{\psi(\lambda_{k_j})} +$$

$$+ \lambda_{k_j}\psi(\lambda_{k_j}) - \ln 2 = (\sigma\lambda_{k_j} - q\lambda_{k_j}\psi(\lambda_{k_j})) - \frac{3\sigma}{\psi(\lambda_{k_j})} - \ln 2.$$

/11/

Приймемо $\sigma_j = \eta\psi(\lambda_{k_j})$, де η - довільне число, $\eta > q$, вибір якого також зробимо пізніше. Тоді з /10/ і /11/ маємо

$$\ln M(\sigma_j, F_2) \geq (q - \eta)\lambda_{k_j}\psi(\lambda_{k_j}) - 3\eta - \ln 2 =$$

$$= (q - \eta)\frac{\sigma_j}{\eta}\psi^{-1}\left(\frac{\sigma_j}{\eta}\right) - 3\eta - \ln 2 =$$

$$= \frac{q - \eta}{1 + q} \frac{\sigma_j(1 + q)}{\eta} \psi^{-1}\left(\frac{\sigma_j}{1 + q} \frac{1 + q}{\eta}\right) - 3\eta - \ln 2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{\varepsilon} \ln \mu\left(\frac{\sigma_j(1 + q)}{\eta}, F_2\right), \quad \sigma \geq \sigma_0(\varepsilon),$$

де $\varepsilon > 0$ - довільне число. І якщо візьмемо $\varepsilon = 1$, $\eta = 2q$ і $q = \frac{1}{2A-1}$, то звідти отримаємо /6/. Теорема 2 доведена.

На завершення зауважимо, що залишається відкритим питання,

чи можна в нерівності /6/ замість сталої A поставити $\alpha(\sigma)$, де α - зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція.

1. Винницький Б.В. О представлении функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(\lambda_n x)$ // Укр. мат. журн. 1979. Т.31. № 3. С. 256-265.
2. Винницький Б.В. О рядах по системе $\{f(\lambda_n x)\}$ // Мат. заметки. 1987. Т.29. №4. С.503-516. 3. Винницький Б.В. Об описании базисов из обобщенных систем экспонент // Мат. сб. 1988. Т.135 /177/. № 1. С. 59-79. 4. Винницький Б.В., Шеремета М.М. Асимптотична поведінка коефіцієнтів рядів Діріхле, що задають цілі функції // Укр. мат. журн. 1975. Т. 27. № 2. С. 147-157. 5. Леонт'єв А.Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. 536 с. 6. Шеремета М.М. Про одне співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом цілого ряду Діріхле // Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. 1994. Вип. 3. С. 78-83.

Стаття надійшла до редколегії 05.10.94

УДК 531

П.П.Доманський
ПРО УМОВИ СТІЙКОСТІ РУХУ ПРУЖНИХ ТІЛ
ЗА ДВОМА МІРАМИ

При дослідженні стійкості руху пружних систем найчастіше застосовують методику заміни шуканих функцій зліченною, або, наближено, скінченною кількістю параметрів. У цьому напрямі одержана велика кількість результатів, які систематизовані в монографіях [1-3, 8].

У даній праці вивчаються умови стійкості руху пружних тіл за двома мірами на основі теорем прямого методу Ляпунова для процесів з розподіленими параметрами [4-7].

Розглянемо пружне тіло K - систему неперервно розподілених взаємодіючих матеріальних точок. Задамося деякою фіксованою конфігурацією цього тіла, яку назовемо початковою. Місце частинки в цій початковій конфігурації будемо задавати радіус-вектором $\vec{r}_0$ - неперервною і потрібною кількістю разів диференційованою вектор-функцією $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(q^1, q^2, q^3) \equiv \vec{r}_0(q)$, де $\{q^i\}$ - лагранжеві координати. Рух тіла у будь-який момент часу τ задається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3, \tau) \equiv \vec{r}(q, \tau)$. Цим визначається актуальна конфігурація тіла.

Область тіла і поверхню, що його обмежує, в початковій конфігурації позначимо через X_0 і ∂X_0 , а в актуальній конфігурації - через X і ∂X відповідно. Густина матеріалу в початковій

© Доманський П.П., 1996

та актуальній конфігурації будемо позначати через ρ_0 і ρ .
Тоді, згідно із законом збереження маси,

$$dm = \rho dV = \rho_0 dV_0, \quad /1/$$

де dV і dV_0 - елементарні об'єми в актуальній і початковій конфігураціях.

Вектор переміщення із початкової конфігурації в актуальну позначимо $\vec{u}_0$, тобто $\vec{u}_0 = \vec{r} - \vec{r}_0$.

Вектор масових сил, віднесений до одиниці маси, позначимо через $\vec{K}$, тому, згідно з /1/,

$$\vec{K} dm = \rho \vec{K} dV = \rho_0 \vec{K} dV_0 - \quad /2/$$

сила, прикладена до елементарної маси; $\rho \vec{K}$ - сила, розрахована на одиницю об'єму /об'ємна сила/.

Одиничний вектор зовнішньої нормалі до ∂X позначимо через $\vec{n}$, одиничний вектор зовнішньої нормалі до ∂X_0 - через $\vec{n}_0$.

Поверхневу силу, віднесену до одиниці площі на ∂X , позначимо через $\vec{f}$, а віднесену до одиниці площі в початковій конфігурації - $\vec{f}_0$.

Розглянемо як "мертве", так і "слідкуюче" навантаження. При "мертвому" навантаженні

$$\vec{f} d\Sigma = \vec{f}_0 d\Sigma_0. \quad /3/$$

Тут $d\Sigma$ і $d\Sigma_0$ - елементарні площі в актуальній і початковій конфігураціях. Прикладом "слідкуючого" навантаження є гідростатичний тиск p :

$$\vec{f} = -p\vec{n}. \quad /4/$$

Вектор напруження, який діє на нескінченно малій орієнтованій площинці $\vec{n} d\Sigma$ будемо позначати $\vec{\sigma}_n$. Як відомо, тензор напружень Коші $\hat{\sigma}$ вводиться співвідношенням

$$\vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot \hat{\sigma}. \quad /5/$$

Рівняння руху Коші має вигляд

$$\vec{\nabla} \hat{\sigma} + \rho \vec{K} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial t^2}. \quad /6/$$

Тут $\vec{\nabla}$ - набла-оператор, визначений у базі актуальної конфігурації. При цьому гранична умова на поверхні ∂X

$$\vec{\sigma}_n \equiv \vec{n} \cdot \hat{\sigma} = \vec{f}. \quad /7/$$

При розгляді задач стійкості опис напруженого стану тензором Коші $\hat{\sigma}$, який визначений в актуальній конфігурації, утруднюється тим, що ця конфігурація наперед невідома, тоді як початкова конфігурація входить до складу початкових даних. У зв'язку з цим вводиться тензор Піоли-Кірхгофа $\hat{\rho}_0$, який визначений у початковій конфігурації співвідношеннями

$$\vec{\sigma}_n d\Sigma = \vec{\rho}_{n_0} d\Sigma_0, \quad \vec{\rho}_{n_0} = \vec{n}_0 \cdot \hat{\rho}_0. \quad /8/$$

Рівняння руху, записані через тензор $\hat{\rho}_0$, набирають вигляду

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\rho}_0 + \varrho_0 \vec{K} = \varrho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial \tau^2}. \quad /9/$$

Тут $\vec{\nabla}_0$ - набла-оператор у базі початкової конфігурації. При цьому граничній умові /7/ відповідає умова на поверхні $\partial\chi_0$:

$$\vec{\rho}_{n_0} \equiv \vec{n}_0 \cdot \hat{\rho}_0 = \vec{f} \frac{d\Sigma}{d\Sigma_0}. \quad /10/$$

Для "мертвого" поверхневого навантаження

$$\vec{\rho}_{n_0} \equiv \vec{n}_0 \cdot \hat{\rho}_0 = \vec{f}_0. \quad /11/$$

Як тензор деформації будемо розглядати тензор $\hat{e}_0$, який визначається через вектор переміщення формулою

$$\hat{e}_0 = \vec{u}_0 \vec{\nabla}_0 = (\vec{\nabla}_0 \vec{u})^T. \quad /12/$$

Виведемо рівняння стійкості. Нехай у початковий момент часу $\tau = \tau_0$ задано поле вектора переміщення $\vec{\psi}(q)$ і поле вектора швидкості $\vec{\eta}(q)$. Рух тіла будемо характеризувати параметрами: $\hat{\rho}_0$ - тензор напружень Піоли-Кірхгофа, $\hat{e}_0$ - тензор деформації, $\vec{u}_0$ - вектор переміщення. Ці параметри пов'язані між собою рівняннями руху, рівняннями стану, граничними і початковими умовами у вигляді

$$\vec{\nabla}_0 \hat{\rho}_0 + \varrho_0 \vec{K} = \varrho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}_0}{\partial \tau^2}; \quad /13/$$

$$\hat{\rho}_0 = \hat{T}(\hat{e}_0^T), \quad \hat{e}_0 = \vec{u}_0 \vec{\nabla}_0; \quad /14/$$

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{\rho}_0|_{\partial\chi_0} = \vec{f} \frac{d\Sigma}{d\Sigma_0}; \quad /15/$$

$$\vec{u}_0|_{\tau=\tau_0} = \vec{\psi}, \quad \frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \tau}|_{\tau=\tau_0} = \vec{\eta}. \quad /16/$$

Тут $\hat{T}$ - тензорна функція тензорного аргумента, що характеризує зв'язок між тензором напружень і тензором деформацій для матеріалу тіла K . Систему параметрів $\hat{\rho}_0, \hat{e}_0, \vec{u}_0$ будемо називати базовим розв'язком. Надамо початковим умовам деяких збурень. У момент часу τ унаслідок цього виникне нова конфігурація тіла K . Величини в цій конфігурації будемо позначати зірочкою знизу, зокрема $\hat{\rho}_*, \hat{e}_*, \vec{u}_*$ - тензор напружень Піоли-Кірхгофа, тензор деформації і вектор переміщення із початкової конфігурації в нову конфігурацію. Будемо вважати, що параметри $\hat{\rho}_*, \hat{e}_*, \vec{u}_*$ пов'язані співвідношеннями:

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\rho}_* + \varrho_0 \vec{K}_* = \varrho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}_*}{\partial \tau^2}; \quad /17/$$

$$\hat{\rho}_* = \hat{T}(\hat{e}_*^T), \quad \hat{e}_* = \vec{u}_* \vec{\nabla}_0; \quad /18/$$

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{\rho}_*|_{\partial \chi_0} = \vec{f}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0}; \quad /19/$$

$$\vec{u}_*|_{\tau=\tau_0} = \vec{\psi} + \vec{e}_0, \quad \frac{\partial \vec{u}_*}{\partial \tau}|_{\tau=\tau_0} = \vec{\eta} + \vec{e}_1. \quad /20/$$

Систему параметрів $\hat{\rho}_*, \hat{e}_*, \vec{u}_*$ будемо називати збуреним розв'язком. Відхилення параметрів збуреного розв'язку від базового позначатимемо тими ж символами без індексів:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_* - \hat{\rho}_0, \quad \hat{e} = \hat{e}_* - \hat{e}_0, \quad \vec{u} = \vec{u}_* - \vec{u}_0. \quad /21/$$

Із /21/ знаходимо

$$\hat{\rho}_* = \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}, \quad \hat{e}_* = \hat{e}_0 + \hat{e}, \quad \vec{u}_* = \vec{u}_0 + \vec{u}. \quad /22/$$

Якщо підставити ці значення в /17/-/20/ і врахувати, що для базового розв'язку виконуються співвідношення /13/-/16/, то отримаємо

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\rho} + \varrho_0 (\vec{K}_* - \vec{K}_0) = \varrho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}; \quad /23/$$

$$\hat{\rho} = \hat{T}(\hat{e}_0^T + \hat{e}^T) - \hat{T}(\hat{e}_0^T), \quad \hat{e} = \vec{u} \vec{\nabla}_0; \quad /24/$$

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{\rho}|_{\partial \chi_0} = \vec{f}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{f} \frac{d\Sigma}{d\Sigma_0}; \quad /25/$$

$$\vec{u}|_{\tau=\tau_0} = \vec{e}_0, \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}|_{\tau=\tau_0} = \vec{e}_1. \quad /26/$$

Надалі будемо розглядати "мертве" навантаження масовими силами, тобто $\vec{K}_* = \vec{K}_0$

Систему рівнянь /23/-/25/ для цього випадку

$$\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{\rho} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2}; \quad /27/$$

$$\hat{\rho} = \hat{T}(\hat{e}_0^T + \hat{e}^T) - \hat{T}(\hat{e}_0^T), \quad \hat{e} = \vec{u} \vec{\nabla}_0; \quad /28/$$

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{\rho}|_{\partial \chi_0} = \vec{f}_* \frac{d \Sigma_*}{d \Sigma_0} - \vec{f} \frac{d \Sigma}{d \Sigma_0} \quad /29/$$

будемо називати рівняннями стійкості.

Якщо і поверхневе навантаження буде прийматися "мертвим", то

$$\vec{f}_* d \Sigma_* = \vec{f} d \Sigma = \vec{f}_0 d \Sigma_0 \quad /30/$$

і гранична умова /29/ запишеться у вигляді

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{\rho}|_{\partial \chi_0} = 0. \quad /31/$$

Введемо функцію $\varphi(q, \tau) = (\hat{\rho}(q, \tau), \hat{e}(q, \tau), \vec{u}(q, \tau))$, яка характеризує відхилення збуреного розв'язку від базового. Зокрема, якщо $\varphi = 0$, то збурений розв'язок збігається з базовим /незбуреним розв'язком/.

Задамо дві міри відхилення збуреного розв'язку від незбуреного. Відхилення збуреного розв'язку від незбуреного в початковий момент часу $\tau = \tau_0$ будемо характеризувати мірою

$$\varrho_n[\varphi(\cdot, \tau)] = \int_{\chi_0} \left(\frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + |\hat{\rho} \cdot \hat{e}| \right) dV_0. \quad /32/$$

Далі, при $\tau > \tau_0$, поведінку об'єкта дослідження характеризуватимемо мірою

$$\varrho_A[\varphi(\cdot, \tau)] = \int_{\chi_0} \left(\alpha^2 \vec{u}^2 + \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + |\hat{\rho} \cdot \hat{e}| \right) dV_0. \quad /33/$$

ϱ_n і ϱ_A - два невід'ємних функціонали, які кожному збуренню $\varphi(q, \tau)$ з наперед заданої множини збурень Φ ставлять у відповідність у будь-який момент часу $\tau \geq \tau_0$ число, що характеризує міру відхилення збуреного розв'язку від базового. Очевидно, що $\varrho_n[0] = 0$ і $\varrho_A[0] = 0$. Міра ϱ_A є неперервною в момент часу $\tau = \tau_0$ за мірою ϱ_n при $\varrho_n = 0$, тобто $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \varphi \in \Phi) \times$
 $\times [\varrho_n[\varphi(\cdot, \tau_0)] < \delta \Rightarrow \varrho_A[\varphi(\cdot, \tau_0)] < \varepsilon]$.

Незбурений розв'язок $\varphi = 0$ будемо називати стійким за двома мірами ϱ_n і ϱ_A , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \tau_0 \in [0, T_0])(\exists \delta > 0)(\forall \varphi \in \Phi)(\forall \tau > \tau_0)$$

$$[\varrho_n[\varphi(\cdot, \tau_0)] < \delta \Rightarrow \varrho_A[\varphi(\cdot, \tau)] < \varepsilon].$$

Сформулюємо достатні умови стійкості незбуреного розв'язку $\varphi = 0$ за двома мірами ϱ_n і ϱ_A , які визначаються формулами /32/ і /33/.

У працях [4-7] показано, що для стійкості за двома мірами ϱ_n і ϱ_A незбуреного розв'язку $\varphi = 0$ необхідно і досить, щоб існував додатно визначений за мірою ϱ_A , неперервний у момент часу $\tau = \tau_0$ за мірою ϱ_n при $\varrho_n = 0$ і незростаючий уздовж збурень функціонал $V = V[\varphi(\cdot, \tau), \tau]$. У зв'язку з цим розглянемо функціонал

$$V[\varphi(\cdot, \tau), \tau] = \int_{X_0} \left[\frac{\varrho_0}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + |\hat{p} \cdot \hat{e}| - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial \hat{p}(q, s)}{\partial s} \cdot \hat{e}(q, s) ds \right] dV_0. \quad /34/$$

Оскільки

$$\begin{aligned} |V[\varphi(\cdot, \tau_0), \tau_0]| &= \left| \int_{X_0} \left[\frac{\varrho_0}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + \hat{p} \cdot \hat{e} \right] dV_0 \right|_{\tau=\tau_0} \leq \\ &\leq \int_{X_0} \left[\alpha^2 \vec{u}^2 + \frac{\varrho_0}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)^2 + |\hat{p} \cdot \hat{e}| \right] dV_0 \Big|_{\tau=\tau_0} = \varrho_n[\varphi(\cdot, \tau_0)], \end{aligned}$$

то V неперервний при $\tau = \tau_0$ по ϱ_n при $\varrho_n = 0$.

Обчислимо $\frac{dV}{d\tau}$.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} &= \int_{X_0} \left[\hat{p} \cdot \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} + \varrho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \right] dV_0 = \\ &= \int_{X_0} \left[\vec{\nabla}_0 \cdot \left(\hat{p} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right) - (\vec{\nabla}_0 \cdot \hat{p}) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \varrho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \right] dV_0 = \\ &= \int_{X_0} \left[\varrho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} - \vec{\nabla}_0 \cdot \hat{p} \right] \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} dV_0 + \int_{\partial X_0} \vec{n}_0 \cdot \hat{p} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} d\Sigma_0. \quad /35/ \end{aligned}$$

Оскільки для збурень виконується умова /27/, то вздовж збурень

$$\frac{dV}{d\tau} = \int_{\partial x_0} \vec{n}_0 \cdot \hat{p} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} d\Sigma_0. \quad /36/$$

Якщо використати також умову /29/, то одержимо

$$\frac{dV}{d\tau} = \int_{\partial x_0} \left(\vec{f}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{f} \frac{d\Sigma}{d\Sigma_0} \right) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} d\Sigma_0. \quad /37/$$

При "мертвому" поверхневому навантаженні маємо

$$\frac{dV}{d\tau} = 0. \quad /38/$$

Отже, V – стаціонарний вздовж збурень функціонал при "мертвому" поверхневому навантаженні. При інших навантаженнях V є незростаючим, якщо виконується умова

$$\int_{\partial x_0} \left(\vec{f}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{f} \frac{d\Sigma}{d\Sigma_0} \right) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} d\Sigma_0 \leq 0. \quad /39/$$

Якщо функціонал V записати у вигляді

$$V[\varphi(\cdot, \tau), \tau] = \varphi_A[\varphi(\cdot, \tau)] + \int_{x_0} \left[\hat{p} \cdot \hat{e} - |\hat{p}| \cdot \hat{e} - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial \hat{p}(q, s)}{\partial s} \cdot \hat{e}(q, s) ds \right] dV,$$

то можна зробити висновок, що він додатно визначений за мірою φ_A , якщо виконується умова

$$\int_{x_0} \left[\hat{p} \cdot \hat{e} - |\hat{p}| \cdot \hat{e} - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial \hat{p}(q, s)}{\partial s} \cdot \hat{e}(q, s) ds \right] dV_0 \geq 0.$$

Така умова виконується, зокрема, якщо

$$\hat{p} \cdot \hat{e} \geq 0, \quad \frac{\partial \hat{p}}{\partial \tau} \cdot \hat{e} \leq 0.$$

Отже, якщо при поверхневому навантаженні $\vec{f}$ для будь-якого $\tau > \tau_0$ виконуються нерівності

$$\int_{\partial x_0} \left(\vec{f}_* \frac{d\Sigma_*}{d\Sigma_0} - \vec{f} \frac{d\Sigma}{d\Sigma_0} \right) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} d\Sigma_0 \leq 0, \quad /40/$$

$$\int_{x_0} \left[\hat{p} \cdot \hat{e} - |\hat{p}| \cdot \hat{e} - \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial \hat{p}(q, s)}{\partial s} \cdot \hat{e}(q, s) ds \right] dV_0 \geq 0, \quad /41/$$

то базовий розв'язок є стійким за двома мірами φ_n і φ_A , що визначаються формулами /32/, /33/. Якщо до того ж поверхнєве навантаження $\vec{f}$ є "мертвим", то для стійкості за двома мірами базового розв'язку достатньо виконати умови /41/.

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с. 2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с. 3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с. 4. Мовчан А.А. Устойчивость процессов по двум метрикам // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988-1001. 5. Мовчан А.А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 483-493. 6. Мовчан А.А. Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение // Инж. сб. 1960. Т. 29. С. 3-20. 7. Мовчан А.А. Об устойчивости процессов деформирования сплошных тел // *Archiwum mechaniki stosowanej*. 1963. Т. 15. № 5. С. 559-682. 8. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.

Стаття надійшла до редколегії 22.04.94

УДК 539.375

О.О.Бвтушенко, В.М.Зеленяк

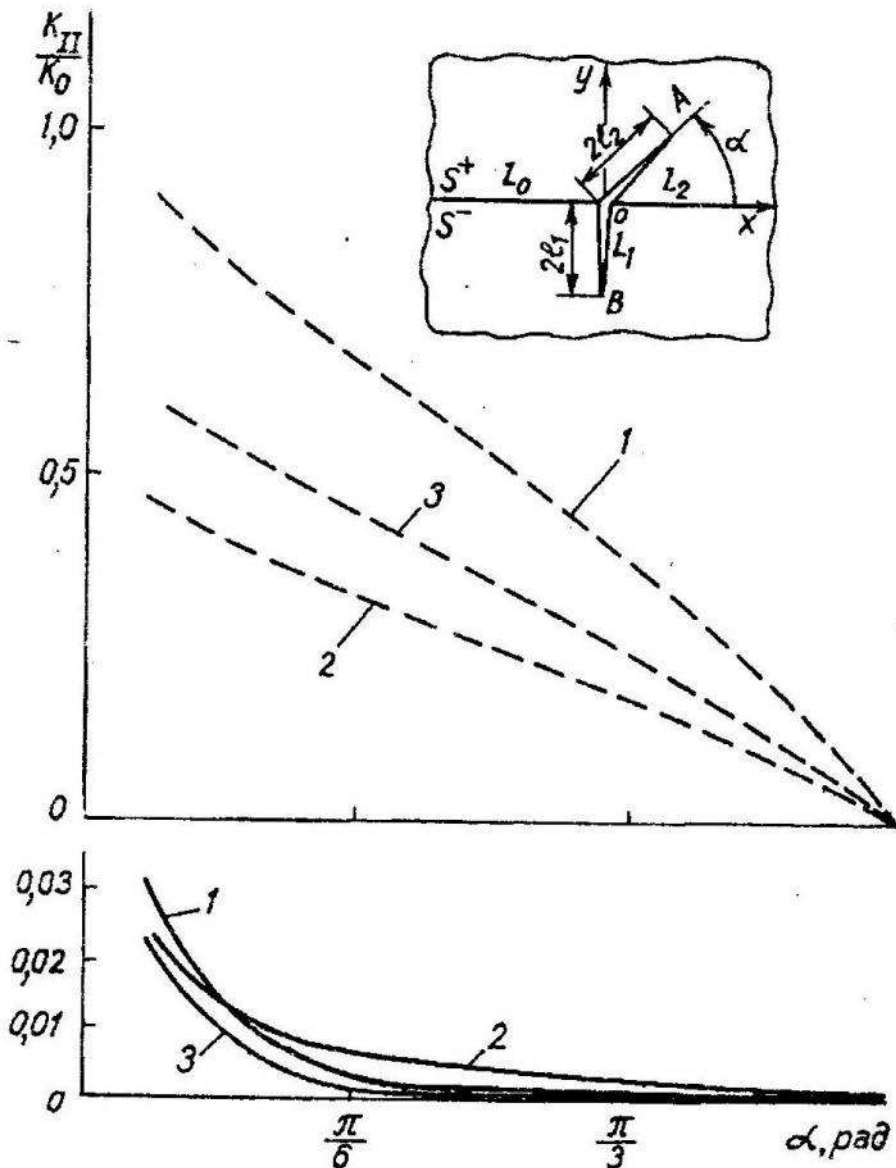
ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН СКЛАДЕНОЇ ПЛАСТИНИ, ПОСЛАБЛЕНОЇ ЛАМАНОЮ ТРІЩИНОЮ

Задачі про визначення температурних полів і напружень у двох спаяних різнорідних півплощинах, які містять криволінійні вклучення і тріщини [4] або лише тріщини [1], розв'язувались раніше. Розглянемо випадок перетину дволанкової ламаної тріщини з межею поділу різнорідних півплощин. Аналогічна задача поздовжнього зсуву досліджена у праці [2].

Розглянемо нескінченну площину, що складається з двох спаяних різнорідних ізотропних півплощин S^+ , S^- з межею поділу L_0 , які мають відповідно модулі зсуву G^+ , G^- і коефіцієнти Пуассона μ^+ , μ^- . Нижня півплощина послаблена перпендикулярним до L_0 основним розрізом L_1 завдовжки $2\ell_1$. Із правого кінця цього розрізу від лінії спаю L_0 відходить бічний розріз L_2 завдовжки $2\ell_2$ у верхню півплощину під кутом α до осі Ox , яка спрямована вздовж L_0 /див. схему на рис. 1/. Припустимо, що площина зазнає дії стаціонарного температурного поля $T(x, y)$; на лінії спаю L_0 існує ідеальний механічний контакт; береги ламаної тріщини не контактують і не навантажені.

Задача про визначення температурних напружень у такій області зводиться [4] до двох сингулярних інтегральних рівнянь,

© Бвтушенко О.О., Зеленяк В.М., 1996



які в безрозмірних координатах мають вигляд

$$\int_{-1}^1 [M_{11}(\xi, \eta) \varphi_1(\xi) + N_{11}(\xi, \eta) \overline{\varphi_1(\xi)} + M_{12}(\xi, \eta) \varphi_2(\xi) + \\ + N_{12}(\xi, \eta) \overline{\varphi_2(\xi)}] d\xi = 2\pi R_1^*(\eta), \quad |\eta| < 1;$$

/I/

$$\int_{-1}^1 [M_{21}(\xi, \eta) \varphi_1(\xi) + N_{21}(\xi, \eta) \overline{\varphi_1(\xi)} + M_{22}(\xi, \eta) \varphi_2(\xi) + \\ + N_{22}(\xi, \eta) \overline{\varphi_2(\xi)}] d\xi = 2\pi R_2^*(\eta), \quad |\eta| < 1.$$

Тут

$$\varphi_1(\xi) = a_1(l_1, \xi), \quad \varphi_2(\xi) = a_2(l_2, \xi);$$

$$R_1^*(\eta) = R_1(l_1, \eta); \quad R_2^*(\eta) = R_2(l_2, \eta);$$

$$M_{nk}(\xi, \eta) = l_k R_{nk}(l_k \xi, l_n \eta);$$

$$N_{nk}(\xi, \eta) = l_k S_{nk}(l_k \xi, l_n \eta), \quad k=1, 2, \quad n=1, 2;$$

$a_1, a_2, R_1, R_2, R_{nk}, S_{nk}$ - відомі із [4].

Система рівнянь /1/ розв'язується за умови, що забезпечує однозначність зміщень при обході контуру ламаної тріщини:

$$\frac{2iG^-}{1+\kappa^-} \int \varphi_1(\xi) d\xi + \frac{2\varepsilon G^+}{1+\kappa^+} \int e^{i\alpha} \varphi_2(\xi) d\xi = 0, \quad /2/$$

де $\varepsilon = l_2/l_1$, $\kappa^\pm = (3 - \mu^\pm)/(1 + \mu^\pm)$.

Коефіцієнти інтенсивності напружень K_I^+ і K_{II}^+ у лівій /-/ і правій /+/ вершинах ламаної тріщини знаходимо за формулою [3]

$$K_I^+ - iK_{II}^+ = \frac{\sqrt{\pi l_2}}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k U_2(\xi_k) \operatorname{ctg} \frac{2k-1}{4n} \pi;$$

$$K_I^- - iK_{II}^- = \frac{\sqrt{\pi l_1}}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} U_1(\xi_k) \operatorname{tg} \frac{2k-1}{4n} \pi, \quad /3/$$

$$\text{де } \varphi_1(\xi) = \frac{U_1(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}; \quad \varphi_2(\xi) = \frac{U_2(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Нехай розглядувана складена пластинка перебуває в умовах сталої температури $T(x, y) = T_0 = \text{const}$, яка, однак, не дорівнює температурі ненапруженого початкового стану. Тоді в рівняннях /1/

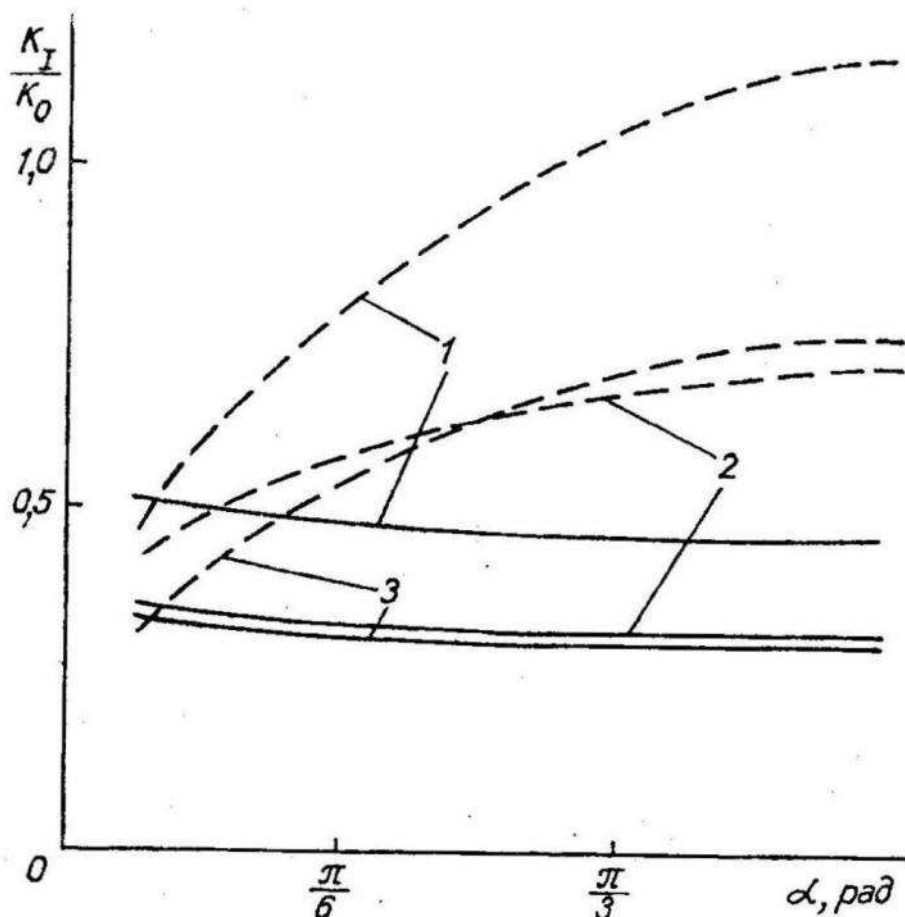
$$R_1^*(\eta) = G^- T_0 (\Gamma_0 \beta_-^t - \beta_+^t) / (G^- + \kappa^- G^+); \quad /4/$$

$$R_2^*(\eta) = G^- T_0 (\Gamma_0 \beta_-^t - \beta_+^t) / (G^+ + \kappa^+ G^-),$$

де $\Gamma_0 = G^+/G^-$; $\beta_\pm^t = \alpha_\pm^t E^\pm / (1 + \mu^\pm)$; $\alpha_\pm^t, E^\pm (\alpha_-^t, E^-)$ - коефіцієнт лінійного теплового розширення, модуль пружності верхньої /нижньої/ півплощини.

Числовий розв'язок системи /1/, /2/ з використанням /4/ одержаний методом механічних квадратур [3]. Слід зауважити, що тут не враховані особливості функцій $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ у вершині зламу, оскільки відомо [3], що порядок особливостей цих функцій у кутовій вершині завжди менший, ніж на кінцях розрізу.

На рис. 1, 2 зображені залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I і K_{II} /що віднесені до $K_0 = T_0 \beta_+^t \sqrt{\pi l_1} /$



від кута орієнтації бічної ланки α при $\kappa^- = \kappa^+ = 2$, $G^+/G^- = 2,5$. Криві 1 / $\epsilon = 1$, 2 / $\epsilon = 0,5$ - при $\alpha_+^t/\alpha_-^t = 5/2$; криві 3 / $\epsilon = 1$ - при $\alpha_+^t/\alpha_-^t = 5/3$. Суцільні лінії - права вершина верхньої ланки /вершина А/, штрихові - ліва вершина нижньої ланки /вершина В/. З обчислення бачимо, що K_I^+ і K_{II}^+ для обох вершин ламаної тріщини прямо пропорційні різниці коефіцієнтів теплового розширення півплощин $[\alpha_+^t - \alpha_-^t]$. Якщо бічна ланка розташована у більш жорсткій півплощині / $G^+ > G^-$ /, то максимум K_I^+ досягається з наближенням її до межі поділу матеріалів / $\alpha \rightarrow 0$ /, а K_I^- набуває максимального значення, коли ламана тріщина стає прямолінійною, яка перпендикулярно перетинає лінію спая матеріалів / $\alpha = \pi/2$ /. Коефіцієнти інтенсивності $K_{II}^{\pm}$ досягають максимуму одночасно з наближенням бічної ланки до межі поділу півплощин.

1. З а ш к и л ь н я к І.М. Термоупругое состояние кусочно-однородной плоскости, ослабленной произвольно-ориентированной трещиной //Мат. методы и физ.-мех. поля. 1976. № 3. С. 82-88.
2. З е л е н я к В.М. Продольный сдвиг двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами //Фіз.-

хім. механіка матеріалів. 1989. № 3. С. 75-78. 3. С а в р у к М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К., Наук. думка, 1981. 324 с. 4. С а в р у к М.П., З е л е н я к В.М. Плоская задача теплопроводности и термоупругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 1988. № 2. С. 23-28.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.93

УДК 539.3

Д.Г.Хлебніков, Р.М.Бурда, К.В.Вишневський

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ПРИКЛЕЄНОЮ ПЕРЕГОРОДНОЮ

Розглядається задача про напружено-деформований стан під дією заданого температурного поля тонкої циліндричної оболонки $/0 \leq x \leq L/$ радіуса R , всередині якої при $x = b$ приклеєна перегородка у вигляді тонкої круглої пластинки.

На контурі з'єднання пластинки, клейового прошарку та оболонки при $r=R$ справедливі геометричні умови рівності переміщень та кутів повороту оболонки $W(b)$, $W'(b)$ кільця u_k, φ_k та пластинки $u(R), \theta(R)$:

$$W(b) = u_k = u(R), \quad W'(b) = \varphi_k = -\theta(R). \quad /1/$$

Осесиметричний напружено-деформований стан циліндричної оболонки з вільними краями описується рівнянням [1, 3] щодо прогину оболонки W :

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + 4 \cdot \beta^4 \cdot W = \frac{1}{D} \cdot [q(x) + q_T(x)] \quad /2/$$

та умовами

$$W''(0) = W''(L) = 0, \quad W'''(0) = W'''(L) = 0, \quad /3/$$

де

$$q(x) = P_0 \cdot \delta(x-b) + M_0 \cdot \delta'(x-b); \quad /4/$$

$$q_T(x) = \frac{2 \cdot E \cdot h \cdot \alpha \cdot T}{R} + \frac{D \cdot (1+\nu) \cdot \alpha}{2 \cdot h} \cdot \frac{d^2(AT)}{dx^2}; \quad /5/$$

$$D = \frac{2 \cdot E \cdot h^3}{3 \cdot (1-\nu^2)}; \quad \beta^4 = \frac{3 \cdot (1-\nu^2)}{4 \cdot R^2 \cdot h^2}. \quad /6/$$

Тут P_0, M_0 - невідомі зусилля та момент, що діють з боку клейового прошарку на оболонку; $\delta(u)$ - дельта-функція Дірака; $2 \cdot h$ - товщина оболонки; $T, \Delta T$ - температура її серединної поверхні та

©Хлебніков Д.Г., Бурда Р.М., Вишневський К.В., 1996

перепад температури по товщині; E , ν , α - пружні сталі та коефіцієнт температурного розширення матеріалу оболонки. У подальших формулах ці величини для пластинки та клейового прошарку мають індекси "п" та "к".

Розв'язок крайової задачі /2/-/3/ має вигляд

$$W(x) = C_0 K_0(\beta x) + \frac{1}{\beta} C_1 K_1(\beta x) + \frac{1}{2\beta^3} [P_0 K_3(\beta(x-b)) + M_0 \cdot \beta \cdot K_2(\beta(x-b))] + \frac{w}{\gamma_T}, \quad /7/$$

де

$$W_{0T}(x) = \frac{1}{2\beta^3} \int_0^x K_3(\beta(x-s)) \cdot q_T(s) ds; \quad /8/$$

$$C_0 = \frac{1}{4\beta^3 \Delta \cdot D} [P_0 [K_1(\beta(L-b)) K_2(\beta L) - K_0(\beta(L-b)) K_3(\beta L)] + \\ + M_0 \cdot \beta [K_0(\beta(L-b)) K_2(\beta L) + 4 K_3(\beta(L-b)) K_3(\beta L)] + \\ + \frac{1}{4\beta^3 \Delta} [w_{0T}''(L) \cdot \beta \cdot K_2(\beta L) - w_{0T}''(L) \cdot K_3(\beta L)]; \quad /9/$$

$$C_1 = \frac{1}{4\beta^2 \Delta \cdot D} [P_0 [K_0(\beta(L-b)) K_2(\beta L) - K_1(\beta(L-b)) K_1(\beta L)] - \\ - M_0 \cdot \beta [K_0(\beta(L-b)) K_1(\beta L) + 4 \cdot K_3(\beta(L-b)) K_2(\beta L)] + \\ + \frac{1}{4\beta^2 \Delta} [w_{0T}''(L) K_2(\beta L) - w_{0T}''(L) \cdot \beta \cdot K_1(\beta L)] \\ \Delta = K_2^2(\beta L) - K_1(\beta L) \cdot K_3(\beta L); \quad /10/$$

$K_i(u)$ - функції Крилова [1].

При $\beta \cdot L > 4$ /довга оболонка/ слід користуватись формулами, які одержуються з /9/ при $L \rightarrow \infty$:

$$C_0 = \frac{e^{-\beta b}}{2\beta^3 D} [P_0 \cdot \cos \beta b + M_0 \cdot \beta \cdot (\sin \beta b + \cos \beta b)] + \\ + \frac{1}{2\beta^3 D} \int_0^\infty e^{-\beta s} \cdot \cos \beta s \cdot q_T(s) ds, \quad /11/$$

$$C_1 = \frac{e^{-\beta b}}{2\beta^2 D} [P_0 \cdot (\sin \beta b - \cos \beta b) - 2 \cdot M_0 \cdot \beta \cdot \cos \beta b] + \\ + \frac{1}{2\beta^2 D} \int_0^\infty e^{-\beta s} \cdot (\sin \beta s - \cos \beta s) \cdot q_T(s) ds.$$

Величини $u(R)$ та $\theta(R)$ з /I/ знаходимо, розв'язуючи рівняння розтягу та згину тонкої круглої пластинки [2] за умов

$$\sigma_r(R) = -\frac{P_k}{h_n}, \quad M_r(R) = -M_k, \quad /12/$$

що дає

$$uR = -P_k \cdot \frac{1-\nu_n}{E_n \cdot h_n} \cdot R + \frac{2}{R} \int_0^R \alpha_n \cdot T_n \cdot r dr; \quad /13/$$

$$\theta(R) = \frac{M_k \cdot R}{(1+\nu_n) \cdot D_n} + \frac{2}{D_n R (1+\nu_n)} \int_0^R S_T \cdot r \, dr, \quad /14/$$

де

$$S_T = \frac{E_n \cdot \alpha_n \cdot h_n^2}{3 \cdot (1-\nu_n)} \cdot \Delta T_n.$$

У формулах /13/, /14/ ρ_k і M_k - розподілені по колу зусилля та момент, що діє з боку клею на пластинку.

Клейовий прошарок розглядається як тонке пружне кільце, що перебуває у рівновазі під дією зусиль ρ_o, ρ_k та моментів M_o, M_k , що діють на нього з боку оболонки та пластинки. Тоді, враховуючи [4] та умови /1/, для величин u_k та φ_k маємо / Δ_k - радіальна ширина прошарку/:

$$u_k = - \frac{(1-\nu_n) R \cdot \rho_o}{E_n \cdot (1+\gamma) \cdot h_n} + \frac{1}{1+\gamma} \left[\frac{2}{R} \int_0^R \alpha_n \cdot T_n \cdot \varrho \, d\varrho + \gamma \cdot \alpha_k \cdot T_k \cdot R \right]; /15/$$

$$\varphi_k = - \frac{R \cdot M_o}{D_n \cdot (1+\nu_n) \cdot (1+\gamma)} - \frac{2}{R \cdot D_n \cdot (1+\nu_n) \cdot (1+\gamma)} \int_0^R S_T \cdot \varrho \, d\varrho - \frac{\gamma \cdot \alpha_n \cdot \Delta T_k \cdot R}{2 \cdot h_n \cdot (1+\gamma)}, \quad \gamma = (1-\nu_n) \cdot \frac{\Delta_k}{R} \cdot \frac{E_k}{E_n}. /16/$$

Величини ρ_o та M_o знаходимо тепер з умов /1/ на основі /7/, /15/, /16/. Після підстановки їх значень у /7/, /9/ за відомими формулами [1,3] обчислюємо прогини та напруження, що виникають в розглядуваному приладі.

У випадку можливого крихкого руйнування, наприклад, якщо складові приладу виготовлені зі скла, розрахунковими є кільцеві σ_θ напруження в оболонці при $x=b$, які для сталої температури $T = T_o$ мають вигляд

$$\sigma_\theta(b) = \frac{\delta_{pw} + \frac{\nu \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{1-\nu^2}} \cdot \delta_{pm}}{\delta_{pw} \cdot (1+\gamma) + \frac{1-\nu_n}{\omega}} \cdot E \cdot T_o \cdot [\alpha_n - \alpha + \gamma \cdot (\alpha_k - \alpha)], \quad /17/$$

де для довгої оболонки

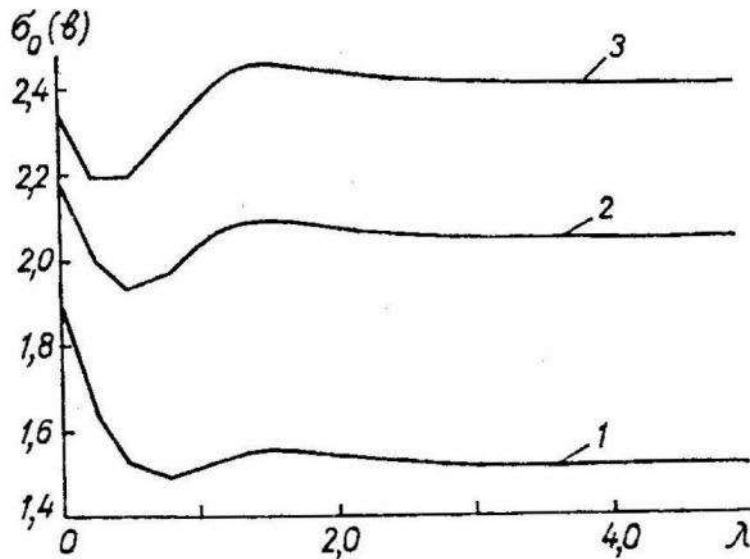
$$\delta_{pw} = \frac{1}{8} \left[1 + e^{-2 \cdot \lambda} \cdot (2 + \cos 2\lambda - \sin 2\lambda) \right]; \quad /18/$$

$$\delta_{pm} = \frac{1}{4} \cdot \left[1 - e^{-2 \cdot \lambda} \cdot (\sin 2\lambda + \cos 2\lambda) \right], \quad /19/$$

а безрозмірні параметри позначені

$$\lambda = \rho \cdot b, \quad \omega = \frac{h_n \cdot E_n}{R \cdot D \cdot \rho^3} = \sqrt[4]{12(1-\nu)^2} \cdot \frac{E_n \cdot h_n}{E \cdot h} \sqrt{\frac{R}{h}}. \quad /20/$$

Із формули /17/ бачимо, що з метою зниження рівня напружень складові розглядуваного приладу слід брати з коефіцієнтами температурного лінійного розширення, що є однаковими або мало різняться між собою. На рисунку зображена залежність $\sigma_0(b)$ від параметра λ . Розрахунки виконані за таких значень вхідних величин



$h = h_n = 1$ мм, $E = 6 \cdot 10^4$ МПа, $E_n = 7 \cdot 10^4$ МПа, $\alpha = 1 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹, $\alpha_n = 1,2 \cdot 10^{-6}$ град⁻¹, $\Delta_k = 0$, $\nu = \nu_n = 0,3$, $R = 15$ мм. Криві 1-3 одержані для значень ω , що дорівнюють 3, 5, 7 відповідно. Із графіків бачимо, що, обираючи належним чином місце розташування перегородки, можна істотно /до 20 %/ знизити рівень максимальних напружень.

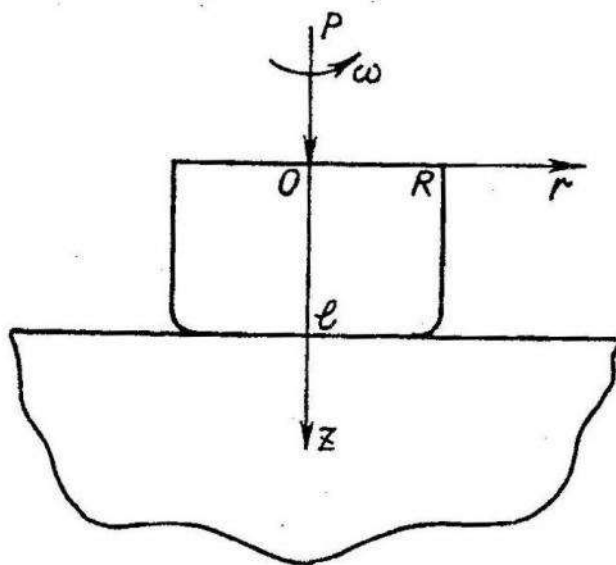
І. Биргер И.А., Шорр Б.Ф. Термопрочность деталей машин. М: Машиностроение, 1975. 455 с. 2. Демьянушко И.В. Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М: Машиностроение, 1978. 248 с. 3. Підстригач Я.С., Ярема С.Я. Температурні напруження в оболонках. К., 1961. 212 с. 4. Шереметьев М.П., Ярема С.Я., Хлебников Д.Г. Подбор оптимальной формы круглого металло-стеклянного кинескопа // Научн. записки ин-та машиноведения и автоматики. Вып. 7. Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении. К., 1961. С. 96-109.

Стаття надійшла до редколегії 20.04.94

В.П.Левицький, В.П.Новосад

ТЕРМОПРУЖНЕ КОНТАКТУВАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ТІЛ
ПРИ ЗМІННОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Розглянемо штамп радіусом R і заввишки ℓ , який притискується вертикальною силою P до пружного півпростору і обертається зі сталою кутовою швидкістю ω /рис. 1/. Розв'язування задачі полягає в тому, щоб задовольнити:



а/ рівняння термопружності для півпростору:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} + k \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + k \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t}{\partial z}; /2/$$

б/ рівняння теплопровідності для циліндра і півпростору:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \chi_1 \frac{\partial T}{\partial \tau}; /3/$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} = \chi_2 \frac{\partial t}{\partial \tau}; /4/$$

в/ температурні граничні умови

$$z = 0: \quad \partial T / \partial z = \gamma_0 T \quad (0 \leq r \leq R); \quad /5/$$

$$r = R: \quad \partial T / \partial r = -\gamma_\alpha T \quad (0 \leq z \leq l); \quad /6/$$

$$z = l: \quad \lambda_2 \partial t / \partial z - \lambda_1 \partial T / \partial z = f_T \omega r \sigma_{zz} \quad (0 \leq r \leq R); \quad /7/$$

$$\lambda_2 \partial t / \partial z + \lambda_1 \partial T / \partial z = h[t - T] \quad (0 \leq r \leq R); \quad /8/$$

$$\partial t / \partial z = \gamma_H t \quad (r > R); \quad /9/$$

г/ силові граничні умови

$$z = l: \quad u_z = f \quad (0 \leq r \leq R); \quad /10/$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (r \geq R); \quad /11/$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (r < \infty); \quad /12/$$

д/ початкові умови

$$t|_{\tau=0} = T|_{\tau=0} = 0; \quad /13/$$

$$f|_{\tau=0} = \frac{\partial f}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0 \quad /14/$$

де $k = (\lambda + \mu) / \mu = 1 / (1 - 2\nu)$; ν - коефіцієнт Пуассона;

$\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$; λ, μ - коефіцієнти Ляме; α_T - температурний коефіцієнт лінійного розширення; λ_1 і λ_2 - коефіцієнти теплопровідності відповідно циліндричного штамп і півпростору;

$\gamma_0 = \gamma_\alpha = \gamma_H$ - коефіцієнти теплообміну із зовнішнім середовищем відповідно для торця циліндра, його бічної поверхні і вільної поверхні півпростору; T - температура циліндричного штамп, t - півпростору; $\chi_i = 1/a_i$ / $i = 1, 2$ / де a_i - коефіцієнти температуропровідності відповідно циліндра і півпростору; h^{-1} - коефіцієнт термічного опору; f_T - коефіцієнт тертя.

Вважаємо, що штамп має заокруглені краї і в області контакту обмежений поверхнею обертання, що складається з двох ділянок: при $0 \leq r < r^*$ - площини, при $r^* \leq r \leq R$ - параболоїду з вершиною в точці r^* [1]. Тому приймаємо

$$f(r, \tau) = f^*(\tau) - \frac{(r^* - r)^2}{2R\rho} H(r - r^*), \quad f^* = \text{const},$$

де величина r^* близька до R ; $R\rho$ - радіус кривини країв штамп; $H(r - r^*)$ - функція Хевісайда.

При розв'язуванні задачі будемо також використовувати умову динамічної рівноваги штампів:

$$m \frac{\partial^2 f^*(\tau)}{\partial \tau^2} = p(\tau) + 2\pi \int_0^R r \sigma_{zz}(r, l, \tau) dr. \quad /15/$$

Рівняння /3/ в трансформантах Лапласа і з урахуванням /13/ в безрозмірних координатах $\varrho = \frac{r}{R}$, $\zeta = \frac{z}{l}$ має вигляд

$$\frac{\partial^2 T^L}{\partial \zeta^2} = -\frac{l^2}{R^2} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial T^L}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 T^L}{\partial \varrho^2} \right] + l^2 \chi_1 s T^L. \quad /16/$$

Якщо, використавши метод прямих і врахувавши умову /6/, записати це рівняння в кожній з N точок розбиття по ϱ і звести задачу теплопровідності для циліндра до системи лінійних диференціальних рівнянь, то розв'язок її можна подати у вигляді вектора [2]:

$$\vec{w}^T(\zeta, s) = \left[T^L(\varrho_1, \zeta, s), \dots, T^L(\varrho_N, \zeta, s), \frac{dT^L(\varrho_1, \zeta, s)}{d\zeta}, \dots, \frac{dT^L(\varrho_N, \zeta, s)}{d\zeta} \right];$$

$$= \exp(B(s)\zeta) \vec{d}(s), \quad /17/$$

де $\exp(B(s)\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n(s)\zeta^n}{n!}$; $B(s)$ - відома матриця розмірності $2N \times 2N$; $\vec{d}(s)$ визначаємо, користуючись граничними умовами на ділянці контакту і верхньому торці циліндра.

Рівняння /4/ у трансформантах Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t^L}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t^L}{\partial r} + \frac{\partial^2 t^L}{\partial r^2} = \chi_2 s t^L. \quad /18/$$

Після перетворення Ганкеля нульового порядку по координаті r :

$$\frac{\partial^2 t^{LH}}{\partial z^2} - \xi^2 t^{LH} = \chi_2 s t^{LH}. \quad /19/$$

Розв'язок для подвійної трансформанти температури запишемо у вигляді

$$t^{LH}(\xi, z, s) = \mathcal{D}(\xi, s) \exp(-\sqrt{\xi^2 + \chi_2 s} (z-1)). \quad /20/$$

Розв'язок осесиметричних рівнянь термопружності для півпростору в зображеннях за Ганкелем на границі півпростору, що враховує умову /12/, має вигляд

$$t^{LH}(\xi, l, s) = \mathcal{D}(\xi, s); \quad /21/$$

$$q^{LH}(\xi, l, s) = \lambda_2 \sqrt{\xi^2 + \chi_2 s} \mathcal{D}(\xi, s); \quad /22/$$

$$u_{zz}^{LH}(\xi, l, s) = \xi^2 v_1 C_1(\xi, s) - v_3 \frac{\sqrt{\xi^2 + X_2 s}}{s} D(\xi, s); \quad /23/$$

$$\sigma_{zz}^{LH}(\xi, l, s) = \xi^3 \sigma_1 C_1(\xi, s) - \sigma_3 \frac{\xi}{s} \left[\frac{\sqrt{\xi^2 + X_2 s}}{(k-1)} + \xi \right] D(\xi, s), \quad /24/$$

$$\text{де } v_1 = k \frac{k+1}{k-1}; \quad v_3 = \frac{b_1}{X_2} \frac{k+1}{k-1}; \quad \sigma_1 = -2\mu \frac{k^2}{k-1}; \quad \sigma_3 = -\frac{2\mu b_1}{X_2};$$

$b_1 = \beta/\mu(1+k)$; $C_1(\xi, s)$; $D(\xi, s)$ — деякі функції, які визначаємо з граничних і початкових умов.

Якщо в формулах /21-24/ перейти до безрозмірного параметра $\eta = \xi R$ і, застосувавши обернене перетворення Ганкеля, задовольнити граничні умови /7-II/, матимемо рівняння

$$\frac{\lambda_2}{R^3} \int_0^\infty \sqrt{\eta^2 + X_2 s R^2} F(\eta, s) \eta J_0(\eta \varrho) d\eta + \frac{\lambda_1}{l} \frac{\partial T^L(\varrho, \tau, s)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=1} =$$

$$= -f_T \omega \varrho R \sigma_{zz}^L(\xi, l, s) \quad (0 \leq \varrho \leq 1); \quad /25/$$

$$\frac{\lambda_1}{l} \frac{\partial T^L(\varrho, \tau, s)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=1} + h T^L(\varrho, \tau, s) \Big|_{\tau=1} =$$

$$= \frac{1}{R^3} \int_0^\infty \lambda_2 [\sqrt{\eta^2 + X_2 s R^2} + h R] F(\eta, s) \eta J_0(\eta \varrho) d\eta \quad (0 \leq \varrho \leq 1); \quad /26/$$

$$- \frac{1}{R^3} \int_0^\infty [\sqrt{\eta^2 + X_2 s R^2} + \gamma_H R] F(\eta, s) \eta J_0(\eta \varrho) d\eta = 0 \quad (\varrho \geq 1); \quad /27/$$

$$\int_0^\infty [\eta^2 v_1 C(\eta, s) - v_3 R \frac{\sqrt{\eta^2 + X_2 s R^2}}{s} F(\eta, s)] \eta J_0(\eta \varrho) d\eta = R^4 f^L(s, \varrho) \quad /28/$$

$$(0 \leq \varrho \leq 1);$$

$$\frac{1}{R^4} \int_0^\infty \left[\frac{\eta^2}{R} \sigma_1 C(\eta, s) - \sigma_3 \frac{\eta}{s} \left[\frac{\sqrt{\eta^2 + X_2 s R^2}}{s} + \eta \right] F(\eta, s) \right] \eta J_0(\eta \varrho) d\eta = 0 \quad /29/$$

$$(\varrho \geq 1).$$

У формулах /25-29/ $C(\eta, s) = C_1(\frac{\eta}{R}, s)$; $F(\eta, s) = D(\frac{\eta}{R}, s)$.

Продовжимо /27/ і /29/ на всю вісь ϱ за допомогою функції Хевісайда:

$$- \frac{1}{R^3} \int_0^\infty [\sqrt{\eta^2 + X_2 s R^2} + \gamma_H R] F(\eta, s) \eta J_0(\eta \varrho) d\eta = \varphi(\varrho, s) H(1-\varrho); \quad /30/$$

$$\frac{1}{R^4} \int_0^\infty \left[\frac{\eta^2}{R} \sigma_1 C(\eta, s) - \sigma_3 \frac{\eta}{s} \left[\frac{\sqrt{\eta^2 + X_2 s R^2}}{s} + \eta \right] F(\eta, s) \right] \eta J_0(\eta \varrho) d\eta =$$

$$= \sigma_{zz}^L(\varrho, l, s) H(1-\varrho), \quad /31/$$

а потім подамо невідомі функції $\varphi(\eta, s)$, $\sigma^L(\eta, s)$ у вигляді розкладів у ряди Фур'є-Бесселя:

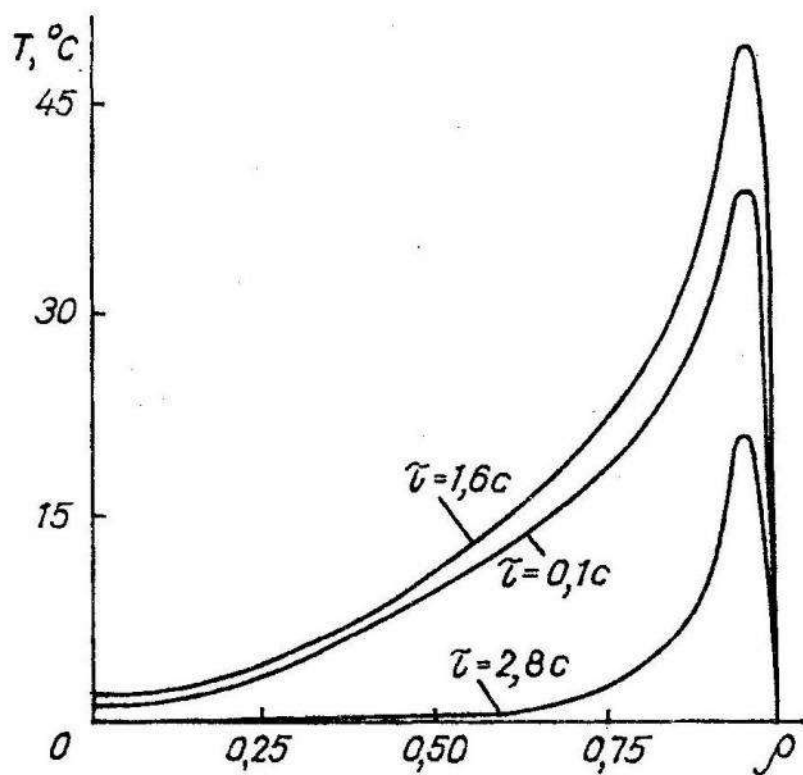
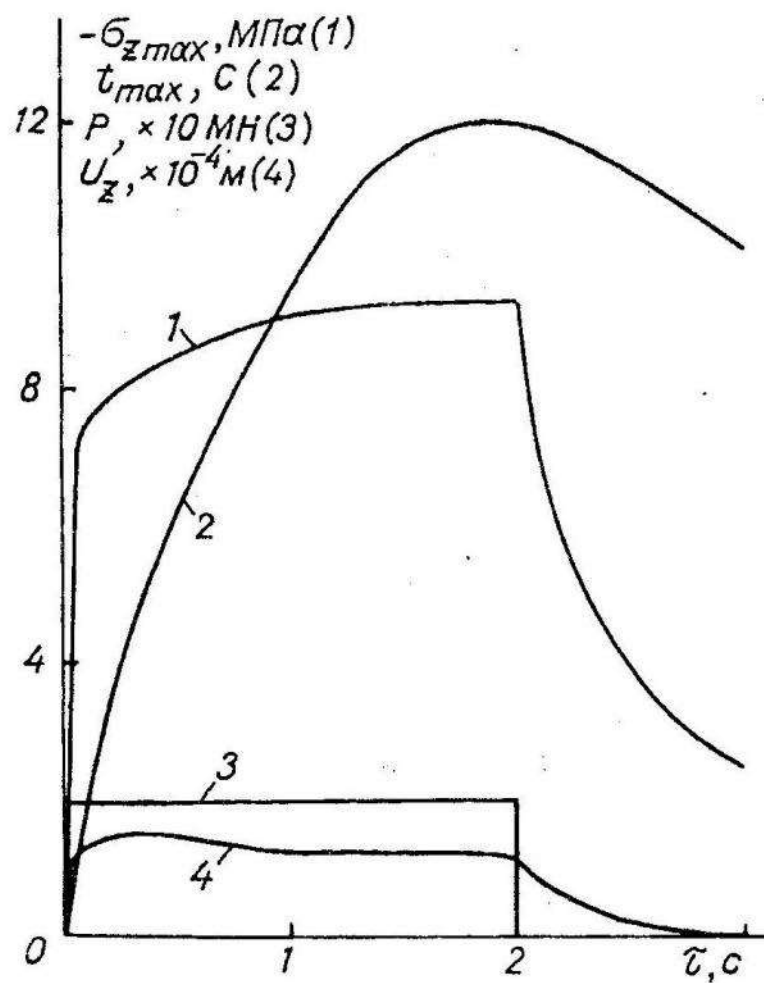
$$\varphi(\eta, s) = b_0(s) + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s) J_0(\mu_n \varrho); \quad /32/$$

$$\sigma_{zz}^L(\eta, s) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n(s) J_0(\mu_n \varrho). \quad /33/$$

Виразивши функції $C(\eta, s)$, $F(\eta, s)$ через невідомі коефіцієнти, задовольнивши /15/ і граничні умови /5/, /25/, /26/, /28/ в кожній точці рівномірного розбиття $\varrho_i = \Delta \varrho (i-1) = (i-1)/(N-1)$, ($i = 1, \dots, N$) прийдемо до системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a_n(s) \frac{\vartheta_1 R}{\sigma_1} (\mu_n J_1(\mu_n) \Lambda_n(\varrho_i) + \frac{b_0(s)}{s} \Pi^*(\varrho_i, s) + \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{b_n(s)}{s} (\mu_n J_1(\mu_n) \Pi_n(\varrho_i, s) - f^L(s, \varrho) = 0; \quad (i = 1, \dots, N) \\ & \sum_{n=1}^N a_n(s) f_T \varrho_i \omega R J_0(\mu_n \varrho_i) + b_0(s) \lambda_2 I^*(\varrho_i, s) + \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s) \lambda_2 \mu_n J_1(\mu_n) I_n(\varrho_i, s) + \frac{\lambda_1}{1} \sum_{n=1}^{2N} M_{N+i,n}^*(s) d_n(s) = 0; \quad (i = 1, \dots, N) \\ & b_0(s) Y^*(\varrho_i, s) + \sum_{n=1}^N b_n(s) \mu_n J_1(\mu_n) Y_n(\varrho_i, s) - \\ & - \frac{\lambda_1}{1} \sum_{n=1}^{2N} M_{N+i,n}^*(s) d_n(s) - h \sum_{n=1}^{2N} M_{i,n}^*(s) d_n(s) = 0; \quad (i = 1, \dots, N) \\ & \frac{1}{\ell} d_{N+i}(s) - \gamma_0 d_i(s) = 0; \quad (i = 1, \dots, N) \\ & 2\pi R^2 \sum_{n=1}^{2N} a_n(s) \frac{J_1(\mu_n)}{\mu_n} - m s^2 f^L(s) = -P^L(s), \end{aligned} \right. \quad /34/$$

де $\Lambda_n(\varrho_i)$, $\Pi^*(\varrho_i, s)$, $\Pi_n(\varrho_i, s)$, $I^*(\varrho_i, s)$, $I_n(\varrho_i, s)$, $Y^*(\varrho_i, s)$, $Y_n(\varrho_i, s)$ - деякі невластні інтеграли, що містять бесселеві функції; $M^*(s)$ - матрична експонента в /17/ при $\zeta = 1$. Трансформанти шуканих функцій виражаються через $a_n(s)$, $b_n(s)$ ($n = 1, \dots, N$) і $d_n(s)$ ($n = 1, \dots, 2N$) /компоненти $d(s)$ /. Отже, розв'язуючи систему



/34/ для дійсних значень $s_n = (2n+1)\sigma$, $(n = 0, 1, \dots, N^*)$

/ σ - параметр обчислень/, можемо методом Папуліса визначити шукані функції.

Розрахунки виконані при $P(\tau) = F H(a - \tau)$ і значеннях сталих, обраних таким чином: $N = 17$; $N^* = 10$; $\gamma_n = \gamma_0 = \gamma_a = 10 \text{ м}^{-1}$; $h = 10 \text{ кВт/м}^2\text{К}$; $\alpha_T = 22,9 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$; $F = 20 \text{ кН}$; $\omega = 0,5 \text{ с}^{-1}$; $R = 1 \text{ м}$; $l = 0,2 \text{ м}$; $X_1 = 200000 \text{ с/м}^2$; $X_2 = 50000 \text{ с/м}^2$; $a = 1$; $\lambda = 5,46 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $\mu = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $f_T = 0,1$; $\lambda_1 = 22 \text{ Вт/м К}$; $\lambda_2 = 209 \text{ Вт/м К}$; $m = 4900 \text{ кг}$. Отримані результати частково відображені на рис. 2 і 3.

І. Г р и л і ц ь к и й Д.В., К и з и м а Я.М. Осесиметричні контактні задачі теорії пружності і термопружності. Львів: Вища шк. 1981. 136 с. 2. Р а к и т с ь к и й Д.В., У с т и н о в С.М. Ч е р н о р у ц ь к и й І.Г. Чисельні методи розв'язування жорстких систем. М.: Наука. 1979. 208 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.05.94

УДК 539.3

В.О.Пир'єв, Р.І.Мокрик

НЕЛІНІЙНА НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ПРО ТЕРМОПРУЖНИЙ КОНТАКТ З УРАХУВАННЯМ ТЕРМІЧНОГО ОПОРУ

Розглянемо одновимірну модель термопружного контакту, запропоновану у працях [2-5].

Однорідний шар завтовшки L з модулем Юнга E та коефіцієнтом термічного розширення α розташований між двома жорсткими ідеально провідними стінками A та B з температурами $T_A(t) = T_0 + \theta_1(t)$ та $T_B(t) = T_0 + \theta_2(t)$. Шар жорстко зчеплений зі стінкою A та в початковий момент часу, коли $T_A(0) = T_B(0) = T_0$, наявний невеликий прозор g_0 /або натяг при $g_0 \leq 0$ / між вільною поверхнею шару та стінкою B . Вважаємо, що $|g_0/L| \ll 1$. Коефіцієнт Пуассона, теплопровідність та температуропровідність матеріалу шару позначимо через ν , λ , k відповідно.

Між вільною поверхнею шару та стінкою B будемо припускати існування термічного опору R , величина якого приймається деякою функцією $R_s(g)$ від прозору g чи функцією $R_c(p)$ від контактного тиску p . Будемо також вважати, що ці функції є монотонно спадними при зменшенні прозору та при збільшенні контактного тиску,

© Пир'єв В.О., Мокрик Р.І., 1996

$R_s(0) = R_c(0)$. Функції термічного опору докладно розглянуті у праці [6].

Запропонована конструкція, яка перебуває при $t \in (0, \infty)$ в термопружному контакті, може бути при $t \in t_s$ в умовах наявності прозору $q(t) > 0$ або при $t \in t_c$ в умовах пружного контакту $p(t) > 0$, $t_s \cup t_c = (0, \infty)$.

У рамках наших припущень вважаємо, що процес термопружного контакту тіла зі стінкою описується крайовою задачею

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{K} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t}, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty); \quad /1/$$

$$\theta(0, t) = \theta_1(t), \quad \lambda \frac{\partial \theta(L, t)}{\partial x} = \frac{\theta_2(t) - \theta(L, t)}{R(q)}, \quad t \in (0, \infty); \quad /2/$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad x \in (0, L). \quad /3/$$

Функція $R(q)$ має вигляд

$$R(q) = R_s(q)H(q) + R_c(-p_0 q)H(-q), \quad /4/$$

де

$$q(t) = q_0 - \alpha_1 \int_0^L \theta(\xi, t) d\xi, \quad p_0 = E_1/L, \quad t \in (0, \infty); \quad /5/$$

$$\alpha_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha, \quad E = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \theta = T - T_0,$$

а такі характеристики термопружного контакту, як величина прозору $q(t)$ та контактного тиску $p(t)$, визначаються зі співвідношень:

$$q(t) \equiv q(t), \quad q(t) > 0, \quad t \in t_s; \quad /6/$$

$$p(t) \equiv -p_0 q(t), \quad q(t) < 0, \quad t \in t_c. \quad /7/$$

Використовуючи метод інтегрального перетворення Лапласа, крайову задачу з нелінійними граничними умовами зведемо до системи нелінійних інтегральних рівнянь типу Вольтера:

$$\theta(L, \tau) = \theta_1(\tau) * \frac{d}{d\tau} G_1(\tau) + Q(\tau) * \frac{d}{d\tau} G_2(\tau),$$

$$q(\tau) = q_0 - \alpha_1 L \left[\theta_1(\tau) * \frac{d}{d\tau} G_2(\tau) + a(\tau) * \frac{d}{d\tau} G_3(\tau) \right], \quad /8/$$

$$a(\tau) = \frac{R_1}{R(q)} [\theta_2(\tau) - \theta(L, \tau)],$$

де

$$G_j(\tau) = g_j + 2 \sum_{m=1}^{\infty} g_{jm} x_m^{-1} \exp(-x_m^2 \tau);$$

$$g_1 = g_2 = 1, \quad g_3 = 0,5, \quad g_{1m} = (-1)^m, \quad g_{2m} = -x_m^{-1}, \quad g_{3m} = (-1)^m x_m^{-2};$$

$$x_m = \pi(2m-1); \quad R_1 = L/\lambda; \quad \tau = t/t_*; \quad t_* = L^2/k.$$

"*" позначимо згортку функцій за часом.

Для числового аналізу системи інтегральних рівнянь /8/ застосуємо метод квадратур та ітерацій [1] з урахуванням поведінки функцій:

$$G_1(\tau) \sim 2 \operatorname{erfc}(0,5/\tau^{0,5}), \quad G_3(\tau) \sim \tau,$$

$$G_2(\tau) \sim 2(\tau/\pi)^{0,5}, \quad \tau \rightarrow 0.$$

Будемо вважати, що температура стінок $\theta_n(\tau)$ змінюється за законом

$$\theta_n(t) = v_n (1 + \psi_n e^{-h^2 t}), \quad n = 1, 2.$$

У цьому випадку розв'язок відповідної стаціонарної задачі /в рівнянні /1/ відсутні члени з похідними за часом/ зображається у вигляді

$$q = \tilde{Q}(q), \quad \theta_5(x) = v_1 \theta_1(x) + v_2 \theta_2(x),$$

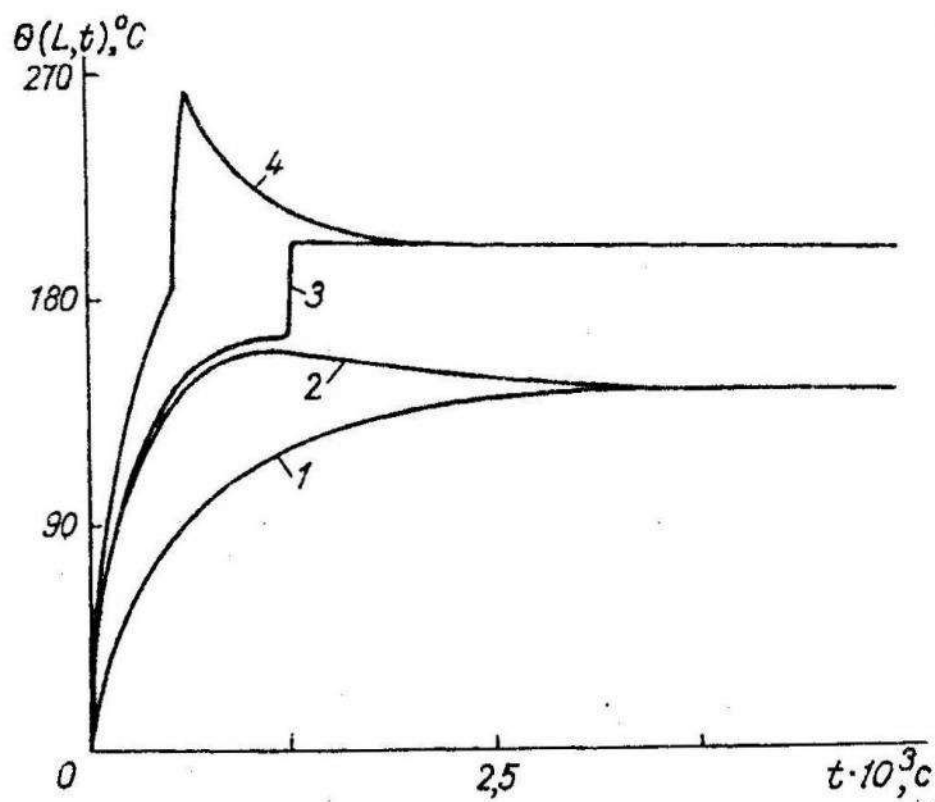
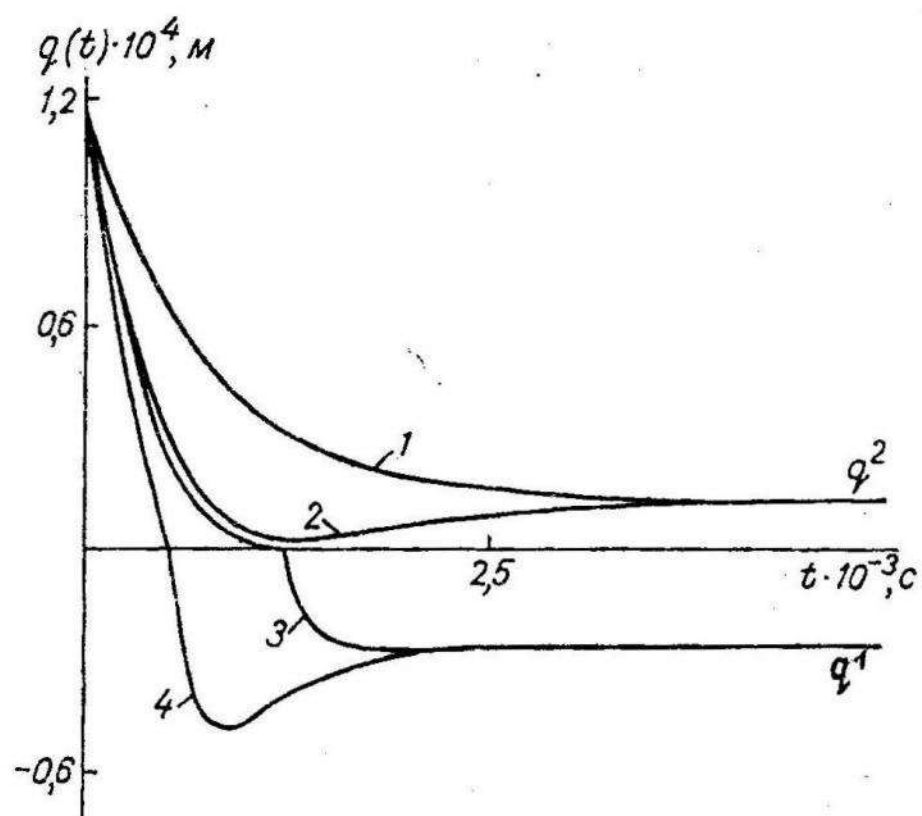
де

$$\theta_1(x) = 1 - (x/L) f(q); \quad \theta_2(x) = (x/L) f(q);$$

$$\tilde{Q}(q) = Q_{\infty} + \beta f(q); \quad \beta = 0,5 \alpha_1 L (v_1 - v_2);$$

$$f(q) = [R(q)/R_1 + 1]^{-1}; \quad Q_{\infty} = q_0 - \alpha_1 L v_1.$$

Розв'язок стаціонарної задачі може бути як єдиним, так і не єдиним. При виконанні умов $\beta < 0$, $q_0 \in (q_0^-, q_0^+)$ стаціонарна задача має три розв'язки q_1^1, q_1^0, q_1^2 ($q_1^1 < q_1^0 < q_1^2$), де



$$q_0^- = q^{20} + \alpha_1 L v_1 - \beta f(q^{20}); \quad q_0^+ = q^{10} + \alpha_1 L v_1 - \beta f(q^{10});$$

q^{10}, q^{20} – відповідно менший та більший корені рівняння $\beta f'(q) = 1$.

Шляхом лінеаризації нелінійної задачі в околі стаціонарних розв'язків легко показати, що стаціонарний розв'язок q^0 є нестійким $\beta f'(q_0) > 1$, а q^1 та q^2 – стійкі розв'язки. З часом ($t \rightarrow \infty$) залежно від умов теплового збурення нестационарний розв'язок прямуватиме до одного зі стійких стаціонарних розв'язків.

При виконанні умов $\beta < 0$, $q_0 = q_0^-$ ($q^2 = q^0 = q^{20}$), або $\beta < 0$, $q_0 = q_0^+$ ($q^1 = q^0 = q^{10}$) стаціонарна задача має два розв'язки. В усіх інших випадках розв'язок стаціонарної задачі єдиний та стійкий.

Чисельний аналіз розв'язку задачі у випадку сталого шару виконаний при $\alpha = 14 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\lambda = 21 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, $k = 5,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$; $v = 0,3$, $E = 190 \cdot 10^9 \text{ Па}$ при $L = 0,1 \text{ м}$ та $v_1 = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$, $v_2 = 200 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Термічний опір може бути апроксимований функцією

$$R_s(q) = R(0) r\left(\frac{q}{R(0)\lambda_1}\right), \quad R_c(-p_0 q) = R(0) r^{-1}(\alpha_* p_0 q),$$

де $r(x) = 1+x$; $R(0)$ – термічний опір, який відповідає нульовому контактному тиску; λ_1 – теплопровідність повітря між поверхнями. Надалі вважатимемо, що $\alpha_* = 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$, $R(0) = 0,11 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 \cdot ^\circ\text{C}/\text{Ват}$, $\alpha_* = 10^{-6} \text{ Па}^{-1}$, $\lambda_1 = 2,43 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}/\text{Ват}$.

На рис. 1 показана залежність прозору $q(t) = q(t)(q(t) > 0)$ та контактного тиску $p(t) = -p_0 q(t)$ ($q(t) < 0$) від часу t , $\psi_1 = 0$. Криві 1,2,3,4 відповідають $v_2 \psi_2 = 0, 200, 210, 300 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Для цих значень параметрів на рис. 2 зображений характер зміни в часі контактної температури $\theta(L, t)$ /криві 1,2,3,4/.

І. В е р л а н ь А.Ф.; С и з и к о в В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. К., 1986. 2. Д ж о н с о н К. Механика контактного взаимодействия. М., 1989. 3. B a r b e r J. R. Contact problems involving a cooled punch // J. Elasticity. 1978, Vol. 8. P. 409-423. 4. B a r b e r J. R., D u n d u r s J., C o m n i n o u M. Stability considerations in thermoelastic contact // Transactions of the ASME, J. of Applied Mechanics. 1980. Vol. 47. P. 871-874. 5. B a r b e r J. R., Z h a n g R. G. Transient behaviour and stability for thermoelastic contact of two rods of dissimilar materials // Int. J. Mech. Sci. 1988. Vol. 30. P. 691-704. 6. S h e l y k o s Yu. P., G a r i n A. Thermal Resistance of Metallic contacts // Int. J. Heat Mass Transfer. 1964. Vol. 7. P. 243-255.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.94

Г.Т.Сулим, Д.В.Лозинський

ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ СТОХАСТИЧНО АРМОВАНИХ
СТРІЧКОВИХ КОМПОЗИТІВ

Розглянемо ізотропне тіло, армоване вздовж осі z декартової системи координат тонкими пружними ізотропними стрічками довільного профілю /від еліптичного до прямокутного/. Матеріали матриці та арматури мають пружні сталі E, G, ν і E_B, G_B, ν_B відповідно. Ширина стрічок - $2a$, товщина - $2h$. Контакт між матрицею та арматурою - ідеальний. На нескінченності на тіло діє однорідне навантаження $\sigma_{xx}^\infty = p_1$, $\sigma_{yy}^\infty = p$, $\sigma_{xy}^\infty = \tau_2$, $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1$, $\sigma_{yz}^\infty = \tau$.

Напружений стан такої структури розіб'ємо [4] на два незалежних - повздовжній зсув і плоску деформацію. Таким чином, задача теоретичного опису пружної поведінки розглядуваного композиту зводиться до двовимірних задач теорії пружності. Тому надалі будемо розглядати площину $z = \text{const}$, яка містить тонкостінні пружні включення довільного профілю, що є поперечними перерізами арматури.

Сумістимо площину $z = \text{const}$ з координатною площиною xOy , початок якої - точку O , розмістимо в центрі довільного перерізу. Вважатимемо включення настільки віддаленими одне від одного, що їх взаємодію можна знехтувати. Геометричні параметри включень - півдовжина a і кут α між напрямом осі неоднорідності та осі абсцис - випадкові величини з густиною сумісного розподілу $g(a, \alpha)$ в діапазоні їхніх допустимих значень.

Оскільки взаємодія включень не враховується, можна обмежитись розглядом представницького елемента композиту об'ємом V , який містить одне включення і має форму прямокутника розмірами $2cx2d$. Визначимо середні напруження і деформації в такому елементі

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x, y, z) dV, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x, y, z) dV,$$

де ε_{ij} і σ_{ij} - компоненти тензорів малих деформацій і напружень, відомі з розв'язків відповідних задач теорії пружності. Тоді ефективні пружні характеристики S_{ijkl}^* визначаються зі співвідношень

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = S_{ijkl}^* \langle \sigma_{kl} \rangle. \quad //I/$$

Якщо $S^* = \varphi(a, \alpha)$, де S^* - шуканий пружний модуль, $\varphi(a, \alpha)$ - відома функція, то середнє значення /математичне сподівання/ цього пружного модуля визначається формулою [1]

$$\langle S^* \rangle = \iint \varphi(a, \alpha) q(a, \alpha) da d\alpha, \quad /2/$$

де інтегрування здійснюється по всій області зміни величин a і α . Якщо випадкові величини статистично незалежні, то $q(a, \alpha) = q(a)q(\alpha)$.

Для визначення дисперсії, яка характеризує відхилення випадкової величини від її середнього значення, можна скористатися формулою [1]

$$D(S^*) = \int \langle S^* \rangle^2 da d\alpha - \langle S^* \rangle^2. \quad /3/$$

Визначимо середнє по y значення функції $f(x + iy)$ на відрізку $y \in [-d, d]$ при $x = y$ таким чином:

$$\hat{f}(y + id) = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d f(y + iy) dy, \quad /4/$$

середнє по x значення функції $f(x + iy)$ на відрізку $x \in [-c, c]$ при $y = \beta_c$

$$\hat{f}(c + i\beta) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c f(x + i\beta) dx. \quad /5/$$

Середнє значення похідних функції $f(x + iy)$ в представницькому елементі об'єму композиту з урахуванням симетрії розв'язку задачі теорії пружності можна визначити формулами

$$\langle f, x \rangle = \frac{1}{2cd} \int_{-d}^d f(c + iy) dy, \quad \langle f, y \rangle = \frac{1}{2cd} \int_{-c}^c f(x + id) dx. \quad /6/$$

Тепер, якщо записати /1/ для досліджуваного напруженого стану і скористатися розв'язком відповідної задачі теорії пружності для ізолюваного тонкостінного включення в пружному середовищі [2,3] то за допомогою формул /6/ можна отримати вирази для пружних модулів стрічкового композиту як функції величин a та α . Оскільки a і α - випадкові величини, то $\tilde{U}$ - ефективні модулі композиту, які є детермінованими функціями згаданих змінних, також випадкові.

І. Розглянемо визначення ефективних модулів зсуву стрічкового композиту. Співвідношення /1/ тоді має вигляд

$$\langle w, y \rangle = S_{44}^* \langle \tau \rangle + S_{45}^* \langle \tau_1 \rangle, \quad \langle w, x \rangle = S_{55}^* \langle \tau_1 \rangle + S_{45}^* \langle \tau \rangle. \quad /7/$$

Згідно з [2] при дії напружень на нескінченності переміщення $\omega(z)$ в площині, яка містить пружне включення еліптичного профілю завдовжки $2a$, визначається формулою

$$\omega(z) = \frac{1}{2G} \operatorname{Im} \left\{ [z - \sqrt{z^2 - a^2}] [iA_1^{(5)} - GA_1^{(6)}] + 2[\tau + i\tau_1]z \right\}, \quad /8/$$

де вирази для $A_1^{(5)}$ і $A_1^{(6)}$ подано в роботі [2]; $z = (x + iy)e^{i\alpha}$.

Використовуючи /6/ та /7/, отримуємо

$$S_{44}^* = \langle \omega, y \rangle / \tau = \frac{1}{2cd\tau} \int_{-c}^c \omega(x + id) dx, \quad \text{коли } \tau_1 = 0,$$

$$S_{55}^* = \langle \omega, x \rangle / \tau_1 = \frac{1}{2cd\tau_1} \int_{-d}^d \omega(c + iy) dy, \quad \text{коли } \tau = 0,$$

$$S_{45}^* = \langle \omega, x \rangle / \tau, \quad \text{коли } \tau = 0; \quad S_{45}^* = \langle \omega, y \rangle / \tau_1, \quad \text{коли } \tau = 0. \quad /9/$$

Підставляючи /8/ в /9/, отримуємо вирази для ефективних зсувних модулів стрічкового композиту:

$$S_{44}^* = \frac{1}{4cdG\tau} \left\{ 2cd[2\tau - GA_1^{(6)}] \cos(\alpha) + GA_1^{(6)} \operatorname{Im} \int_{-c}^c \sqrt{(x+id)^2 e^{2i\alpha} - a^2} dx \right\},$$

$$S_{55}^* = \frac{1}{4cdG\tau_1} \left\{ 2cd[-2\tau_1 - A_1^{(5)}] \cos(\alpha) - A_1^{(5)} \operatorname{Re} \int_{-d}^d \sqrt{(c+iy)^2 e^{2i\alpha} - a^2} dy \right\} /10/$$

2. У випадку плоского напруженого стану співвідношення /1/ мають вигляд

$$\langle u, x \rangle = S_{11}^* \langle p_1 \rangle + S_{12}^* \langle p \rangle + S_{13}^* \langle \tau_2 \rangle, \quad \langle v, y \rangle = S_{21}^* \langle p_1 \rangle + S_{22}^* \langle p \rangle + S_{23}^* \langle \tau_2 \rangle,$$

$$\langle u, y \rangle + \langle v, x \rangle = S_{31}^* \langle p_1 \rangle + S_{32}^* \langle p \rangle + S_{33}^* \langle \tau_2 \rangle. \quad /11/$$

Згідно з [3] переміщення в площині, що містить окремішне токе включення еліптичного профілю, визначається за формулою

$$\begin{aligned} 2(u + iv) = & \frac{a}{1+\kappa} \left\{ \kappa [A_1^{(2)} - 2GA_1^{(4)}] [z - \sqrt{z^2 - a^2}] - \right. \\ & - [A_1^{(2)} + 2G_1^{(4)}] [\bar{z} - \sqrt{\bar{z}^2 - a^2}] + \frac{z - \bar{z}}{\sqrt{z^2 - a^2}} [z - \sqrt{z^2 - a^2}] [2GA_1^{(4)} - A_1^{(2)}] \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{4} [(\kappa - 3)p + (\kappa - 1)p_1] + i\tau_2, \quad \kappa = \frac{3-4\nu}{1+\nu}, \quad z = (x + iy)e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad /12/$$

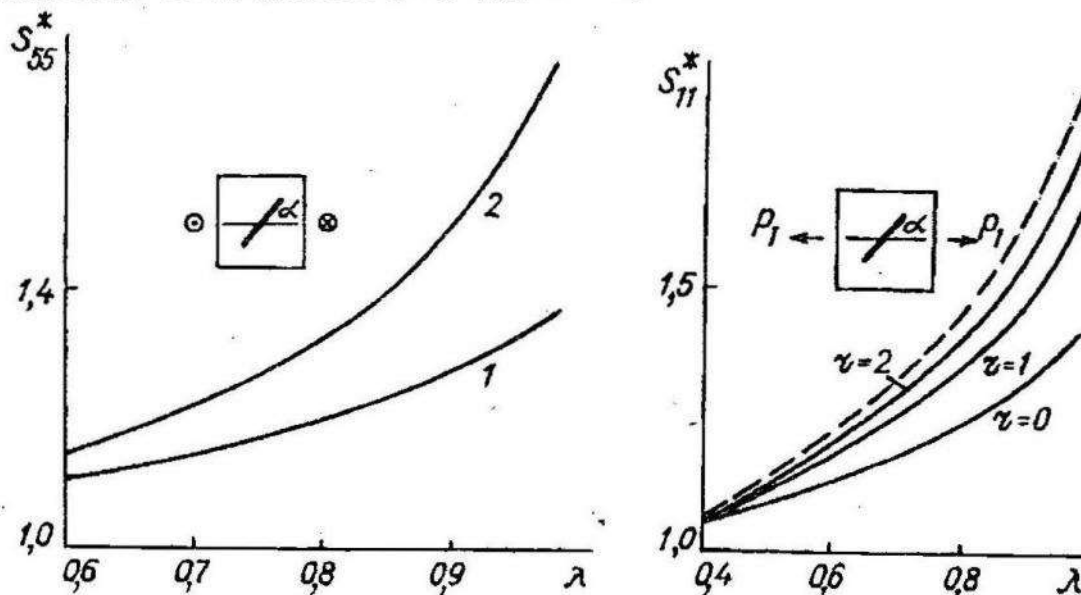
Вирази для коефіцієнтів $A_1^{(2)}$ і $A_1^{(4)}$ наведені у праці [3]. Використовуючи співвідношення /6/, /11/ і /12/, знаходимо

$$S_{11}^* = \frac{\langle u, u \rangle}{\langle p, p \rangle} = \frac{1}{2cd \langle p, p \rangle} \int_{-d}^d u(c+iy) dy, \quad \text{коли } \rho = \tau_2 = 0;$$

$S_{22}^* = \frac{V, u}{\langle p, p \rangle} = \frac{1}{2cd \langle p, p \rangle} \int_{-c}^c v(x+id) dx, \quad \text{коли } \rho_1 = \tau_2 = 0. \quad /13/$
Через громізdkість повні вирази для S_{11}^* і S_{22}^* не виписані. Тепер, якщо відома сумісна густина $g(a, \alpha)$ розподілу випадкових величин a і α , то математичне сподівання ефективних модулів стрічкового композиту визначається за формулою /2/, де функція $\varphi(a, \alpha)$ подається виразами /10/ або /13/. Дисперсія визначається за формулою /3/.

Для прикладу обчислене математичне сподівання ефективного модуля зсуву S_{55}^* і модуля пружності S_{11}^* у разі, коли випадкова величина $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ підкорялась β -розподілу і відношення $E_B/E = 100$ $a/h = 10$; $\nu_B = \nu = 1/3$ як функції величини $\lambda = a/c$, при цьому величина a вважається постійною. На рис. 1 лінія 1 відповідає прямокутній ґратці $d=2c$, лінія 2 - квадратній $c=d$.

На рис. 2 відображений вплив на жорсткість S_{11}^* зміни параметра γ розподілу кута α для квадратної ґратки. Зі зростанням γ жорсткість композиту збільшується, прямуючи до відповідного результату для регулярно армованого композиту /штрихова лінія/, отриманого з допомогою співвідношень /13/ при $\alpha = 0$.



1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Наука, 1969. 576 с. 2. Сулим Г.Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // Прикл. математика и механика. 1981. Т.45. № 2. С. 308-318. 3. Сулим Г.Т. Система линейных включений у изотропному середовищі // Дан УРСР. Сер. А. 1980. № 1. С. 62-65.

4. Фильштинский Л.А., Грингауз М.Г. Теория упругого линейно-армированного композиционного материала // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39. № 3. С. 537-546.

Стаття надійшла до редколегії 21.05.94

УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.В.Ковальчук

МЕТОД МАЙЗЕЛЯ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ДИНАМІЧНІЙ ТЕРМОПРУЖНОСТІ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА

Нехай анізотропне тіло, яке займає область Ω з поверхнею S , у природному стані має температуру t_0 . Унаслідок дії теплових або силових чинників тіло буде деформуватися, а його температура змінюватися. У тілі виникнуть переміщення та приріст температури $\theta = t - t_0$. Зміна температури спричинює виникнення деформацій ϵ_{ij} та напружень σ_{ij} , які є функціями координат x_i і часу τ .

Розглядаємо динамічну задачу узагальненої термопружності анізотропного тіла, коли час релаксації теплового потоку має різні значення для головних напрямів. Одержані узагальнені рівняння Майзеля, що дають змогу знаходити переміщення і температуру всередині тіла Ω , коли на частині поверхні S_1 задані переміщення u_i і нормальний градієнт температури K , а на частині поверхні S_2 - поверхневі сили P_i і температура h , причому $S = S_1 + S_2$.

Відповідні результати у випадку, коли час релаксації теплового потоку однаковий для всіх напрямів, наведені в монографії [4].

Для знаходження переміщень і температури всередині тіла Ω використовуємо взаємозв'язану систему рівнянь [1, 3]:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} u_{k,lj} + x_i &= \rho \ddot{u}_i + \rho_{ij} \theta_{,ij}, \\ \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i} \int_0^\tau \theta_{,ij}(M, \tau) \exp\left(-\frac{\tau-\tau_i}{\tau_i}\right) d\tau &= t_0 \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + c_\theta \dot{\theta} - w_t \quad M \in \Omega, \end{aligned} \quad /I/$$

де c_{ijkl} - декартові компоненти сталого тензора пружної жорсткості; $\beta_{ij} = \alpha_{kl}^t c_{ijkl}$, α_{ij}^t - температурні коефіцієнти лінійного розширення та зсуву; c_θ - об'ємна теплоємність; ρ - густина.

Спочатку визначаємо приріст температури. Для цього обираємо джерело тепла у точці ξ тіла Ω у вигляді $w_t = \delta(x-\xi)\delta_+(\tau)$ і припускаємо при цьому, що масові сили відсутні, тобто $x_i = 0$.

© Дідик В.З., Ковальчук Б.В., 1996

Тут $\delta(\eta) = \frac{dS(\eta)}{d\eta}$, $\delta_+(\tau) = \frac{dS_+(\tau)}{d\tau}$, де $S(\eta)$, $S_+(\tau)$ — симетрична й асиметрична одиничні функції.

Спричинені дією цього джерела тепла переміщення $u_i = \tilde{u}_i(x, \xi, \tau)$ і приріст температури $\theta = \tilde{v}(x, \xi, \tau)$ знаходимо зі системи рівнянь [1] при початкових умовах:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(x, \xi, 0) &= 0, & \dot{\tilde{u}}_i(x, \xi, 0) &= 0, \\ \tilde{v}(x, \xi, 0) &= 0, & \dot{\tilde{v}}(x, \xi, 0) &= 0. \end{aligned} \quad |x, \xi \in \Omega| \quad /2/$$

і крайових умовах:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(x, \xi, \tau) &= 0, & \tilde{v}_{,n}(x, \xi, \tau) &= 0 \text{ на } S_1, \\ \rho_i(x, \xi, \tau) &= 0, & \tilde{v}(x, \xi, \tau) &= 0 \text{ на } S_2. \end{aligned} \quad /3/$$

Підставляючи $x_i = 0$, $w_t = \delta(x - \xi) \delta_+(\tau)$ і знайдені функції $u_i = \tilde{u}_i(x, \xi, \tau) = 0$, $\theta = \tilde{v}(x, \xi, \tau)$ у рівняння взаємності [2], одержуємо

$$\begin{aligned} t(\xi, \tau) &= \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\tau} \tilde{v}(x, \xi, \tau - \tau_0) w_t(x, \tau_0) d\tau_0 - \\ &- t_0 \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\tau} x_i(x, \tau - \tau_0) \frac{\partial u_i(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \\ &+ \int_{S_1} dS \int_0^{\tau} \frac{\lambda_{ij}^+ K(x, \tau_0)}{\tau_j} \tilde{\varphi}_i(x, \xi, \tau - \tau_0) d\tau_0 - \\ &- \int_{S_2} dS \int_0^{\tau} \frac{\lambda_{ij}^+ h(x, \tau_0)}{\tau_i} \tilde{\psi}_{in}(x, \xi, \tau - \tau_0) d\tau_0 - \\ &- t_0 \int_{S_2} dS \int_0^{\tau} \rho_i(x, \tau - \tau_0) \frac{\partial \tilde{u}_i(x, \xi, \tau)}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \\ &+ t_0 \int_{S_1} dS \int_0^{\tau} \rho_i(x, \xi, \tau - \tau_0) \frac{\partial u_i(x, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0, \end{aligned} \quad /4/$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i(x, \xi, \tau) &= \int_0^{\tau} \tilde{v}(x, \xi, \tau) e^{\frac{\xi - \tau}{\tau_i}} d\tau; \\ \tilde{\psi}_{in}(x, \xi, \tau) &= \int_0^{\tau} \tilde{v}_{,n}(x, \xi, \tau) e^{\frac{\xi - \tau}{\tau_i}} d\tau. \end{aligned}$$

Визначаємо тепер переміщення в тілі Ω . Нехай тепер $W_t = 0$, а масова сила, прикладена в точці $\xi \in \Omega$, має вигляд $x_i = \delta(x - \xi) \times \delta_+(t) \delta_{ij}$ і спрямована по осі x_j . Тут δ_{ij} - символ Кронеккера.

Виникаючі під дією цієї миттєвої сили переміщення $u_i = u_i^{(r)}(x, \xi, \tau)$ і приріст температури $\theta = v^{(r)}(x, \xi, \tau)$ знаходимо зі системи рівнянь /1/ при початкових умовах:

$$\begin{aligned} u_i^{(r)}(x, \xi, 0) &= 0, & \dot{u}_i^{(r)}(x, \xi, 0) &= 0, \\ v^{(r)}(x, \xi, 0) &= 0, & \dot{v}^{(r)}(x, \xi, 0) &= 0 \quad |x, \xi \in \Omega| \end{aligned} \quad /5/$$

і крайових умовах:

$$\begin{aligned} u_i^{(r)}(x, \xi, \tau) &= 0, & v_{,n}^{(r)}(x, \xi, \tau) &= 0 \quad \text{на } S_1, \\ \rho_i^{(r)}(x, \xi, \tau) &= 0, & v^{(r)}(x, \xi, \tau) &= 0 \quad \text{на } S_2. \end{aligned} \quad /6/$$

Підставляючи тепер $x_i = \delta(x - \xi) \delta_+(t) \delta_{ij}$, $W_t = 0$ і знайдені функції $u_i = u_i^{(r)}(x, \xi, \tau)$, $\theta = v^{(r)}(x, \xi, \tau)$ у рівняння взаємності /2/ приходимо до рівняння

$$\begin{aligned} \dot{u}_j(\xi, \tau) &= \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\tau} x_i(x, \tau - \tau_0) \frac{\partial u_i^{(r)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0 - \\ &- \frac{1}{t_0} \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\tau} v^{(r)}(x, \xi, \tau - \tau_0) W_t(x, \tau_0) d\tau_0 + \\ &+ \int_{S_2} dS \int_0^{\tau} \rho_i(x, \tau - \tau_0) \frac{\partial u_i^{(r)}(x, \xi, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0 - \\ &- \int_{S_1} dS \int_0^{\tau} \rho_i^{(r)}(x, \tau - \tau_0) \frac{\partial u_i^{(r)}(x, \tau_0)}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \\ &+ \int_{S_2} dS \int_0^{\tau} \frac{\lambda_{ij}^t}{\tau_i} h(x, \tau - \tau_0) \psi_{in}^{(r)}(x, \xi, \tau_0) d\tau_0 - \\ &- \int_{S_1} dS \int_0^{\tau} \lambda_{ij}^t K(x, \tau_0) \varphi_i^{(r)}(x, \xi, \tau - \tau_0) d\tau_0, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(r)}(x, \xi, \tau) &= \int_0^{\tau} v^{(r)}(x, \xi, \tau) e^{\frac{\tau - \tau_0}{\tau_i}} d\tau, \\ \psi_{in}^{(r)}(x, \xi, \tau) &= \int_0^{\tau} v_{,n}^{(r)}(x, \xi, \tau) e^{\frac{\tau - \tau_0}{\tau_i}} d\tau. \end{aligned}$$

Рівняння /4/, /7/ є узагальненими рівняннями Майзеля для взаємозв'язаних динамічних задач узагальненої термопружності, які враховують ортотропію часу релаксації теплового потоку.

1. Ковальчук Б.В., Гой О.І. Узагальнене енергетичне рівняння і теорема єдиності розв'язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла // Вісн. Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. Вип. 40. 1994. С. 104-109. 2. Ковальчук Б.В., Гой О.І. Узагальнене варіаційне рівняння і теорема взаємності розв'язку крайової задачі узагальненої термопружності анізотропного тіла // Вісн. Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. Вип. 41. 1994. С. 71-75. 3. Коліано Д.М., Ковальчук Б.В., Гой О.І. Уравнения обобщенной термоупругости анизотропного тела, учитывающие ортотропию времени релаксации теплового потока // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. 1988. № 9. С. 61-65. 4. Подстригач Я.С., Коліано Д.М. Обобщенная термомеханика. К., 1976.

Стаття надійшла до редколегії 15.04.94

УДК 517.95

Г.І.Берегова, В.М.Кирилич

УЗАГАЛЬНЕНА ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА В КРИВОЛІНІЙНОМУ СЕКТОРІ

У праці [2] розглянута коректна розв'язність задачі Стефана для гіперболічної системи рівнянь першого порядку при заданих початкових, граничних та додаткових умовах.

Наша робота є узагальненням [2] на випадок, коли лінія задання початкових умов вироджується в точку, а граничні умови задаються в інтегральному вигляді, тобто в деякому криволінійному секторі /границі сектора апіорі невідомі/ досліджується система диференціальних та інтегральних рівнянь з додатковою інформацією про поведінку країв області.

Бібліографія з цієї проблеми є у праці [2].

Постановка задачі. Розглядається сукупність із $m \geq 1$ систем рівнянь з частинними похідними, в якій s -та система має вигляд

$$\frac{du_i^s}{dt} + \lambda_i^s(x, t) \frac{\partial u_i^s}{\partial x} = f_i^s(x, t; u), \quad i = \overline{1, n_s}, \quad /1/$$

де $(x, t) \in G_{ut}^s := \{(x, t): t \in \mathbb{R}_+, a_{u1}^s(t) \leq x \leq a_{u2}^s(t), a_{uk}^s(0) = 0\}$, причому $u_i^s: G_{ut}^s \rightarrow \mathbb{R}$, а функції a_{uk}^s теж невідомі та повинні задовольняти систему диференціальних рівнянь:

© Берегова Г.І., Кирилич В.М., 1996

$$\frac{da_{uk}^s}{dt} = h_k^s(t; u) \quad \text{для всіх } t \geq 0, s = \overline{1, m}; k = 1, 2. \quad /2/$$

Під u розуміємо набір усіх функцій u_i^s . Праві частини в /1/ і /2/ є функціоналами типу Вольтерра /вони можуть бути звичайними функціями/.

Припускаємо, що кожна функція $\lambda_i \in C(R \times R_+)$, $\lambda_i^s \in C^1(R \times R_+)$ та локально задовольняє умову Ліпшиця по x , причому для всіх $t \geq 0$

$$\lambda_i^s(a_{u1}^s(t), t) - a_{u1}^{s'}(t) > 0, \quad i = \overline{1, p_s + q_s},$$

$$\lambda_i^s(a_{u2}^s(t), t) - a_{u2}^s(t) < 0, \quad i = \overline{p_s + 1, n_s}, \quad p_s, q_s = \overline{0, n_s}. \quad /3/$$

Вводимо позначення

$$I_1^s = \{i : \lambda_i^s(0, 0) > a_{u1}^{s'}(0)\},$$

$$I_2^s = \{i : \lambda_i^s(0, 0) < a_{u2}^{s'}(0)\},$$

$$I_1^s \cap I_2^s = n_s + q_s; \quad N = \sum_{s=1}^m (n_s + q_s).$$

Задаємо умови, що замінюють граничні:

$$\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{n_s} \int_{a_{u1}^s(t)}^{a_{u2}^s(t)} \alpha_{p_i s}(x, t) \cdot u_{is}(x, t) dx = H_p(t), \quad p \in I_1^s \cap I_2^s, \quad /4/$$

$$\alpha_{p_i s} \in C^1(R \times R_+), \quad H_p(t) \in C^1(R_+).$$

З /2/ та /3/ випливає, зокрема, що $\lambda_i^s(0, 0) \neq h_{is}(0; \bar{u}^0)$. Тут $\bar{u}^0$ - розв'язок /1/-/4/ при $t = 0$. Він одержується з /3/ при виконанні

умови

$$\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^{n_s} \alpha_{p_i s}(0, 0) (a_{u1}^{s'}(0) - a_{u2}^{s'}(0)) \neq 0. \quad /5/$$

Припускаємо також, що виконуються умови узгодженості в точці /0, 0/:

$$H_p'(0) = 0, \quad p \in I_1^s \cap I_2^s. \quad /6/$$

На функції f_{is} і h_{is} поширюються ті ж самі умови, що й у [2].

Узагальнений розв'язок. Для всіх $t \geq 0$ введемо допоміжні невідомі функції:

$$\begin{aligned} u_{is}(a_{u1}^s(t), t) &= \mu_{is}(t), & i \in I_1^s, \\ u_{is}(a_{u2}^s(t), t) &= v_{is}(t), & i \in I_2^s, \end{aligned} \quad /7/$$

причому $\mu_{i^s}(0) = \nu_{i^s}(0)$, $i \in I_1^s \cap I_2^s$.

Позначимо через $\varphi_i^s(\tau; x, t)$ розв'язок диференціального рівняння $d\xi/d\tau = \lambda_i^s(\xi, \tau)$ такий, що $\varphi_i^s(t; x, t) = x$. Припустимо, що в системі /1/ функції φ_i^s неперервно диференційовані і що справедливі припущення /3/.

Інтегруючи систему /1/ уздовж характеристик, переходимо до системи інтегро-функціональних рівнянь:

$$u_i^s(x, t) = w_i^s(x, t; u) + \int_{t_i^s(x, t; u)}^t f_i^s(\varphi_i^s(0; x, t), \tau; u) d\tau \quad /8/$$

$s = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n_s}$, $(x, t) \in G_{ut}^s$
де $t_i^s(x, t; u) = \min \{ \tau : (\varphi_i^s(\tau; x, t), \tau) \in G_{ut}^s \}$, а

$$w_i^s(x, t; u) = \begin{cases} \mu_i^s(t_i^s(x, t; u)), & \text{при} \\ \varphi_i^s(t_i^s(x, t; u), x, t) = a_{u1}^s(t_i^s(x, t; u)), & i \in I_1^s, \\ \nu_i^s(t_i^s(x, t; u)), & \text{при} \\ \varphi_i^s(t_i^s(x, t; u), x, t) = a_{u2}^s(t_i^s(x, t; u)), & i \in I_2^s. \end{cases}$$

Виходячи з цього, під узагальненим /ліпшицевим/ розв'язком задачі /1/-/4/ розумітимемо набір функцій u , які задовольняють умову Ліпшиця, умову /3/ і систему рівнянь /2/ і /7/. Вольтерровість функціоналів f_i^s і h_i^s дає змогу також вести мову про узагальнений розв'язок задачі /1/-/4/, який існує при малих t .

Основна теорема. При згаданих вище припущеннях узагальнений розв'язок задачі /1/-/4/ існує і є єдиним для всіх $t \in [0, \varepsilon]$ і для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$.

Доведення теореми пов'язане з досить громіздкими викладками і здійснюється за такою схемою. Комбінуючи метод характеристик /1/ з методом, використаним у працях [2, 3], приходимо до системи інтегро-функціональних операторних рівнянь. А далі, користуючись принципом стискальних відображень у відповідно підібраному просторі, доводимо локальне по t існування та єдиність розв'язку.

І. А бо л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Учен. зап. Казан. ун-та. 1958. Т.20. Вып.3. С. 87-104. 2. К и р и л и ч В.М., М ы ш к и с А.Д. Обобщенная полулинейная гиперболическая задача Стефана на прямой // Дифференц. урав. 1991. Т.27, № 3. С. 497-503. 3. К и -

р и л и ч В.М. Нелокальные задачи типа Дарбу для гиперболических уравнений и систем с двумя независимыми переменными: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Донецк, 1984. 20 с.

Стаття надійшла до редколегії 13.04.94

УДК 517.946

П.П.Бабак

АСИМПТОТИКА ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ

Розглядаємо систему з малим параметром $\varepsilon : 0 < \varepsilon \ll 1$:

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon^2 u_{xx} + a_{11}(x)u + a_{12}(x)v = f_1(x, t, \varepsilon) \end{cases} \quad /1/$$

$$\begin{cases} v_t + a_{21}(x)u + a_{22}(x)v = f_2(x, t, \varepsilon) \end{cases} \quad /2/$$

в області $(x, t) \in (0, l) \times \mathbb{R}$

з умовами періодичності по t :

$$u(x, t + 2\pi, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon); \quad v(x, t + 2\pi, \varepsilon) = v(x, t, \varepsilon) \quad /3/$$

і з крайовими умовами:

$$u(0, t, \varepsilon) = \varphi(t, \varepsilon) \quad t \in \mathbb{R}. \quad /4/$$

$$u(l, t, \varepsilon) = \psi(t, \varepsilon). \quad /5/$$

Для даної задачі доведемо теорему.

Теорема. Якщо виконуються умови:

1/ функції $f_i(x, t, \varepsilon)$, $\varphi(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon) - 2\pi$ -періодичні по t , $i = 1, 2$;

2/ квадратична форма $a_{11}(x)\xi^2 + (a_{12}(x) + a_{21}(x))\xi\eta + a_{22}(x)\eta^2 \geq \mu(\xi^2 + \eta^2)$, де $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $x \in [0, l]$;

3/ $a_{ij}(x) \in C^{N+1}([0, l])$, $i, j = 1, 2$;

4/ $\varphi(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon) : \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^{N+1}}{\partial \varepsilon^{N+1}} \varphi, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^{N+1}}{\partial \varepsilon^{N+1}} \psi$ - кусково-гладкі по t і неперервні;

5/ $f_1(x, t, \varepsilon)$, $f_2(x, t, \varepsilon) : \frac{\partial^{N+1}}{\partial \varepsilon^{N+1}} f_i, \frac{\partial^N}{\partial x^N} f_i$ - неперервні,

$\frac{\partial}{\partial t}$ - кусково-гладкі по t , $i = 1, 2$,

тоді можна побудувати наближений розв'язок задачі у вигляді степеневих рядів, за степенями ε , до порядку ε^N , де $N \in \mathbb{N}$. Для побудови

асимптотики розв'язку даної задачі та визначення її коректності використовуємо метод примекового шару [1-3].

1. Коректність задачі. Задачу /1/-/5/ за допомогою заміни легко звести до однорідної крайової задачі. Коректність задачі /1/-/5/ впливає з коректності відповідної однорідної крайової задачі. Інтегральні оцінки розв'язків задачі, виходячи з умов періодичності /3/, зручно здійснювати у просторі $L_2(D^*)$, де $D^* = (0; l) \times (c; c + 2\pi)$. Використовуючи метод інтегралів енергії, одержуємо нерівність для u, v

$$\begin{aligned} \|u\|_{L_2(D^*)}^2 + \|v\|_{L_2(D^*)}^2 \leq & C_1 (\|f\|_{L_2(D_0)}^2 + \|f\|_{L_2(D_2)}^2) + \\ & + C_2 (\|\varphi\|_{H_1^1(0; 2\pi)}^2 + \|\psi\|_{H_1^1(0; 2\pi)}^2) \end{aligned} \quad /6/$$

при виконанні умов теореми.

Єдиність і неперервна залежність розв'язку задачі /1/-/5/ від вихідних даних впливає з /6/.

Будувати класичний розв'язок задачі /1/-/5/ зручно у вигляді комплекснозначного ряду Фур'є, перейшовши до відповідної однорідної крайової задачі.

2. Побудова асимптотики та її обґрунтування. Регулярна частина асимптотики. Розв'язок задачі /1/-/5/ шукаємо у вигляді степенево-го ряду:

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{u}_j(x, t), \quad \bar{v}(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{v}_j(x, t). \quad /7/$$

Розкладаємо функції $f_1(x, t, \varepsilon)$, $f_2(x, t, \varepsilon)$, $\varphi(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon)$ в околі точки $\varepsilon = 0$ в ряди Тейлора за степенями ε . Підставляючи /7/ і ці розклади функцій у задачу /1/-/5/ та групуємо коефіцієнти при однакових степенях ε , отримуємо задачу для знаходження j -го наближення розв'язку задачі /1/-/3/:

$$\begin{cases} \bar{u}_{jt} + a_{11}(x)\bar{u}_j + a_{12}(x)\bar{v}_j = (f_1)_\varepsilon^{(j)}(x, t, 0) \frac{1}{j!} + (\bar{u}_{j-2})_{xx}; \\ \bar{v}_{jt} + a_{12}(x)\bar{u}_j + a_{22}(x)\bar{v}_j = (f_2)_\varepsilon^{(j)}(x, t, 0) \frac{1}{j!}, \end{cases} \quad \begin{matrix} /8/ \\ /9/ \end{matrix}$$

де $j = \overline{0, N}$, $(x, t) \in D$, $\bar{u}_{-1} = \bar{u}_{-2} = 0$
з умовою періодичності:

$$\bar{u}_j(x, t+2\pi) = \bar{u}_j(x, t), \quad \bar{v}_j(x, t+2\pi) = \bar{v}_j(x, t) \quad /10/$$

де $j = 0, N, (x, t) \in \mathcal{D}$.

Для існування та єдиності розв'язку вищезгаданих задач потрібне виконання умов 2, 3, 5 вищенаведеної теореми.

Ми побудували розв'язок задачі /1/-/3/ у вигляді скінченних сум рядів /7/:

$$\bar{u}^N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \bar{u}_j(x, t), \quad \bar{v}^N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \bar{v}_j(x, t), \quad /11/$$

але даний розв'язок /11/ "не зобов'язаний" задовольняти умови /4/, /5/, тому потрібно побудувати функції, які б могли підправити дані умови у сукупності з регулярною частиною розв'язків /11/.

Побудова функцій прилежових шарів. У нашій задачі виникає два прилежових шари, при $x=0$ і $x=l$. Для побудови цих функцій зробимо відповідні заміни: при $x=0$ — $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, при $x=l$ — $\eta = \frac{l-x}{\varepsilon}$. Розглядатимемо лише прилежовий шар для $x=0$; для $x=l$ все робимо аналогічно.

Запишемо задачу для функцій прилежового шару при $x=0$, зробивши заміну $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$:

$$\left\{ \begin{aligned} (\Pi u^N)_t - (\Pi u^N)_{\xi\xi} + a_{11}(\varepsilon\xi) \Pi u^N + a_{12}(\varepsilon\xi) \Pi v^N &= 0; \end{aligned} \right. \quad /12/$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\Pi v^N)_t + a_{21}(\varepsilon\xi) \Pi u^N + a_{22}(\varepsilon\xi) \Pi v^N &= 0; \end{aligned} \right. \quad /13/$$

$$(\xi, t) \in \mathcal{D}' = \{(\eta, \tau): 0 < \eta < \infty, \tau \in \mathbb{R}\},$$

з умовами періодичності по t :

$$\Pi u^N(\xi, t+2\pi, \varepsilon) = \Pi u^N(\xi, t, \varepsilon), \quad \Pi v^N(\xi, t+2\pi, \varepsilon) = \Pi v^N(\xi, t, \varepsilon), \quad /14/$$

з крайовою умовою при $\xi=0$ та з крайовою умовою при $\xi \rightarrow \infty$:

$$\Pi u^N(0, t, \varepsilon) = \varphi(t, \varepsilon) - \bar{u}^N(0, t); \quad /15/$$

$$\Pi u^N(\xi, t, \varepsilon) \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0, \quad /16/$$

причому в умові /16/ прямування до нуля експоненціальне. Розв'язок задачі /12/-/15/ шукаємо у вигляді

$$\Pi u^N(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \Pi u_j(\xi, t), \quad \Pi v^N(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j \Pi v_j(\xi, t).$$

Розклавши функції $\varphi(t, \varepsilon)$, $a_{k,l}(\varepsilon\xi)$, $k, l=1, 2$ в ряди Тейлора за степенями ε , підставимо розвинення в задачу /12/-/15/, згрупуємо коефіціє-

енти при однакових степенях ε і одержимо задачу для $\Pi u_j, \Pi v_j, j = \overline{0, N}$:

$$\begin{cases} (\Pi u_j)_t - (\Pi u_j)_{\xi\xi} + a_{11}(0)\Pi u_j + a_{12}(0)\Pi v_j = G_j^1(\xi, t) \\ (\Pi v_j)_t + a_{21}(0)\Pi u_j + a_{22}(0)\Pi v_j = G_j^2(\xi, t) \end{cases} (\xi, t) \in \mathcal{D}'; \quad /17/$$

$$\Pi u_j(\xi, t+2\pi) = \Pi u_j(\xi, t), \quad \Pi v_j(\xi, t+2\pi) = \Pi v_j(\xi, t); \quad /18/$$

$$\Pi u_j(0, t) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \varepsilon^j} \varphi(t, 0) - \bar{u}_j(0, t); \quad /19/$$

$$\Pi u_j(\xi, t) \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0, \quad /20/$$

причому в умові /20/ повинна бути експоненціальна збіжність до нуля при $\xi \rightarrow \infty$.

Тут

$$G_j^k(\xi, t) = - \sum_{s=0}^{j-1} \frac{\xi^{j-s}}{(j-s)!} \left(\Pi u_s \frac{d^{j-s}}{dx^{j-s}} a_{k1}(0) + \Pi v_s \frac{d^{j-s}}{dx^{j-s}} a_{k2}(0) \right), \quad /21/$$

де $k = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, N}$. Єдиність задачі /16/-/20/ можна показати в просторі $L_2(\mathcal{D}')$, де $\mathcal{D}' = (0; \infty) \times (0; 2\pi)$. Розв'язок задачі /16/-/20/ знаходимо у вигляді ряду Фур'є:

$$\Pi u_j(\xi, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikt} \Pi u_j^k(\xi), \quad \Pi v_j(\xi, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ikt} \Pi v_j^k(\xi). \quad /22/$$

Оскільки функції $G_j^1(\xi, t)$, $G_j^2(\xi, t)$, 2π -періодичні, можемо їх розкласти в ряди Фур'є. Підставивши розклади функцій $G_j^1(\xi, t)$, $G_j^2(\xi, t)$ в ряди Фур'є по t і /22/ в задачу /16/-/20/, можна одержати задачу для $\Pi u_j^k(\xi)$:

$$(\Pi u_j^k)_{\xi\xi} - \mu_k(0) \Pi u_j^k = F_j^k(\xi), \quad \xi \in (0, \infty), k \in \mathbb{Z}, j = \overline{0, N}; \quad /23/$$

$$\Pi u_j^k(0) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \varepsilon^j} \varphi^k(0) - \bar{u}_j^k(0); \quad /24/$$

$$\Pi u_j^k(\xi) \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0, \quad /25/$$

де

$$F_j^k(\xi) = G_j^{1,k}(\xi) - G_j^{2,k}(\xi) \frac{a_{12}(0)}{a_{22}(0) + ik}; \quad /26/$$

$$\mu_k(0) = a_{11}(0) + ik - \frac{a_{12}(0)a_{21}(0)}{a_{22}(0) + ik}. \quad /27/$$

Розв'язок цієї задачі можна записати за допомогою функції Гріна. Аналогічно визначаємо існування та експоненціальну поведінку розв'язку задачі /16/-/20/ при $\xi \rightarrow \infty$ і відповідно до /12/-/16/.

Те саме стосується функції примежового шару при $x = \ell$:

$Qu^N(\eta, t, \varepsilon), Qv^N(\eta, t, \varepsilon)$. Вона існує, є єдиною, зображається у вигляді

$$Qu^N(\eta, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i Qu_i(\eta, t), \quad Qv^N(\eta, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i Qv_i(\eta, t) \quad /28/$$

і має порядок при $\eta \rightarrow \infty$: $e^{-\delta\eta}$, де $\eta > 0$.

Отже, ми знайшли певне наближення у вигляді степеневого ряду:

$$U^N = \bar{u}^N(x, t, \varepsilon) + Pu^N(\xi, t, \varepsilon) + Qu^N(\eta, t, \varepsilon); \quad /29/$$

$$V^N = \bar{v}^N(x, t, \varepsilon) + Pv^N(\xi, t, \varepsilon) + Qv^N(\eta, t, \varepsilon). \quad /30/$$

Для того щоб це було наближення розв'язку задачі /1/-/5/ до порядку ε^N , знайдена оцінка залишкового члена /різниця між розв'язком задачі /1/-/5/ і наближенням /29/-/30/. Вона впливає з оцінки /6/.

І. Васильєва А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.
2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром //Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3-122. 3. Тренюгин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика //Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. № 4. С. 121-156.

Стаття надійшла до редколегії 15.05.94

Г.П.Лопушанська, О.О.Криницька, І.О.Цімарно
ПРО ОДНУ НЕКЛАСИЧНУ ЗАДАЧУ СПРЯЖЕННЯ

В області $\Omega = \{(x, t): x \in (h_1; 0) \cup (0; h_2), t > 0\}$
для рівняння

$$u_t - (a(x)u_x)_x = f(x, t), \quad /1/$$

де $a(x) = \begin{cases} a_1^2, & x \in (h_1; 0), \\ a_2^2, & x \in (0; h_2), \end{cases} f \in \mathcal{E}'(\Omega), \quad u(x, t) = \begin{cases} u^1(x, t), & x \in (h_1; 0), \\ u^2(x, t), & x \in (0; h_2), t > 0, \end{cases}$

розглядаємо задачу: знайти розв'язок $u(x, t)$ рівняння /1/ в Ω
та невідомі узагальнені функції $p_1(t), q_1(t)$ при умовах

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in (h_1; 0) \cup (0; h_2),$$

$$u^1|_{x=h_1} = p_1(t), \quad u^1_x|_{x=h_1} = q_1(t), \quad u^2|_{x=h_2} = p_2(t), \quad /2/$$

$$u^2_x|_{x=h_2} = q_2(t), \quad (u^1 - u^2)|_{x=0} = \mu(t), \quad (a_1^2 u^1_x - a_2^2 u^2_x)|_{x=0} = \nu(t).$$

Нехай $\mathcal{D}_0(R_+) = \{\varphi(t) \in C^\infty(R_+): \varphi^{(k)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{t \rightarrow 0^+} 0, k = 0, 1, \dots\}$, $\mathcal{D}'_0(R_+)$ -
простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}_0(R_+)$. Вважаємо,
що $p_2(t), q_2(t), \mu(t), \nu(t) \in \mathcal{D}'_0(R_+)$.

Розв'язком задачі /1/-/2/ називаємо узагальнені функції
 $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $p_1, q_1 \in \mathcal{D}'_0(R_+)$ такі, що $\tilde{u} = \begin{cases} u(x, t), & (x, t) \in \Omega \\ 0, & (x, t) \notin \Omega \end{cases}$ задовольняє у
 $\mathcal{D}'(R^2)$ рівняння

$$\tilde{u}_t - (a(x)\tilde{u}_x)_x = F(x, t), \quad /3/$$

$$\begin{aligned} F = & \mu(t) \cdot \delta'(x) + \nu(t) \cdot \delta(x) - a_1^2 p_1(t) \cdot \delta'(x - h_1) - \\ & - a_1^2 q_1(t) \cdot \delta(x - h_1) + a_1^2 p_2(t) \cdot \delta'(x - h_2) + \\ & + a_2^2 q_2(t) \cdot \delta(x - h_2) + \tilde{f}(x, t). \end{aligned}$$

Використовуючи перетворення Лапласа за змінною t , будемо
фундаментальну функцію оператора /1/, тобто таку узагальнену функцію
 $\omega(x, t; \xi, \tau)$, яка у $\mathcal{D}'(R^2)$ задовольняє рівняння

$$\omega_t - ((\theta(-x)a_1^2 + \theta(x)a_2^2)\omega_x)_x = \delta(x - \xi, t - \tau). \quad /4/$$

Після перетворення Лапласа $L_t [\omega(x, t; \xi, \tau)] = \hat{\omega}(x, p; \xi, \tau)$ переходять у звичайне диференціальне рівняння:

$$p \hat{\omega} - ((\theta(-x) a_1^2 + \theta(x) a_2^2) \hat{\omega}_x)_x = \delta(x - \xi) e^{-p\tau}$$

з параметрами φ, ξ, τ . Відомим способом [1,3], вимагаючи додатково, щоб $\hat{\omega}|_{x=0-} - \hat{\omega}|_{x=0+} = 0$, $a_1^2 \hat{\omega}_x|_{x=0-} - a_2^2 \hat{\omega}_x|_{x=0+} = 0$, знаходимо

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(x, p; \xi, \tau) = & \\ = \frac{e^{-p\tau}}{2a_1\sqrt{p}} & \left\{ \theta(-x)\theta(-\xi) \left[e^{\frac{-\sqrt{p}|x-\xi|}{a_1}} - \frac{a_2-a_1}{a_2+a_1} e^{\frac{\sqrt{p}(x+\xi)}{a_1}} \right] + \right. \\ & + \theta(-x)\theta(\xi) \frac{2a_1}{a_2+a_1} e^{\frac{\sqrt{p}x}{a_1} - \frac{\sqrt{p}\xi}{a_2}} + \theta(x)\theta(-\xi) \frac{2a_1}{a_2+a_1} e^{-\frac{\sqrt{p}x}{a_2} + \frac{\sqrt{p}\xi}{a_1}} + \\ & \left. + \theta(x)\theta(\xi) \frac{a_1}{a_2} \left[e^{\frac{-\sqrt{p}|x-\xi|}{a_2}} + \frac{a_2-a_1}{a_2+a_1} e^{\frac{-\sqrt{p}(x+\xi)}{a_2}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(x, t; \xi, \tau) = & \\ = \frac{\theta(t-\tau)}{2a_1\sqrt{\pi(t-\tau)}} & \left\{ \theta(-x)\theta(\xi) \left[e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a_1^2(t-\tau)}} - \frac{a_2-a_1}{a_2+a_1} e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a_1^2(t-\tau)}} \right] + \right. \\ & + \frac{2a_1}{a_2+a_1} \left[\theta(-x)\theta(\xi) e^{-\left(\frac{x}{a_1} - \frac{\xi}{a_2}\right)^2 \frac{1}{4(t-\tau)}} + \theta(x)\theta(-\xi) e^{-\left(\frac{x}{a_2} - \frac{\xi}{a_1}\right)^2 \frac{1}{4(t-\tau)}} \right] + \\ & \left. + \frac{a_1}{a_2} \theta(x)\theta(\xi) \left[e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a_2^2(t-\tau)}} + \frac{a_2-a_1}{a_2+a_1} e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a_2^2(t-\tau)}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Знайдена $\omega(x, t; \xi, \tau)$ є нормальною фундаментальною функцією оператора /1/, тому, згідно з [2], існує єдиний розв'язок:

$$\tilde{u}(x, t) = \omega(x, t; \xi, \tau) \circledast F(\xi, \tau)$$

/5/

рівняння /3/. Тут $\otimes$ позначає операцію композиції узагальнених функцій [2]. Невідомі узагальнені функції $\rho_1(t), q_1(t)$, які входять у вираз для $F(\xi, \tau)$, знаходимо з умови

$$\tilde{u}(x, t) = 0, \quad x < h_1, \quad x > h_2, \quad /6/$$

яка, враховуючи однозначну розв'язність задач

$$\begin{aligned} u_t^1 - a_1^2 u_{xx}^1 &= 0, \quad x < h_1, \quad t > 0, \quad u^1|_{t=0+} = u^1|_{x=h_1-} = 0, \\ u_t^2 - a_2^2 u_{xx}^2 &= 0, \quad x > h_2, \quad t > 0, \quad u^2|_{t=0+} = u^2|_{x=h_2+} = 0, \end{aligned}$$

рівносильна тому, що

$$\lim_{\substack{x \rightarrow h_1-0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^{\infty} (F(y, \tau), \omega(x, t; y, \tau)) \varphi_1(t) dt = 0, \quad /7/$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow h_2+0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{\varepsilon}^{\infty} (F(y, \tau), \omega(x, t; y, \tau)) \varphi_2(t) dt &= 0, \\ \forall \varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}_+), \end{aligned} \quad /8/$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} (F(y, \tau), \omega(x, t; y, \tau)) \varphi(x) dx &= 0, \\ \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(-\infty; +\infty), \text{supp } \varphi \subset \{x < h_1\} \cup \{x > h_2\}. \end{aligned} \quad /9/$$

Тут через (F, φ) позначаємо дію узагальненої функції F на основну функцію φ .

Зауважимо, що /9/ виконується на підставі властивості фундаментальної функції

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, t; y, \tau) \varphi(x) dx = \varphi(y)$$

і того, що $\text{supp } F \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$, бо тоді, використовуючи аналог теореми Фубіні, запишемо /9/ як

$$(F, \lim_{t \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, t; y, \tau) \varphi(x) dx) = (F, \varphi) = 0.$$

Доведемо, що умови /7/ та /8/ дають змогу однозначно визначити $\rho_1(t), q_1(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. Припустивши, що є по дві узагальнені функції $\rho_1(t)$ та $\tilde{\rho}_1(t)$, $q_1(t)$ та $\tilde{q}_1(t)$ матимемо $\tilde{u}_1(x, t) - \tilde{u}_2(x, t) = \omega(x, t; y, \tau) \otimes F_1(y, \tau)$, де $F_1 = -a_1^2 z_1(\tau) \cdot \delta'(y - h_1) - a_2^2 z_2(\tau) \delta(y - h_2)$, $z_1(\tau) = \rho_1(\tau) - \tilde{\rho}_1(\tau)$, $z_2(\tau) = q_1(\tau) - \tilde{q}_1(\tau)$.

Тепер із умови /7/ при $F = F_1$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} [(z_1(\tau), \omega'(h_1 - \varepsilon, t; h_1, \tau)) + (z_2(\tau), \omega(h_1 - \varepsilon, t; h_1, \tau))] \varphi_1(t) dt &= /10/ \\ &= 0 \quad \forall \varphi_1(t) \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Перетворимо ліву частину рівності:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ (z_1(\tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega_y(h_1 - \varepsilon, t; h_1, \tau) \varphi_1(t) dt) + \right. \\
& \quad \left. + (z_2(\tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_1 - \varepsilon, t; h_1, \tau) \varphi_1(t) dt) \right\} = \\
& = (z_1(\tau), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_1 - \varepsilon, t; h_1, \tau) \varphi_1(t) dt) + \\
& + (z_2(\tau), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_1 - \varepsilon, t; h_1, \tau) \varphi_1(t) dt) = \\
& = (z_1(\tau), -\frac{1}{2a_1^2} \varphi_1(\tau) + \int_{\tau}^{\infty} \omega'_y(h_1, t; h_1, \tau) \varphi_1(t) dt) + \\
& + (z_2(\tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_1, t; h_1, \tau) \varphi_1(t) dt).
\end{aligned}$$

Наслідок аналогічних перетворень із /8/ одержуємо

$$(z_1(\tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega_y(h_2, t; h_1, \tau) \varphi_2(t) dt) + (z_2(\tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_2, t; h_1, \tau) \varphi_2(t) dt) = 0 \quad /II/$$

$\forall \varphi_2(t) \in \mathcal{D}_0(R_+).$

Додаючи /IO/ та /II/, маємо

$$\begin{aligned}
& (z_1(\tau), -\frac{1}{2a_1^2} \varphi_1(\tau) + \int_{\tau}^{\infty} \omega_y(h_1, t; h_1, \tau) \varphi_1(t) dt + \int_{\tau}^{\infty} \omega_y(h_2, t; h_1, \tau) \varphi_2(t) dt) + \\
& + (z_2(\tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_1, t; h_1, \tau) \varphi_1(t) dt + \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_2, t; h_1, \tau) \varphi_2(t) dt) = 0 \\
& \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}_0(R_+).
\end{aligned} \quad /12/$$

Система інтегральних рівнянь

$$-\frac{1}{2a_1^2} \varphi_1(\tau) + \int_{\tau}^{\infty} \omega_y(h_1, t; h_1, \tau) \varphi_1(t) dt + \int_{\tau}^{\infty} \omega_y(h_2, t; h_1, \tau) \varphi_2(t) dt = \psi_1(\tau), \quad /13/$$

$\int_{\tau}^{\infty} \omega(h_1, t; h_1, \tau) \varphi_1(t) dt + \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_2, t; h_1, \tau) \varphi_2(t) dt = \psi_2(\tau)$
 має єдиний розв'язок $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathcal{D}_0(R_+)$ при довільних $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}_0(R_+)$, оскільки спряжена до неї система інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{2a_1^2} K_1(t) + \omega_y(h_1, t; h_1, 0) * K_1(t) + \omega_y(h_2, t; h_1, 0) * K_2(t) = \Psi_1(t) \\ \omega(h_1, t; h_1, 0) * K_1(t) + \omega(h_2, t; h_1, 0) * K_2(t) = \Psi_2(t) \end{cases}$$

після перетворення Лапласа дає алгебричну систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{2a_1^2} \hat{K}_1(p) + \hat{\omega}_y(h_1, p; h_1, 0) \cdot \hat{K}_1(p) + \hat{\omega}(h_2, p; h_1, 0) \cdot \hat{K}_2(p) = \hat{\Psi}_1(p) \\ \hat{\omega}(h_1, p; h_1, 0) \cdot \hat{K}_1(p) + \hat{\omega}(h_2, p; h_1, 0) \cdot \hat{K}_2(p) = \hat{\Psi}_2(p) \end{cases}$$

з визначником $\Delta = \frac{1}{2(a_1 + a_2)} e^{-\sqrt{p}(\frac{h_2}{a_2} + \frac{|h_1|}{a_1})} \neq 0.$

Тому із /12/ знаходимо $z_1(\tau) = z_2(\tau) = 0$ у $\mathcal{D}'_0(R_+)$, а отже,

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2.$$

Теорема. Нехай $f(x, t) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\mu, \nu, \rho_2, q_2 \in \mathcal{D}'_0(R_+)$. Існує єдиний розв'язок (u, p_1, q_1) задачі /1/-/2/: узагальнені функції $p_1(t), q_1(t) \in \mathcal{D}'_0(R_+)$ визначаються формулою

$$\begin{aligned} & -(a_1^2 p_1(\tau), \psi_1(\tau) + (a_1^2 q_1(\tau), \psi_2(\tau) = \\ & = (-\mu(\tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega_y(h_1, t; 0, \tau) \varphi_1(t) dt + \int_{\tau}^{\infty} \omega_y(h_2, t; 0, \tau) \varphi_2(t) dt) + \\ & + (\nu(\tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_1, t; 0, \tau) \varphi_1(t) dt + \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_2, t; 0, \tau) \varphi_2(t) dt) - \\ & - (a_2^2 \rho_2(\tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega_y(h_1, t; h_2, \tau) \varphi_1(t) dt + \int_{\tau}^{\infty} \omega_y(h_2, t; h_1, \tau) \varphi_2(t) dt + \frac{1}{2a_2^2} \varphi_2(\tau)) + \\ & + (a_2^2 q_2(\tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_1, t; h_2, \tau) \varphi_1(t) dt + \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_2, t; h_2, \tau) \varphi_2(t) dt) + \\ & + (f(y, \tau), \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_1, t; y, \tau) \varphi_1(t) dt + \int_{\tau}^{\infty} \omega(h_2, t; y, \tau) \varphi_2(t) dt), \end{aligned}$$

де ψ_1, ψ_2 - довільні функції із $\mathcal{D}_0(R_+)$; φ_1, φ_2 - розв'язок системи інтегральних рівнянь /13/, а $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$ в Ω і має вигляд /3/. При $f(x, t) \equiv 0$, $\mu, \nu, \rho_2, q_2 \in \mathcal{D}_0(R_+)$, $\hat{\mu}(\rho), \hat{\nu}(\rho) = 0(e^{-b\sqrt{\rho}})$, $\hat{\rho}_2(\rho) \hat{q}_2(\rho) = O(e^{-c\sqrt{\rho}})$, $\rho \rightarrow \infty$, $b > \frac{|h_1|}{a_1}$, $c > \frac{|h_1|}{a_1} + \frac{h_2}{a_2}$.

Існує єдиний розв'язок задачі $u \in C^\infty(\Omega)$, $p_1, q_1 \in \mathcal{D}_0(R_+)$, який можна записати в явному вигляді.

І. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики, М.: Наука. 1981. 512 с. 2. Л о п у ш а н с ь к а Г.П. Про один підхід до вивчення крайових задач у просторах розподілів і граничні інтегральні рівняння // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. № 5. С. 632-639. 3. С т а с в к М., Т а ц і й Р. Структура фундаментальної системи розв'язків диференціального узагальненого квазістаціонарного рівняння 2-го порядку // Диференц. рівняння. 1994. Вип. 182. С. 97-99.

Стаття надійшла до редколегії 10.05.94

В.А.Козицький

ОБЕРНЕНА КОЕФІЦІЄНТНА ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО
РІВНЯННЯ ВОЛОГОПЕРЕНОСЕННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу визначення пари функцій

 $(u(x,t), \eta(u)) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T) \times C^1(R)$, які задовольняють умови:

$$u_{xxt} - Ku_t + (\eta(u)u_x)_x = 0, \quad (x,t) \in Q_T = (0,H) \times (0,T); \quad /1/$$

$$(u_{xt} + \eta(u)u_x)_{x=0} = -\varphi(t), \quad t \in [0,T]; \quad /2/$$

$$u_x(H,t) = 0, \quad t \in [0,T]; \quad /3/$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,H]; \quad /4/$$

$$u(x_0,t) = \beta(t), \quad t \in [0,T], \quad /5/$$

де x_0 - довільна фіксована точка із $(0,H)$.Зробимо припущення: $K = \text{const} > 0$, $u_0(x) \in C^2[0,H]$, $\varphi(t) \in C^1[0,T]$, $u'_0(H) = 0$, $\beta(t) \in C^1[0,T]$, $u_0(x_0) = \beta(0)$, $\eta(\xi) \in C^1(R)$.

Наближений розв'язок оберненої задачі /1/-/5/ будемо шукати шляхом мінімізації функціоналу нев'язки:

$$I(\eta) = \int_0^T [U(x_0,t) - \beta(t)]^2 dt, \quad /6/$$

де $U(x,t)$ розв'язок прямої задачі /1/-/4/. Для розв'язання оберненої задачі в екстремальній постановці /1/-/4/, /6/ використаємо градієнтний метод оптимізації [2], що потребує, в свою чергу, розв'язання проблеми знаходження градієнта функціоналу $I(\eta)$. Для отримання $\nabla I(\eta)$ скористаємось функціоналом Лагранжа:

$$G(\eta) = I(\eta) + \int_0^T \int_0^H \psi(x,t) [u_{xxt} - Ku_t + (\eta(u)u_x)_x] dx dt, \quad /7/$$

який дає змогу перейти від задачі умовної мінімізації /1/-/4/, /6/ до задачі безумовної мінімізації. У /7/ $\psi(x,t)$ - множник Лагранжа.Нехай δG і δu -прирости G і u , які відповідають приросту $\delta \eta$. Відкинувши члени другого порядку мализни і застосувавши формулу інтегрування частинами, отримаємо для приросту δG

$$\begin{aligned} \delta G = & \int_0^H \int_0^T [-\psi_{xxt} + K \psi_t + (\eta(u) \psi_x)_x + 2(u(x_0, t) - \\ & - \beta(t)) \delta(x - x_0)] \delta u \delta x dt + \int_0^T \int_0^H \psi_x u_x \delta \eta dx dt - \\ & - \int_0^T \left[\psi \left(\eta \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right) \right]_0^H dt + \int_0^T (\eta \psi_x - \psi_{xt}) \times \\ & \times \delta u|_{x=H} dt + \int_0^H \psi(x, t) \delta u|_0^T dx, \end{aligned}$$

де δx — δ -функція.

Прирівнявши до нуля вирази при δu і взявши до уваги

$$\delta u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, H], \quad \frac{\partial}{\partial x} (\delta u(H, t)) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$\left(\eta(u) \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} \right)_{x=0} = 0, \quad t \in [0, T],$$

матимемо

$$\delta G(\eta) = \int_0^H \int_0^T \psi_x u_x \delta \eta dx dt, \quad /8/$$

де $u(x, t)$ — розв'язок задачі /1/-/4/: $\psi(x, t)$ — розв'язок спряженої задачі:

$$\psi_{xxt} - K \psi_t - (\eta(u) \psi_x)_x = 2(u(x_0, t) - \beta(t)) \delta(x - x_0); \quad /9/$$

$$\psi_x(0, t) = 0, \quad (\psi_{xt} - \eta(u) \psi_x)_{x=H} = 0, \quad t \in [0, T]; \quad /10/$$

$$\psi(x, t) = 0, \quad x \in [0, H]. \quad /11/$$

Для розв'язання коефіцієнтної оберненої задачі для нелінійного рівняння найчастіше використовують параметричну ідентифікацію [1].

Апроксимацію функції $\eta(u)$ запишемо у вигляді

$$\eta(u) = \sum_{s=1}^M \eta_s \gamma_s(u), \quad /12/$$

де $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_M)$ — набір деяких базисних функцій: $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_M)$ — вектор із невідомих компонент.

На практиці за базисні функції переважно беруть кубічні B-сплайни.

Нехай

$$y_0 = \max_{(x,t) \in \bar{Q}_T} u(x, t), \quad y_1 = \max_{(x,t) \in \bar{Q}_T} u(x, t).$$

Область визначення $\eta(u) \in [y_0, y_1]$. Розглянемо рівномірну сітку

$$W = \{y_0 + \Delta y \bar{J}, \bar{J} = -2, -1, 0, 1, \dots, M+3, \Delta y = \frac{y_1 - y_0}{M}\}$$

і задамо функцію

$$B_0(\bar{u}) = \frac{1}{6\Delta y^3} [(\bar{u} + 2\Delta y)_+^3 - 4(\bar{u} + \Delta y)_+^3 + 6(\bar{u})_+^3 - 4(\bar{u} - \Delta y)_+^3 + (\bar{u} - 2\Delta y)_+^3],$$

де $\bar{u} = u - y_0$; $(a)_+ = \max\{a, 0\}$.

Зауважимо, що $B_0(\bar{u})$ має властивість

$$B_0(\bar{u}) = \begin{cases} > 0, & |\bar{u}| < 2\Delta y, \\ = 0 & |\bar{u}| \geq 2\Delta y, \end{cases}$$

яка дає змогу істотно спростити числову реалізацію задачі.

У /12/ за базисні функції $\chi_s(u)$ візьмемо кубічні B-сплайни:

$$\chi_1(u) = 2B_0(\bar{u} + \Delta y) + B_0(\bar{u}),$$

$$\chi_2(u) = -B_0(\bar{u} + \Delta y) + B_0(\bar{u}),$$

$$\chi_s(u) = B_0(\bar{u} - s\Delta y), \quad s = \overline{3, M-2}$$

$$\chi_{M-1}(u) = B_0(\bar{u} - (M-3)\Delta y) - B_0(\bar{u} - (M-1)\Delta y),$$

$$\chi_M(u) = B_0(\bar{u} - (M-2)\Delta y) + 2B_0(\bar{u} - (M-1)\Delta y),$$

де $M = m+1$.

Гradientом функції $I(\eta_1, \dots, \eta_M)$ від M змінних буде вектор із компонент:

$$\frac{\partial I}{\partial \eta_s} = \int_0^T \int_0^H \psi_x u_x \eta_s(u) dx dt, \quad s = \overline{1, M}.$$

/13/

де $u(x, t)$ - розв'язок задачі /I/-/4/; $\psi(x, t)$ - розв'язок спряженої задачі /9/-/II/. Таким чином, для знаходження gradientа функціоналу $I(\eta)$ потрібно спочатку розв'язати пряму, потім спряжену задачі і скористатись формулами /12/, /13/.

Ітераційний процес gradientного методу організовують стандартним методом [1, 2], наприклад, методом найшвидшого спуску. В цьому випадку ітераційний процес для знаходження вектора параметрів

$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_M)$ будемо за формулою

$$\eta^{n+1} = \eta^n - \alpha_n i'(\eta^n),$$

/14/

де $\alpha_n = \min_{\alpha > 0} |(\eta^n - \alpha \dot{\eta}^n)|$.

Пряму нелінійну задачу /1/-/4/ можна розв'язати методом сіток. У прямокутнику $\{(x,t): 0 \leq x \leq H, 0 \leq t \leq T\}$ будемо сітку $x_i = ih, t_j = j\tau, H = nh, T = p\tau$. Уводимо позначення $u(ih, j\tau) = v_i, u(ih, (j+1)\tau) = u_i$. Апроксимуючи похідні скінченно різницевиими співвідношеннями, отримуємо схему, яка на j по t шарі характеризується системою алгебричних рівнянь:

$$\frac{1}{h} \eta(v_0)(u_1 - u_0) + \frac{1}{\tau h} (u_1 - u_0 - v_1 + v_0) = -\varphi^j.$$

$$K \frac{u_i - v_i}{h} = \frac{1}{h^2} \left[(\eta(v_{i-1}) - \frac{1}{\tau}) v_{i-1} - (\eta(v_{i-1}) + \eta(v_i) - \frac{2}{\tau}) v_i + \right. \\ \left. + (\eta(v_i) - \frac{1}{\tau}) v_{i+1} \right] + \frac{1}{\tau h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}),$$

/15/

$$u_n = u_{n-1}.$$

де $\varphi^j = \varphi(j\tau)$.

Систему /15/ можна розв'язати методом прогонки, якщо врахувати, що при $J=0$; усі v_i відомі з умови /4/. Запишемо рекурентні формули:

$$u_i = \varepsilon_i u_{i+1} + \theta_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

/16/

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \theta = \frac{K \varphi^j \tau h - (v_1 - v_0)}{\eta(v_0) + 1},$$

$$\varepsilon_i = [2 + kh^2 - \varepsilon_{i-1}]^{-1}, \quad \theta_i = \frac{\theta_{i-1} + k \tilde{v}_i}{2 + kh^2 - \varepsilon_{i-1} - k},$$

$$v_i = h^2 v_1 + \frac{\tau}{k} \left[(\eta(v_{i-1}) - \frac{1}{\tau}) v_{i-1} - (\eta(v_{i-1}) + \right.$$

$$\left. + \eta(v_i) - \frac{2}{\tau}) v_i + (\eta(v_i) - \frac{1}{\tau}) v_{i+1} \right], \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Із урахуванням умови $u_n = u_{n-1}$ та формули /16/ у процесі зворотної прогонки знаходимо u_i . Заміняючи потім значення v_i знайденим значенням u_i на наступному по t шарі /у початковий момент $v_i = v(ih)$. Для практичного знаходження $\psi(x, t)$ спряжену задачу /9/-/11/ перепишемо у такому вигляді:

$$\psi_{xxt} - k\psi_t - \frac{\partial}{\partial x} (\eta(u)\psi_x) = 0, \quad (x, t) \in Q_T; \quad /17/$$

$$\psi_x = (0, t), \quad x \in [0, H]; \quad /18/$$

$$\psi_x(0, t) = 0, \quad (\psi_{xt} - \eta(u)\psi_x)_{x=H} = 0, \quad t \in [0, T]; \quad /19/$$

$$[\psi(x, t)]_{x_0} = 0, \quad [\psi_{xt} - \eta(u)\psi_x]_{x_0} = 2(q(t) - u(x_0, t)) \quad /20/$$

де $[\psi]_{x_0}$ стрибок функції ψ у точці x_0 .

Остання задача може бути розв'язана методом сіток.

Отже, для знаходження пари функцій $\{u(x, t), \eta(u)\}$ ітераційний процес слід будувати таким чином. Функцію $\eta(u)$ апроксимуємо у вигляді /12/. Задамо початкове наближення невідомих параметрів $(\eta_1, \dots, \eta_M)$ і розв'язуємо крайову задачу /1/-/4/. Потім знаходимо розв'язок спряженої задачі /17/-/20/ і на основі формули /13/ визначаємо складові градієнта функціоналу невід'язки /6/. Далі знаходимо нове наближення невідомих параметрів $(\eta_1, \dots, \eta_M)$ із формули /14/ і процес обчислень повторюємо. Ітераційний процес припиняємо за критерієм невід'язки.

І. А л и ф а н о в О.М., А р т ю х и н Е.А., Р у м я н -
ц е в С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.:
Наука, 1988. 289 с. 2. В а с и л ь е в Ф.П. Численные методы
решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 545 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.94

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ
ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Дослідженню задач з нелокальними крайовими умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь останнім часом приділяється велика увага [1,3,4,6], що зумовлене як проблемами загальної теорії граничних задач, так і конкретними задачами математичної фізики, які описують моделі різноманітних фізичних і технічних процесів /див. бібліографію в [6]/.

У даній статті досліджується задача з нелокальними умовами за змінною t та регулярними крайовими умовами за змінною x для одного диференціального рівняння із частинними похідними четвертого порядку. Ця задача є умовно коректною, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників.

1. Розглянемо в області $\Omega = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in [0, l]\}$ задачу

$$L(u) \equiv \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 u(t, x)}{\partial x^4} = f(t, x); \quad /1/$$

$$M_q(u) \equiv \frac{\partial^q u}{\partial t^q} \Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^q u}{\partial t^q} \Big|_{t=T} = \varphi_q(x) \quad (q = \overline{0, 3}); \quad /2/$$

$$P_j(u) \equiv \sum_{m=0}^3 \alpha_m^{(j)} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right) \Big|_{x=0} + \sum_{m=0}^3 \beta_m^{(j)} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right) \Big|_{x=l} = 0 \quad (j = \overline{1, 4}), \quad /3/$$

де умови /3/ - регулярні; $\mu \in \mathbb{C} \setminus [0]$, $\alpha_m^{(j)}, \beta_m^{(j)} \in \mathbb{R}$.

Спочатку дослідимо задачу на власні значення

$$X^{(iv)}(x) = \lambda^4 X(x), \quad P_j(X(x)) = 0 \quad (j = \overline{1, 4}). \quad /4/$$

Відомо [2], що при $k \rightarrow \infty$ власні значення $\lambda_k (k \in \mathbb{N})$ задачі /4/, множину яких позначимо через Λ , мають таку асимптотику:

$$|\lambda_k| = O(k). \quad /5/$$

Власні функції $X_k(x)$ задачі /4/, що відповідають власним значенням λ_k , мають вигляд

$$X_k(x) = \sum_{s=1}^4 a_s(\lambda_k) \exp(\lambda_k \psi_s x), \quad /6/$$

де $\psi_s (s = \overline{1, 4})$ - корені четвертого степеня з 1, а коефіцієнти $a_s(\lambda_k) (s = \overline{1, 4})$ визначаються зі системи рівнянь

$$\sum_{s=1}^4 \sum_{m=0}^3 a_s(\lambda_k)(\lambda_k \psi_s)^m (\alpha_m^{(j)} + \beta_m^{(j)}) \exp(\lambda_k \psi_s t) = 0 \quad (j = \overline{1,4}) \quad /7/$$

Легко показати, що при $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ $|a_s(\lambda_k)| = O(1)$, а

$$X_k(x) = O(\exp(|\operatorname{Re} \lambda_k| t)). \quad /8/$$

Введемо функціональні простори, які використовуватимемо надалі:
 B_δ ($\delta > 0$) – банахів простір функцій $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi(x)\|_{B_\delta} = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| \cdot \exp(\delta |\lambda_k|);$$

$C^n([0, T], B_\theta)$ – простір функцій $v(t, x)$ таких, що $\frac{\partial^j v}{\partial t^j}$ ($j = \overline{0, n}$) для кожного $t \in [0, T]$ належить простору B_θ і неперервна по t в нормі B_θ :

$$\|v(t, x)\|_{C^n([0, T], B_\theta)} = \sum_{p=0}^n \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^p v}{\partial t^p} \right\|_{B_\theta}.$$

Припустимо, що $\varphi_q(x) \in B_\delta$ ($q = \overline{0, 3}$) і $f(t, x) \in C([0, T], B_\alpha)$, де γ, α – деякі додатні числа.

Розв'язок задачі /I/-/3/ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \quad /9/$$

Кожна з функцій $u_k(t)$ ($k \in \mathbb{N}$) визначається як розв'язок задачі

$$L_k(u_k) \equiv u_k^{(iv)}(t) + \lambda_k^4 u_k(t) = f_k(t); \quad /10/$$

$$M_{qk}(u_k) \equiv \left. \frac{d^q u_k(t)}{dt^q} \right|_{t=0} - \mu \left. \frac{d^q u_k(t)}{dt^q} \right|_{t=T} = \varphi_{qk} \quad (q = \overline{0, 3}) \quad /11/$$

де $f_k(x) = \int_0^t f(t, x) X_k(x) dx$, $\varphi_{qk} = \int_0^t \varphi_q(x) X_k(x) dx$ ($q = \overline{0, 3}$).

Для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ однорідне рівняння

$$L_k(u_k) = 0 \quad /10'/$$

має фундаментальну систему розв'язків: $u_{kp} = \exp(\lambda_k \omega_p t)$, де ω_p ($p = \overline{1, 4}$) – корені четвертого степеня з -1 , а розв'язок рівняння /10'/, що задовольняє умови

$$M_{qk}(u_k) = 0 \quad (q = \overline{0, 3}), \quad /11'/$$

має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{p=1}^4 b_p(\lambda_k) \exp(\lambda_k \omega_p t). \quad /12/$$

Сталі $b_p(\lambda_k)$ ($p = \overline{1,4}$) визначаються зі системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{p=1}^4 b_p(\lambda_k)(\lambda_k \omega_p)^q (1 - \mu \exp(\lambda_k \omega_p T)) = 0 \quad (q = \overline{0,3}), \quad /13/$$

визначник якої

$$\Delta(\lambda_k) = 16i\lambda_k^6 \prod_{p=1}^4 (1 - \mu \exp(\lambda_k \omega_p T)). \quad /14/$$

Теорема I. Для єдиності розв'язку задачі /I/-/3/ в просторі $C^4(\Omega)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$|1 - \mu \exp(\lambda_k \omega_p T)| \neq 0 \quad (p = \overline{1,4}, \lambda_k \in \Lambda). \quad /15/$$

Доведення здійснюємо за схемою доведення теореми 5.3 у праці [6, розд. 2].

2. Розглянемо питання про існування розв'язку задачі /I/-/3/. Розв'язок задачі /IO/-/II/ зображається у вигляді

$$u_k(t) = U_k(t) + V_k(t), \quad /16/$$

де $U_k(t)$ - розв'язок задачі /IO/-/II'/; $V_k(t)$ - розв'язок задачі /IO'/-/II/. Нехай виконуються умови /15/. Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує функція Гріна $G_k(t, \tau)$ задачі /IO'/-/II'/, яка у квадраті $K_T = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq t \leq T, 0 \leq \tau \leq T\}$, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, визначається формулою

$$G_k(t, \tau) = g_k(t, \tau) - \frac{1}{8\lambda_k^3} \sum_{p=1}^4 \omega_p \exp(\omega_p \lambda_k (t - \tau)) \frac{1 + \mu \exp(\omega_p \lambda_k T)}{1 - \mu \exp(\omega_p \lambda_k T)}, \quad /17/$$

де $g_k(t, \tau) = \frac{\text{sgn}(t - \tau)}{8\lambda_k^3} \sum_{p=1}^4 \omega_p \exp(\omega_p \lambda_k (t - \tau));$

на сторонах $\tau = 0$ ($\tau = T$) квадрата K_T функція $G_k(t, \tau)$ доозначається за неперервності справа /зліва/.

Розв'язки задач /IO/-/II'/ і /IO'/-/II/ зображаються відповідно формулами

$$U_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau, \quad /18/$$

$$V_k(t) = \sum_{p=1}^4 \sum_{q=0}^3 \frac{u_{kp}(t)}{\Delta(\lambda_k)} (-1)^{p+q+1} \varphi_{qk} \lambda_k^{-q} \det \|u_{kr}^{(j)}(0) - \mu u_{kr}^{(j)}(T)\| \quad \begin{matrix} j = \overline{0,3}; j \neq q \\ r = \overline{1,4}; r \neq p \end{matrix} \quad /19/$$

На основі формул /17/-/19/ отримуємо такі оцінки:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^l U_k(t)}{\partial t^l} \right| \leq c_1 \sum_{p=1}^4 \frac{\exp(2|\lambda_k|T) \cdot |\lambda_k|^{l-3}}{|1 - \mu \exp(\omega_p \lambda_k T)|} \int_0^T |f_k(\tau)| d\tau \quad (l = \overline{0,4}); \quad /20/$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^r V_k(t)}{\partial t^r} \right| \leq c_2 \sum_{p=1}^4 \sum_{q=0}^3 \frac{\exp(\lambda_k T) |\lambda_k|^{r-q}}{|1 - \mu \exp(\omega_p \lambda_k T)|} |\varphi_{qk}| \quad (r = \overline{0, 4}), \quad /21/$$

де $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – сталі, що не залежать від λ_k .

Розв'язок задачі /1/-/3/ формально зображається у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (U_k(t) + V_k(t)) \chi_k(x), \quad /22/$$

де $U_k(t)$, $V_k(t)$ визначаються відповідно формулами /18/, /19/.

Ряд /22/, взагалі, розбіжний, бо не дорівнюють нулю вирази

$|1 - \mu \exp(\lambda_k \omega_p T)|$ / $p = \overline{1, 4}$ /, що входять знаменниками у формули /18/-/19/ і можуть набувати яких завгодно близьких до нуля значень для нескінченної множини значень $\lambda_k \in \Lambda$. Тому питання існування розв'язку задачі /1/-/3/ пов'язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 2. Нехай існують стала $M > 0$ і $\gamma \in \mathbb{N}$, такі, що для всіх /за винятком скінченного числа/ $\lambda_k \in \Lambda$ виконуються нерівності

$$|1 - \mu \exp(\omega_p T \lambda_k)| \geq M \cdot |\lambda_k|^{-\gamma-\alpha} \exp(-T |\lambda_k|) \quad (p = \overline{1, 4}); \quad 0 < \alpha < 1. \quad /23/$$

Якщо $\varphi_q(x) \in B_\delta$ ($q = \overline{1, 4}$) і $f(t, x) \in C([0, T], B_\theta)$, де $\delta = 2T + \ell + \varepsilon$, $\theta = 3T + \ell + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$), то існує розв'язок задачі /1/-/3/ з простору $C^4(\Omega)$, який неперервно залежить від функцій $f(t, x)$ і $\varphi_q(x)$ / $q = \overline{0, 3}$ /.

Доведення. З оцінок /8/, /20/, /21/, /23/ і формули /22/ випливає

$$\begin{aligned} \|u(t, x)\|_{C^4(\Omega)} &\leq c_3 \left(\sum_{q=0}^3 \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{qk}| \cdot \exp((2T + \ell) |\lambda_k|) \cdot |\lambda_k|^{4+\delta+\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| \exp((3T + \ell) |\lambda_k|) \cdot |\lambda_k|^{4+\delta+\alpha} \right) \leq \\ &\leq c_4 \left(\sum_{q=0}^3 \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{qk}| \exp((2T + \ell + \varepsilon) |\lambda_k|) + \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| \exp((3T + \ell + \varepsilon) |\lambda_k|) \right) = /24/ \\ &= c_4 \left(\sum_{q=0}^3 \|\varphi_q(x)\|_{B_\delta} + \|f(t, x)\|_{C([0, T], B_\theta)} \right), \end{aligned}$$

де c_3, c_4 – додатні сталі, що не залежать від λ_k ; $0 < \varepsilon < 1$ і таке, що задовольняє нерівність $|\lambda_k|^{4+\delta+\alpha} < c_0 \exp(|\lambda_k| \varepsilon)$ ($c_0 > 0$)

З оцінки /24/ випливає доведення теореми.

3. З'ясуємо, коли виконуються оцінки /23/. Для цього потрібне таке твердження.

Лема. Нехай $\Phi(\lambda_k)$ - обмежена послідовність дійсних чисел.
Тоді нерівність

$$\left| \Phi(\lambda_k) - \frac{d(\lambda_k)}{|\lambda_k| \cdot T} \right| \leq |\lambda_k|^{-2-\sigma} \quad (0 < \sigma < 1)$$

/25/

для майже всіх /щодо міри Лебега/ чисел T має не більше ніж скінченну кількість розв'язків в числах $\lambda_k \in \Lambda$ і $d(\lambda_k) \in \mathbb{Z}$.

Доведення леми здійснюємо за схемою доведення леми 2.4 [6, розд. 1] із урахуванням оцінки /5/.

Теорема 3. Для майже всіх /щодо міри Лебега/ чисел T нерівності /24/ виконуються при $\gamma \geq 1$ для всіх /крім скінченної кількості/ $\lambda_k \in \Lambda$.

Доведення. Легко бачити, що

$$\begin{aligned} & |1 - \mu \exp(\omega_p \lambda_k T)| \geq |\mu| \exp((\operatorname{Re} \omega_p \operatorname{Re} \lambda_k - \operatorname{Im} \omega_p \operatorname{Im} \lambda_k) T) \cdot \sin(\psi + \\ & + (\operatorname{Re} \omega_p \operatorname{Im} \lambda_k + \operatorname{Im} \omega_p \operatorname{Re} \lambda_k) T) \geq |\mu| \exp(-T |\lambda_k|) \cdot \frac{1}{5} (\psi + (\operatorname{Re} \omega_p \operatorname{Im} \lambda_k + \\ & + \operatorname{Im} \omega_p \operatorname{Re} \lambda_k) T) - d_p(\lambda_k) \geq |\mu| \cdot T |\lambda_k| \exp(-T |\lambda_k|) (\gamma T |\lambda_k|)^{-1} \times \\ & \times (\psi + (\operatorname{Re} \omega_p \operatorname{Im} \lambda_k + \operatorname{Im} \omega_p \operatorname{Re} \lambda_k) T) - d_p(\lambda_k) / |\lambda_k| T, \end{aligned}$$

де $\psi = \arctg(\frac{\operatorname{Im} \mu}{\operatorname{Re} \mu})$; $d_p(\lambda_k) \in \mathbb{Z}$ / $p = \overline{1, 4}$ / і задовольняє нерівність

$$\left| \frac{1}{5} (\psi + (\operatorname{Re} \omega_p \operatorname{Im} \lambda_k + \operatorname{Im} \omega_p \operatorname{Re} \lambda_k) T) - d_p(\lambda_k) \right| \leq \frac{1}{2}.$$

З нерівності /26/ і доведеної леми випливає доведення теореми.

Результати роботи переносяться на випадок рівняння

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right)^n u(t, x) = f(t, x) + \varepsilon \int_0^{s_1+s_2} K(t, x, y) \cdot F(t, y, \bar{u}(t, y)) dy,$$

де $\bar{u}(t, y) = \operatorname{col} \left\{ \frac{\partial^{s_1+s_2} u(t, y)}{\partial t^{s_1} \partial y^{s_2}}; s_1+s_2 \leq 4n \right\}$; ε - малий параметр; $n \geq 1$.

Нарешті зауважимо, що у праці [2] для рівняння /1/ досліджена задача з локальними чотириточковими умовами за змінною t та само-спряженими умовами за змінною x /частковим випадком умов /3//, які унеможливають появу малих знаменників.

І. Б о р о к В.М., К е н н е Э. Классификация нелокальных краевых задач в узкой полосе //Укр. мат. журн. 1994. Т.46. № 4. С. 338-346. В а л и ц к и й Ю.Н. Условная корректность четырехточечной задачи для одного дифференциального уравнения //Вопр. корректности обрат. задач мат. физики. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР. 1982. С.45-49. З а д о р о ж н а Н.М., М е л ь н и к О.М., П т а ш н и к Б.И. Нелокальная крайовая задача для параболических уравнений //Укр.мат.журн. 1994. Т.46. № 12. С. 1621-1627/. 4. Л а в р е н ю к С.П. Нелокальные задачи для параболических уравнений второго порядка //Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 12. С. 3-5. Н а й м а р к М.А. Линейные диф-

Дифференциальные операторы. М., 1969. 326 с. 6. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. К., 1984. 264 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.04.94

УДК 517.948

М.И.Михалюк, Є.М.Парасюк

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

$$\text{ДЛЯ } u_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^n}$$

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшукуванні плоскої однов'язної області D , при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x, y)$.

Введемо допоміжну функцію $z = z(t)$, яка відображає конформно круг $|t| < 1$, комплексної площини t на область D площини $z = x + iy$, що містить початок координат, причому $z(0) = 0$, $z'(0) > 0$. Функцію $z = z(t)$ назовемо розв'язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x, y)$ і густини σ .

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв'язування нелінійного інтегрального рівняння*

$$\sigma z_*(t) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{u_e(z(\tau)) d\tau}{z - t}, \quad |t| > 1, \quad /1/$$

де

$$z_*(t) = z\left(\frac{1}{t}\right), \quad u_e(z) = - \frac{2}{\pi} \frac{\partial V_e}{\partial z}, \quad /2/$$

$$z(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots, \quad \alpha_1 > 0.$$

Розглянемо випадок, коли

$$u_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad /3/$$

де a — комплексне число; $\sigma = 1$.

Підставляючи /3/, /2/ в /1/, отримуємо нелінійну систему рівнянь:

© Михалюк М.И., Парасюк Є.М., 1996

* И в а н о в В.К. Интегральные уравнения теории потенциала // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. № 3. С. 409-411.

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_1} - \frac{n a \alpha_n}{\alpha_1^{n+1}}, \\ \alpha_n = \frac{a}{\alpha_1^n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n-1} = \alpha_{n+1} = \dots = 0. \end{cases} \quad /4/$$

Система /4/ має єдиний розв'язок (α_1, α_n) відповідно при

$$|a| \leq \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad /5/$$

який задовольняє умову

$$z'(t) \neq 0 \quad \text{при } |t| < 1.$$

Таким чином, справедлива така теорема.

Теорема. Для потенціалу /3/, який задовольняє умову /5/, обернена задача для постійної густини $\sigma = 1$ має єдиний розв'язок у класі однозв'язних областей. При

$$|a| > \frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

задача в цьому класі областей розв'язку не має.

Приклад. Для потенціалу /3/ при

$$a = \sqrt{\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

єдиним розв'язком у класі конформних відображень є відповідно функція

$$z(t) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} t + \frac{1}{[(n)(n+1)]^{\frac{1}{2}}} t^n, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Стаття надійшла до редколегії 20.II.93

В.М.Сікорський

ТЕОРЕМА ТИПУ ФРАГМЕНА-ЛІНДЕЛЬОФА
ДЛЯ ДЕЯКОГО КЛАСУ КВАЗІЛІНІЙНИХ
ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

У теоремах типу Фрагмена-Ліндельофа стверджується, що розв'язок однорідної крайової задачі в необмеженій області для еліптичного чи параболічного рівняння є або тотожним нулем, або оцінюється знизу /в деякому сенсі/ певною функцією, яка визначається вихідними даними. Для лінійних рівнянь з теорем типу Фрагмена-Ліндельофа, зокрема, впливають теореми про єдиність розв'язків крайових задач /наприклад, [2]/, а для нелінійних рівнянь - умови єдиності тривіального розв'язку $u \equiv 0$ та оцінка знизу нетривіального розв'язку /наприклад, [3]/. У нашій роботі описаний клас квазілінійних параболічних рівнянь, для яких відповідні однорідні крайові задачі мають тільки тривіальний розв'язок.

Нехай Q - довільна область в $\mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$, яка лежить в шарі $\{(x,t): T_0 < t < T_1\}$, де $T_0 > -\infty$, $T_1 \leq +\infty$, і її перетини гіперплощинами $\{t = \tau\}$ непорожні для довільних $\tau \in (T_0, T_1)$. Позначимо $\Gamma(Q) = \partial Q \cap \{(x,t): t < T_1\}$. Очевидно, що $\Gamma(Q)$ - параболічна межа області Q .

Розглянемо задачу

$$u_t - a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t,u,\nabla u) = f(x,t) \text{ в } Q; \quad /1/$$

$$u = h \quad \text{на } \Gamma(Q). \quad /2/$$

Тут і далі вважається, що за індексами, які повторюються, ведеться підсумовування від 1 до n . Припустимо, що функції $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), $f(x,t)$ - визначені всюди на Q , і, крім цього, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq 0$ для довільних $(x,t) \in Q$, $\xi \in \mathbb{R}^n$; функція $c(x,t,s,\rho)$ визначена для всіх $(x,t) \in Q$, $s \in \mathbb{R}^1$ і $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \in \mathbb{R}^n$, причому $c(x,t,0,\rho) = 0$; функція h визначена і неперервна на $\Gamma(Q)$. Зауважимо, що задача /1/, /2/ є:

- а/ першою змішаною задачею, якщо $T_0 > -\infty$, $\partial Q \cap \{T_0 < t < T_1\} = \emptyset$;
- б/ задачею Коші, якщо $T_0 > -\infty$, $\partial Q \cap \{T_0 < t < T_1\} = \emptyset$;
- в/ задачею Фур'є /задачею без початкових умов/, якщо $T_0 = -\infty$.

Означення. Розв'язком задачі /1/, /2/ назовемо функцію $u \in C^{2,1}(\bar{Q}) \cap C(Q)$, яка задовольняє рівняння /1/ в Q та умову /2/.

Цілком очевидно, що функція $u \equiv 0$ є розв'язком задачі /1/, /2/, коли $f \equiv 0$ і $h \equiv 0$. Знайдемо умови на коефіцієнти рівняння /1/, при яких ця задача не має інших, крім тривіального $u \equiv 0$, розв'язків.

Додатково припустимо, що коефіцієнти рівняння /1/ задовольняють такі умови:

/А/ для довільних $s \in \mathbb{R}^1$, $\rho \in \mathbb{R}^n$ і $(x, t) \in Q$

$$c(x, t, s, \rho) s \geq q(x, t) |s|^{m+1},$$

де $m > 1$, $q(x, t) > 0$;

/В/ для будь-якої точки $(x_0, t_0) \in Q$

$\sup_{Q \cap P_R(x_0, t_0)} \left[1 + \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x, t)| \right] \cdot q^{-1}(x, t) = o(1) R^2$ при $R \rightarrow +\infty$,
де $q(x, t)$ і m з умови /А/,

$$P_R(x_0, t_0) = \{(x, t) : |x - x_0|^2 + |t - t_0| < R^2, t \leq t_0\} -$$

- обмежений параболоїд;

(С) $b_i(x, t) \operatorname{sgn} x_i > 0$ на Q .

Теорема. Нехай виконуються умови /А/, /В/, /С/. Тоді задача /1/, /2/, коли $f \equiv 0$, $h \equiv 0$, має лише тривіальний розв'язок ($u \equiv 0$).

Д о в е д е н н я. Для доведення скористаємося ідеєю з праці /1/. Припустимо, що існує нетривіальний розв'язок задачі /1/, /2/ при $f \equiv 0$ і $h \equiv 0$. Додамо і віднімемо в лівій частині рівняння /1/ з $f \equiv 0$ вираз $q(x, t) |u|^{m-1} u$. Після нескладних перетворень одержимо

$$u_i - a_{ij}(x, t) u_{x_j} + b_i(x, t) u_{x_i} + q(x, t) |u|^{m-1} u + c^*(x, t) - q^*(x, t) u = 0, \quad /3/$$

де $c^*(x, t) = c(x, t, u(x, t), \nabla u(x, t)) / u(x, t)$, якщо $u(x, t) \neq 0$, і $c^*(x, t) = 0$, якщо $u(x, t) = 0$; $q^*(x, t) = q(x, t) |u(x, t)|^{m-1}$.

Зафіксуємо довільно вибрані точку $(x_0, t_0) \in Q$ і число $R > 0$. Розглянемо функцію

$$V(x, t; x_0, t_0, R) = \frac{\eta(x_0, t_0; R) R^\alpha}{[R^2 - |x - x_0|^2 - |t - t_0|]^\alpha},$$

де $\alpha = \frac{2}{(m-1)}$;

$$\eta(x_0, t_0, R) = \sup_{P_R(x_0, t_0) \cap Q} \left(\frac{\alpha \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n |a_{ii}(x, t)| + 4(\alpha - 1) \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x, t)| \right]}{q(x, t)} \right)^{\alpha/2}.$$

Далі, якщо це не викликає сумнівів, писатимемо ρ і V замість відповідно $P_R(x_0, t_0)$ і $V(x, t; x_0, t_0, R)$. Легко переконатись, що функція V є визначеною на ρ , задовольняє на $\rho \cap Q$ нерівність

$$V_t - a_{ij} V_{x_i x_j} + b_i V_{x_i} + q V^m \geq 0 \quad /4/$$

і згідно з умовою /B/ $V(x_0, t_0; x_0, t_0, R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$.

Віднявши від рівняння /3/ нерівність /4/, одержимо

$$(u - V)_t - a_{ij} (u - V)_{x_i x_j} + b_i (u - V)_{x_i} + q(|u|^{m-1} u - |V|^{m-1} V) + (c^*(x, t) - q^*(x, t)) u \leq 0 \quad /5/$$

на $Q \cap \rho$.

Покажемо, що звідси випливає нерівність $u(x, t) \leq V(x, t; x_0, t_0, R)$ на $Q \cap \rho$. Дійсно, припустимо, що це не так. Позначимо через M множину точок $(x, t) \in \rho \cap Q$, таких, що $u(x, t) > V(x, t; x_0, t_0, R)$. Оскільки u є неперервною на $\bar{Q}$, $u = 0$ на $\Gamma(Q)$, а $V(x, t) > 0$ на ρ і $V(x, t) \rightarrow +\infty$, коли $\text{dist}((x, t), S) \rightarrow 0$, де $S = \partial \rho \cap \{t < t_0\}$, то множина M перебуває на додатній відстані від поверхні $\sigma = \partial(Q \cap \rho) \cap \{t < t_0\}$. Звідси та з неперервності на $Q \cap \rho$ функції $(u - V)(x, t)$ випливає існування точки (x_1, t_1) , яка належить M і в якій функція $(u - V)(x, t)$ набуває найбільшого на M додатного значення. Очевидно, що

$$(u - V)_t|_{(x_1, t_1)} \geq 0, \quad (u - V)_{x_i}|_{(x_1, t_1)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$a_{ij}(x_1, t_1)(u - V)_{x_i x_j}|_{(x_1, t_1)} \leq 0.$$

Оскільки $u(x_1, t_1) > V(x_1, t_1; x_0, t_0, R) > 0$ і функція $|u|^{m-1} u$ строго зростаюча, то

$$q(|u|^{m-1} u - |V|^{m-1} V)|_{(x_1, t_1)} > 0.$$

Таким чином, перші три доданки в лівій частині /5/ є невід'ємними, четвертий – строго додатний. Згідно з умовою /A/, врахувавши, що $u(x_1, t_1) > 0$, маємо

$$[c^*(x_1, t_1) - q^*(x_1, t_1)] u(x_1, t_1) = [c(x, t, u, \nabla u) - q u^m]|_{(x_1, t_1)} \geq 0.$$

Отже, ліва частина нерівності /5/ в точці (x_1, t_1) набуває додатного значення. Ми прийшли до протиріччя. Таким чином, виконується нерівність $u(x, t) \leq V(x, t; x_0, t_0, R)$ на $Q \cap \rho$.

Покажемо, що $-u(x,t) \leq V(x,t; x_0, t_0, R)$ на $P \cap Q$. Для цього зробимо в рівнянні /1/ ($f=0$) та умові /2/ заміну $w = -u$ і прийнемо позначення $\bar{c}(x,t,w) = -c(x,t,-w)$. У результаті отримаємо задачу, цілком аналогічну вихідній задачі; для неї справедливі умови /A/, /B/, /C/. Отже, як вище показано, $w(x,t) \leq V(x,t; x_0, t_0, R)$ на $Q \cap P$. Звідси і з попереднього випливає нерівність

$$|u(x,t)| \leq V(x,t; x_0, t_0, R) \text{ на } Q \cap P. \quad /6/$$

Тепер прийнемо в /6/ $x = x_0, t = t_0$ і перейдемо до границі при $R \rightarrow +\infty$. Одержимо $u(x_0, t_0) = 0$. Оскільки точка (x_0, t_0) довільна, то $u \equiv 0$ в Q . Теорема доведена.

І. Б о к а л о М.М. О единственности решений краевых задач для некоторых почти линейных параболических уравнений в неограниченных областях // Нелинейн. гранич. задачи. 1992. № 4. С. 12-18.
2. О л е й н и к О.А., Р а д к е в и ч Е.Ф. Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделёфа для общих параболических систем дифференциальных уравнений // Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 4. С. 59-70. 3. Х а л л а е в М.Х. Некоторые теоремы типа Фрагмена-Линделёфа для решений полулинейных параболических неравенств // Мат. заметки. 1990. Т. 48. № 3. С. 151-153.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.94

УДК 511.364

Я.М.Холявка

СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ ЧИСЕЛ, ЗВ'ЯЗАНИХ З $p(z)$ ТА $sn(z)^*$

Нехай $p(z)$ - еліптична функція Вейерштрасса, q_1, q_3 - її інваріанти, $2\omega, 2\omega_1$ - деяка фіксована пара основних періодів. Відомо [1], що існує еліптична функція Якобі $sn z$ для якої $4K = 4\omega$, $2iK' = 2\omega_1$ є основними періодами. Позначимо через α модуль $sn z$, $\xi_0, \dots, \xi_6$ - наближачі алгебричні числа, n_i та L_i - їхні степені та довжини, $n = \deg Q(\xi_0, \dots, \xi_6)$. У нашій роботі наведена схема доведення оцінки сумісного наближення алгебричними числами деяких чисел, зв'язаних з еліптичними функціями Якобі та Вейерштрасса.

Теорема. Нехай $\beta \in \mathbb{C}$, β відрізняється від полюсів p та $sn z$,

© Холявка Я.М., 1996

* Ця робота частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук /грант № АРУ 051106/.

$$P = n \left[\ln n + \sum_{i=0}^4 n_i^{-1} \ln L_i + \min(n_5, n_6) (1 + n_5^{-1} \ln L_5 + n_6^{-1} \ln L_6) \right].$$

Тоді виконується така оцінка

$$|\omega - \xi_0| + |\omega_1 - \xi_1| + |\kappa - \xi_2| + |\beta - \xi_3| + \\ + |p(\beta) \operatorname{sn} \beta - \xi_4| + |q_2 - \xi_5| + |q_3 - \xi_6| > \exp(-\Lambda P^3),$$

де Λ - деяка ефективна стала.

Доведення цієї теореми ґрунтується на другому методі Гельфонда [2], в якому параметри та допоміжну функцію обирають таким чином:

$$K = \lambda^4 P^2, \quad L = \lambda^2 P, \quad N = \lambda P, \quad S = \lambda^3 P, \\ f(z) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L C_{k,l} z^k (p(z) \operatorname{sn} z)^l,$$

$$C_{k,l} = \sum_{\tau=1}^n C_{k,l,\tau} \zeta_\tau, \quad C_{k,l,\tau} \in \mathbb{N},$$

де $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ - твірні елементи поля $\mathbb{Q}(\xi_0, \dots, \xi_6)$; λ - достатньо велике натуральне число. В основній лемі методу Гельфонда нулі допоміжної функції доводяться до λN , що суперечить теоремі про нулі для функцій цього виду. Отримане протиріччя доводить теорему.

Зауважимо, що подібну оцінку тим самим методом можна отримати також для інших еліптичних функцій Якобі.

1. Г у р в и ц А., К у р а н т Р. Теория функций. М., 1968.
2. Ф е л ь д м а н Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М., 1982.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.95

З М І С Т

Б а з и л е в и ч Л.Б., З а р і ч н и й М.М. Про метризацію гіперпростору орієнтованих дуг	3
Т к а ч О.Й. Топологія простору часткових перерізів розшарувань над континуумами Пеано	6
А н д р і й ч у к В.І. Про еліптичні криві з виродженою редукцією	9
З е л і с к о В.Р. Сингулярні ділянки матричного многочлена.	13
Г а т а л е в и ч А.І. Про адекватні праві дуо-кільця. . .	16
О р и щ и н О.Г. Аналоги теореми Вімана для цілого кратного ряду Діріхле	20
С к а с к і в О.Б. Про центральний показник абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле	23
П р и т у л а Я.Я. Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле	25
Д о м а н с ь к и й П.П. Про умови стійкості руху пружних тіл за двома мірами	30
Є в т у ш е н к о О.О., З е л е н я к В.М. Термопружний стан складеної пластинки, послабленої ламаною тріщиною	37
Х л е б н і к о в Д.Г., Б у р д а Р.М., В и ш н е в с ь к и й К.В. Температурні напруження в циліндричній оболонці з приклеєною перегородкою	41
Л е в и ц ь к и й В.П., Н о в о с а д В.П. Термопружне контактування осесиметричних тіл при змінному навантаженні	45
П и р " е в Ю.О., М о к р и к Р.І. Нелінійна нестационарна задача про термопружний контакт з урахуванням термічного опору	51
С у л и м Г.Т., Л о з и н с ь к и й Д.В. Пружні властивості стохастично армованих стрічкових композитів	56
Д і д и к В.З., К о в а л ь ч у к Б.В. Метод Майзеля в узагальненій динамічній термопружності анізотропного тіла.	60
Б е р е г о в а Г.І., К и р и л и ч В.М. Узагальнена гіперболічна задача Стефана в криволінійному секторі	63
Б а б а к П.П. Асимптотика періодичних розв'язків однієї сингулярно збуреної системи	66
Л о п у ш а н с ь к а Г.П., К р и н и ц ь к а О.О. Ц і м а р н о І.О. Про одну неklasичну задачу спряження	71

К о з и ц ь к и й В.А. Обернена коефіцієнтна задача для квазілінійного рівняння вологоперенесення третього по- рядку	76
Г о й Т.П. Нелокальна крайова задача для диференціаль- ного рівняння із частинними похідними четвертого порядку. . . .	81
М и х а л ю к М.Й., П а р а с ю к Є.М. Обернена задача логарифмічного потенціалу для $u_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^n}$	86
С і к о р с ь к и й В.М. Теорема типу Фрагмена-Лінде- льофа для деякого класу квазілінійних параболічних рівнянь . . .	88
Х о л я в к а Я.М. Сумісне наближення чисел, зв'язаних з $\wp(z)$ та $\operatorname{sn}(z)$	91

Збірник наукових праць

Міністерство освіти України
Вісник Львівського університету
Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

В и п у с к 43

ПИТАННЯ АЛГЕБРИ
ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Редактор Е.А. Г л а в а ц ь к а
Художній редактор Е.А. К а м е н щ и к
Технічний редактор С.Д. Д о в б а
Коректор М.Т. Ломеха

Підп. до друку 13.06.96. Формат 60х84/16. Папір офсет. Офсет.друк.
Умовн.друк.арк. 5,58. Умовн. фарбовідб. 5,81.Обл.-вид. арк. 5,64.
Вид. № 65. Зам.2241. Замовне.

Державне спеціалізоване видавництво "Світ"
при Львівському університеті.
290000 Львів, вул. Дорошенка, 41

Львівська обласна книжкова друкарня.
290004 Львів, вул.Пекарська, 13

ISSN 0201-758X. ISSN 0320-6572.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. 1996. Вип. 43. 1-96