УДК 539.3:519.6

Я.Г. Савула, В.В. Кревс

Про застосування методу декомпозиції області до задачі теплопровідності для тіла з тонким покриттям

Проблеми математичного моделювання процесу розподілу тепла у середовищах з тонкими включеннями або покриттями розглядались багатьма дослідниками [1,2,4-6]. У даній праці пропонується комбінація методу декомпозиції області (МДО) [3,7] та методу скінченних елементів (МСЕ) [3-5,8] для побудови розв'язку даної задачі з максимальним використанням специфічної структури математичної моделі. Важливою особливістю МДО є зручність реалізації МДО на масивно-паралельних комп'ютерах.

<u>Тіло з тонким покриттям.</u> Розглянемо задачу теплопровідності для тіла з тонким покриттям (рис. 1):

$$\Omega = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in D \subset R^2, -h \le \alpha_3 \le h\right\},$$

яке описується криволінійною системою координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

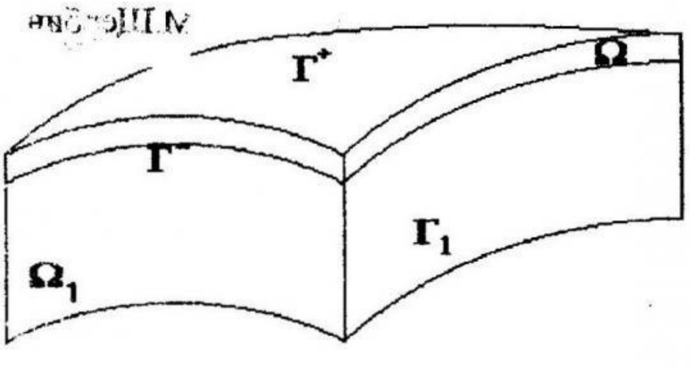

Рис. 1

Стаціонарний розподіл температури в областях Ω_1 та Ω описується системою диференціальних рівнянь [4,5]

$$\begin{cases} L_1 T_1 = q_1, \ (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_1, \\ Lt = \widetilde{q}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in D, \end{cases} \tag{1.1}$$

де

$$Lt=\begin{bmatrix} -\frac{2h}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\lambda\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_1}\right)-\frac{2h}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\lambda\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_2}\right)-\frac{2}{3}\frac{h^3}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\lambda\frac{A_2}{A_1}\frac{1}{h}(k_2-k_1)\frac{\partial t_2}{\partial\alpha_1}\right) \\ -\frac{2h}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\lambda\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial t_2}{\partial\alpha_1}\right)-\frac{2h}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\lambda\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial t_2}{\partial\alpha_2}\right)-\frac{2}{3}\frac{h^2}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\lambda\frac{A_2}{A_1}\left((k_2-k_1)\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_1}\right)\right)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\frac{h^3}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\lambda\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{1}{h}(k_1-k_2)\frac{\partial t_2}{\partial\alpha_2}-k_1k_2\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_2}\right)\right)+\frac{2}{3}\frac{h^3}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\lambda\frac{A_2}{A_1}k_1k_2\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_1}\right) \\ -\frac{2}{3}\frac{h^2}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\lambda\frac{A_1}{A_2}\left((k_1-k_2)\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_2}\right)\right)+\frac{2}{3}h\lambda k_1k_2t_2 \end{bmatrix},$$

$$L_1T_1=-\nabla\left(\lambda_1\nabla T_1\right),\ t=\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{q}=\begin{bmatrix}2hq-(1+hk_1)(1+hk_2)q_n^+-(1-hk_1)(1-hk_2)q_n^-\\ -(1+hk_1)(1+hk_2)q_n^++(1-hk_1)(1-hk_2)q_n^-\end{bmatrix},$$

у яких здійснена підстановка

$$q_n^+=a^+\left(t_1+t_2-T_c^+\right)\ \text{на}\ \Gamma^+, \tag{1.2}$$

де a^+ — коефіцієнт теплообміну на Γ^+; T_c^+ — температура зовнішнього середовища на Γ^+.

Система зв'язаних диференціальних рівнянь (1.1) розв'язується за таких граничних умов:

$$-\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial n_1}=a_1\left(T_1-T_c\right)\ \text{на}\ \Gamma_1; \tag{1.3}$$

$$-\lambda\frac{\partial t}{\partial n}=a(t-t_c)\ \text{на}\ \Gamma=\partial D, \tag{1.4}$$

де $t_c=\left[t_1^c,t_2^c\right]^T, t_1^c=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}T_c\,d\alpha_3,\ t_2^c=\frac{3}{2h^2}\int\limits_{-h}^{h}T_c\,\alpha_3\,d\alpha_3;$ n_1,n — зовнішні стосовно Ω_1,Ω нормалі до $\Gamma_1,\partial D$; T_c — температура зовнішнього середовища;

а також умов спряження

$$T_1=t_1-t_2,\quad q_n^-=\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial n_1}\ \text{на}\ \Gamma^-, \tag{1.5}$$

де n_1 — зовнішня стосовно Ω_1 нормаль до Γ^-.

Метод декомпозиції області. Розглянемо застосування МДО для чисельного аналізу математичної моделі (1.1)-(1.5). Нехай $t^0 \in W_2^1(D) \times W_2^1(D)$ — початкове наближення, $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність додатних параметрів релаксації, які забезпечують та прискорюють збіжність. Тоді МДО реалізується ітераційним процесом.

Ітерація $k\ (k \geq 1)$: розв'язуємо задачі

$$\begin{cases} L_1 T_1^{k+1} = q_1 \text{ в } \Omega_1, \\ -\lambda_1 \dfrac{\partial T_1^{k+1}}{\partial n_1} = a_1\left(T_1^{k+1} - T_c\right) \text{ на } \Gamma_1, \\ T_1^{k+1} = t_1^k - t_2^k \text{ на } \Gamma^-, \end{cases}$$

$$\begin{cases} L t^{k+1/2} = \widetilde{q} \text{ в } D, \\ -\lambda \dfrac{\partial t^{k+1/2}}{\partial n} = a\left(t^{k+1/2} - t^c\right) \text{ на } \partial D, \\ \left(q_n^+\right)^{k+1/2} = t_1^{k+1/2} + t_2^{k+1/2} - T_c^+ \text{ на } \Gamma^+, \\ \left(q_n^-\right)^{k+1/2} = \lambda_1 \dfrac{\partial T_1^{k+1}}{\partial n_1} \text{ на } \Gamma^-; \end{cases} \tag{2.1}$$

обчислюємо $t^{k+1} = t^k + \beta_k\left(t^{k+1/2} - t^k\right)$ в $\overline{D}$.

Ітераційний процес завершується, якщо виконується умова

$$\left\| T_1^{k+1} - T_1^k \right\|_1 + \left\| t^{k+1} - t^k \right\|_2 < \varepsilon \left(\left\| T_1^k \right\|_1 + \left\| t^k \right\|_2 \right), \tag{2.2}$$

де $\|\cdot\|_i$ — норми у відповідних просторах.

У працях [3,7] показано, що для збіжності МДО достатньо, щоб оператори L_1, L задачі (1.1)-(1.5) були симетричними та додатно визначеними, а області Ω_1, Ω — однозв'язними областями з ліпшицевими границями. Властивості операторів задачі (1.1)-(1.5) характеризуються лемою та теоремою [5].

Лема. Диференціальні оператори за просторовими змінними задачі (1.1)-(1.5) з однорідними граничними умовами є симетричними.

Теорема. Якщо серединна поверхня шару є гладкою поверхнею без особливих точок, $A_i > 0, i = 1,2$, області Ω_1, Ω — однозв'язними областями з ліпшицевими границями, а в області $\overline{D}$ виконується нерівність $3-h^2k_1k_2>0$, то оператори L_1, L задачі (1.1)-(1.5) є додатно визначеними.

З огляду на це застосування МДО обгрунтоване, і для розв'язання підзадач в Ω_1, Ω можна ефективно використати МСЕ.

Питання вибору параметрів релаксації $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ важливе, оскільки обгрунтований вибір $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ може істотно зменшити кількість ітерацій МДО, що необхідне для досягнення заданої точності. У [3] показано, що оптимальне значення $\beta_k<1$ та дорівнює

$$\beta_k = 2/(m+M), \tag{2.3}$$

де $m \le \dfrac{\|T_1\|_{E_1}}{\|t\|_{E_2}} + 1 \le M, \forall g \in L^2(\Gamma^-)$, де $\|\cdot\|_{E_i}, i=1{,}2$ — енергетичні норми у відповідних просторах; T_1, t — квазі-гармонійні функції, що є розв'язками таких задач:

$$\begin{cases} L_1T^1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \\ -\lambda_1 \dfrac{\partial T^1}{\partial n_1} = a_1T^1 \text{ на } \Gamma_1, \\ T_1^1 = g \text{ на } \Gamma^-, \end{cases} \quad \begin{cases} Lt = 0 \text{ в } D, \\ -\lambda \dfrac{\partial t}{\partial n} = at \text{ на } \partial D, \\ \left(q_n^+\right) = t_1 + t_2 \text{ на } \Gamma^+, \\ t_1 - t_2 = g \text{ на } \Gamma^-. \end{cases} \tag{2.4}$$

Зважаючи на це, бажано записати ітераційний процес (2.1)-(2.2) так, щоб на кожній ітерації можна було адаптивно обчислювати β_k, що є близькими до оптимального значення. Запропонуємо одну можливу схему МДО з адаптивним вибором параметрів релаксації β_k, яка виявилась досить ефективною порівняно зі схемою МДО з оптимальним значенням параметра релаксації β_k та зі схемою МДО, що запропонована у праці [7]. Нехай β_0 — початкове значення параметра релаксації. Подамо алгоритм у такому вигляді.

Ініціалізація алгоритму: розв'язуємо задачі

$$\begin{cases} L_1 T_1^1 = q_1 \text{ в } \Omega_1, \\ -\lambda_1 \dfrac{\partial T_1^1}{\partial n_1} = a_1\left(T_1^1 - T_c\right) \text{ на } \Gamma_1, \\ T_1^1 = t_1^0 - t_2^0 \text{ на } \Gamma^-, \end{cases} \quad \begin{cases} L t^{1/2} = \widetilde{q} \text{ в } D, \\ -\lambda \dfrac{\partial t^{1/2}}{\partial n} = a\left(t^{1/2} - t^c\right) \text{ на } \partial D, \\ \left(q_n^+\right)^{1/2} = t_1^{1/2} + t_2^{1/2} - T_c^+ \text{ на } \Gamma^+, \\ \left(q_n^-\right)^{1/2} = \lambda_1 \dfrac{\partial T_1^1}{\partial n_1} \text{ на } \Gamma^- \end{cases} \tag{2.5}$$

обчислюємо $t^1 = t^0 + \beta_0\left(t^{1/2} - t^0\right), v^1 = t^1 - t^0$ в $\overline{D}$;

<u>**Головний цикл:**</u> ітерація $k\ (k \ge 1)$:

розв'язуємо задачу

$$\begin{cases} L_1 V_1^{k+1} = 0 \text{ в } \Omega_1, \\ -\lambda_1 \dfrac{\partial V_1^{k+1}}{\partial n_1} = a_1 V_1^{k+1} \text{ на } \Gamma_1, \\ V_1^{k+1} = v_1^k - v_2^k \text{ на } \Gamma^-; \end{cases} \tag{2.6}$$

обчислюємо $T_1^{k+1} = T_1^k + V_1^{k+1}$ в $\overline{\Omega}_1$, $d_k = \left\| V_1^{k+1} \right\|_{E_1}^2 / \left\| v^k \right\|_{E_2}^2 + 1$;

$$\beta_k = \begin{cases} 2/\left(M_1 + m_1\right),\ M_1 = m_1 = d_1,\ k = 1, \\ 2/\left(M_k + m_k\right), M_k = \max\left(M_{k-1}, d_k\right), m_k = \min\left(m_{k-1}, d_k\right), k \ge 2; \end{cases} \tag{2.7}$$

розв'язуємо задачу

$$\begin{cases} L v^{k+1/2} = \widetilde{q}\big|_{q=0} \text{ в } D, \\ -\lambda \dfrac{\partial v^{k+1/2}}{\partial n} = a v^{k+1/2} \text{ на } \partial D, \\ \left(q_n^+\right)^{k+1/2} = v_1^{k+1/2} + v_2^{k+1/2} - T_c^+ \text{ на } \Gamma^+ \\ \left(q_n^-\right)^{k+1/2} = \lambda_1 \dfrac{\partial V_1^{k+1}}{\partial n_1} \text{ на } \Gamma^-; \end{cases} \tag{2.8}$$

обчислюємо

$$t^{k+1/2} = t^{k-1/2} + v^{k+1/2}, v^{k+1} = \beta_k\left(t^{k+1/2} - t^k\right), t^{k+1} = t^k + v^{k+1} \text{ в } \overline{D}, \tag{2.9}$$

Ітераційний процес завершується, якщо виконується умова

$$\left\| T_1^{k+1} - T_1^k \right\|_1 + \left\| t^{k+1} - t^k \right\|_2 < \varepsilon\left(\left\| T_1^k \right\|_1 + \left\| t^k \right\|_2 \right), \tag{2.10}$$

де $\|\cdot\|_i$ — норми у відповідних просторах (енергетичні, L^2, L^∞).

Чисельні результати. Порівняємо вибір параметрів релаксації згідно із запропонованою схемою та конструктивною схемою вибору параметрів релаксації $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ [7], які забезпечують прямування β_k до оптимального значення, коли $k \to \infty$. Як приклад розглянемо задачу про теплопровідність осесиметричного порожнистого циліндра Ω_1 (тіло) з тонким зовнішнім покриттям Ω (тонкий шар). З огляду на умови осьової симетрії, достатньо розглянути лише частину поперечного перерізу циліндра, для якої

$$\Omega_1 = \left\{(r,\varphi) : 1 \le r \le 2\,,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\right\},$$

$$D = \left\{(r,\varphi) : r = 2.1\,,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\right\},$$

$$\Omega = \left\{(r,\varphi) : 2 \le r \le 2.2\,,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\right\},$$

$$\Gamma_1 = \left\{(r,\varphi) : r = 1\,,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\right\},$$

$$\Gamma^- = \left\{(r,\varphi) : r = 2\,,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\right\},$$

$$\Gamma^+ = \left\{(r,\varphi) : r = 2.2\,,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\right\}.$$

Алгоритм (2.5)-(2.10) застосований до модельної задачі:

$$\begin{cases} L_1 T_1 = 0 \text{ в } \Omega_1,\ \lambda_1 = 1, \\ -\dfrac{\partial T_1}{\partial n_1} = T_1 - 1 \text{ на } \Gamma_1, \\ T_1 = t_1 - t_2 \text{ на } \Gamma^-, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lt = \tilde{q}\big|_{q=0} \text{ в } D,\ \lambda = 0.1, \\ -0.1\dfrac{\partial t}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial D, \\ q_n^+ = t_1 + t_2 - 10 \text{ на } \Gamma^+, \\ q_n^- = \dfrac{\partial T_1}{\partial n_1} \text{ на } \Gamma^-. \end{cases}$$

Аналітичний розв'язок цієї задачі, який легко отримати, можна використати для оцінки точності отриманих чисельних результатів. При чисельному розв'язанні використовувались біквадратичні лагранжеві скінченні елементи. Результати для Ω_1, що складається з 200 криволінійних чотирикутних елементів та 861 вузлів, а також для Ω, що складається з 20 елементів та 41 вузла відповідно, відображені у табл.1. У цій таблиці наведена кількість ітерацій (IT), що потрібна для задоволення (2.10) з $\varepsilon = 10^{-3}$ у різних нормах, а також норми похибок на останній ітерації при різних варіантах вибору β_k. Адаптивні схеми порівнюються з неадаптивною схемою (2.1)-(2.2), в якій використовувалось значення β_k=0.1616733, яке є близьким до оптимального та отримане згідно із запропонованою схемою з $\varepsilon=10^{-7}$. Як бачимо з табл.1, адаптивні вибори β_k згідно із запропонованою схемою або схемою [3] є ефективними. Порівняння цих двох підходів для вибору β_k можна здійснити за допомогою табл.2, у якій відображена кількість ітерацій, що потрібна для задоволення (2.10) із заданою точністю.

Таблиця 1

Норма	L^∞ — норма		L^2 — норма		Енерг. норма	
	IT	похибка	IT	похибка	IT	похибка
β_k =const =0.1616733	8	.00575	8	.00386	7	.00539
Вибір β_k згідно з (2.7)	9	.00645	9	.00476	8	.00559
Вибір β_k згідно з [3]	10	.00694	9	.00587	7	.00598

Таблиця 2

Відносна похибка	$\varepsilon=10^{-3}$	$\varepsilon=10^{-4}$	$\varepsilon=10^{-5}$
β_k =const =0.1616733	7	12	22
Вибір β_k згідно з (2.7)	8	15	26
Вибір β_k згідно з [3]	7	29	53

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности: В 2 ч. М.: Высш. шк. 1982. 327с. 2. Кит Г.С., Кривцун М.Т. Плоские задачи термоупругости для тела с трещинами. К. Наук. думка. 1983. 273с. 3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. 1989. 608с. 4. Савула Я.Г., Дыяк И.И., Дубовик А.В. Применение комбинированной модели для расчёта напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций. //Прикл. механика. 1989. Т.25. №9. 225с. 5. Савула Я.Г., Сипа І.М., Струтинський І.В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.37. С.39-45. 6. Флейшман Н.П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип.39. С.30-34. 7. Marini L.D. and Quarteroni A.. An Iterative Procedure for Domain Decomposition Methods: A Finite Element Approach. In First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Eds. R.Glowinski, G.H. Golub, G.A.Meurant, Y.Periaux. SIAM. Philadelphia. 1988. P.129-143. 8. Rek-

torys K. Variational methods in mathematics, science and engineering. Prague. 1980. 589p.

Стаття надійшла до редколегії 12.02.96

УДК 539.3:519.6

Дяконюк Л. М., Савула Я. Г.

Дослідження задачі тепломасоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям.

Математичні моделі тепломасоперенесення у середовищах з тонкими покриттями і включеннями знаходять застосування в різних галузях науки, зокрема, в екології, мікроелектроніці, приладобудуванні тощо. З огляду на це, побудова таких математичних моделей розглядалась багатьма авторами [1,2]. У даній праці запропонована комбінована модель, яка описується диференціальними операторами різної вимірності за просторовими змінними.

1. Математична модель тепломасоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям.

Сформулюємо постановку задачі теплопровідності для неоднорідного тіла, яке складається з масивної частини, що займає область Ω_1, та тонкого покриття, яке займає область Ω_2^*.

Вважатимемо, що область віднесена до декартової системи координат x_1, x_2, x_3, а область Ω_2^* — до декартової системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, причому справедливе співвідношення

$$\Omega_2^* = \left\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \colon \ \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega_2; \ \ -\frac{h}{2} \le \alpha_3 \le \frac{h}{2}\right\},$$

де Ω_2 — деяка двовимірна область з ліпшицевою границею Γ_2. Товщина h є малою величиною.

Нехай границя області Ω_1, яка теж вважається ліпшицевою, складається з двох частин $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)}$.