torys K. Variational methods in mathematics, science and engineering. Prague. 1980. 589p.

Стаття надійшла до редколегії 12.02.96

УДК 539.3:519.6

Дяконюк Л. М., Савула Я. Г.

Дослідження задачі тепломасоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям.

Математичні моделі тепломасоперенесення у середовищах з тонкими покриттями і включеннями знаходять застосування в різних галузях науки, зокрема, в екології, мікроелектроніці, приладобудуванні тощо. З огляду на це, побудова таких математичних моделей розглядалась багатьма авторами [1,2]. У даній праці запропонована комбінована модель, яка описується диференціальними операторами різної вимірності за просторовими змінними.

1. Математична модель тепломасоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям.

Сформулюємо постановку задачі теплопровідності для неоднорідного тіла, яке складається з масивної частини, що займає область Ω_1, та тонкого покриття, яке займає область Ω_2^*.

Вважатимемо, що область віднесена до декартової системи координат x_1, x_2, x_3, а область Ω_2^* — до декартової системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, причому справедливе співвідношення

$$\Omega_2^* = \left\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \colon\ \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega_2;\ \ -\frac{h}{2} \le \alpha_3 \le \frac{h}{2}\right\},$$

де Ω_2 — деяка двовимірна область з ліпшицевою границею Γ_2. Товщина h є малою величиною.

Нехай границя області Ω_1, яка теж вважається ліпшицевою, складається з двох частин $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)}$.

Область Ω_2^* обмежена двома лицьовими площинами $\Omega_2^-\left(\alpha_3 = -\frac{h}{2}\right)$, $\Omega_2^+\left(\alpha_3 = \frac{h}{2}\right)$ та боковою циліндричною поверхнею $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_2$, $-\frac{h}{2} \le \alpha_3 \le \frac{h}{2}$. Вважатимемо, що частина границі $\Gamma_1^{(2)}$ збігається з площиною Ω_2^-. На зовнішній границі областей Ω_1 *і* Ω_2^* відбувається теплообмін за Ньютоном.

Процес тепломасоперенесення в Ω_2^* опишемо диференціальним рівнянням (1) [1] :.

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\lambda\frac{\partial T}{\partial\alpha_i} + c\rho\frac{\partial T}{\partial\tau} = q, \qquad i = 1,2,3. \tag{1}$$

Зважаючи на мализну товщини шару h, задамо розподіл температури T за змінною α_3 в області Ω_2^* у вигляді лінійного закону:

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau) = t(\alpha_1, \alpha_2, \tau) + \frac{2\alpha_3}{h} t_1(\alpha_1, \alpha_2, \tau) \tag{2}$$

Підставляючи (2) в (1) та ортогоналізуючи нев'язку до 1 та α_3 в сенсі інтеграла за змінною α_3 на проміжку $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, отримаємо рівняння:

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\lambda_0\frac{\partial t}{\partial\alpha_1} + \chi_0\frac{\partial t}{\partial\tau} = \\ = hq_0 - q^+ - q^-, \tag{3}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\lambda_0\frac{\partial t_1}{\partial\alpha_1} + 4\frac{\lambda_0}{h^2}t_1 + \frac{\chi_0}{3}\frac{\partial t_1}{\partial\tau} = \\ = \frac{h}{3}q_1 - (q^+ - q^-), \tag{4}$$

де

$$\chi_0 = hc\rho, \qquad \lambda_0 = h\lambda,$$

$$q_0 = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} q d\alpha_3, \qquad q_1 = \frac{6}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2} q\alpha_3 d\alpha_3 ,$$

$$q^+ = -\lambda\frac{\partial T}{\partial\alpha_3}, \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \frac{h}{2};$$

$$q^- = \lambda\frac{\partial T}{\partial\alpha_3}, \quad \text{при} \quad \alpha_3 = -\frac{h}{2}.$$

До цих рівнянь додамо граничні та початкові умови для функцій t, t_1, які отримуємо так само, як і рівняння (3), (4) :

$$\begin{aligned} -\lambda_0\frac{\partial t}{\partial\nu} &= \alpha_0\left(t - t^c\right), \\ -\lambda_0\frac{\partial t_1}{\partial\nu} &= \alpha_0\left(t_1 - t_1^c\right) \qquad \text{на} \quad \Gamma; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} t &= t^0 \qquad \text{при} \quad \tau = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_2, \\ t_1 &= t_1{}^0 \qquad \text{при} \quad \tau = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Тут

$$\alpha_0 = \alpha h, \qquad t^c = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} T_c d\alpha_3,$$

$$t_1^c = \frac{6}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2} T_c\alpha_3 d\alpha_3,$$

$$t^0 = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} T_0 d\alpha_3, \qquad t_1^0 = \frac{6}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2} T_0\alpha_3 d\alpha_3.$$

Процес тепломасоперенесення в області Ω_1 опишемо рівнянням

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x_i}+c\rho\frac{\partial T_1}{\partial\tau}=q_1^{\cdot},\qquad i=1,2,3. \tag{7}$$

На зовнішній границі тіла задано теплообмін за Ньютоном :

$$q^+=\alpha\left(t+t_1-T_c\right),$$

$$-\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial\nu}=\alpha_1\left(T_1-T_c\right),\qquad \text{на}\ \ \Gamma_1^{(1)}. \tag{8}$$

На границі $\Gamma_1^{(2)}$ необхідно задати такі умови спряження, які виражають рівність температур і теплових потоків :

$$T_1=t-t_1,$$

$$\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial\nu}=q^-\ \text{на}\ \Gamma_1^{(2)}*[0,T] \tag{9}$$

Для повного опису математичної моделі задамо розподіл функції T_1 в початковий момент часу :

$$T_1=T_1^0\quad \text{при}\ \ \tau=0\quad \text{в}\quad \Omega_1. \tag{10}$$

Таким чином, математична модель задачі складається зі зв'язаної системи диференціальних рівнянь різної вимірності (3), (4), (7), граничних умов (5), (8), умов спряження (9) та початкових умов (6), (10).

2. Варіаційна постановка задачі.

Розглянемо варіаційну постановку задачі.

Введемо простори :

$$V_1=\left\{u_1(x_1,x_2,x_3):\ \ u_1\in W_2^1(\Omega_1),\ \ u_1=0\quad \text{на}\ \ \Gamma_1^{(1)}\right\},$$

$$V_2=\left\{u_2(x_1,x_2,x_3):\ \ u_2\in W_2^1(\Omega_1),\ \ u_2=0\quad \text{на}\ \ \Gamma_2\right\},$$

$$V=\left\{\begin{matrix}(u_1,u_2,u_3):\ u_1\in V_1,\ u_2\in V_2,\ u_3\in V_2,\\ u_1=u_2-u_3\quad \text{на}\ \Gamma_1^{(2)}\end{matrix}\right\}.$$

Домноживши рівняння (7), (3), (4) відповідно на

$$u_1\in V_1,u_2\in V_2,u_3\in V_2,$$

і зінтегрувавши частинами, отримаємо варіаційні рівняння.

Отже, нехай задано функції

$$T_1^0\ \text{в}\ \Omega_1,\ t^0\ \text{в}\ \Omega_2,\ t_1^0\ \text{в}\ \Omega_2,\ q_1^{\cdot}\in L_2(H(\Omega_1);\ 0,\theta),\ q^+\in L_2(H(\Omega_1);\ 0,\theta).$$

Потрібно знайти

$$T_1 \in (V_1;\ 0,\theta),\ t \in (V_2;\ 0,\theta),\ t_1 \in (V_2;\ 0,\theta),$$

такі, що задовольняють рівняння (11) :

$$\begin{aligned}
&m_1(T_1', u_1) + a_1(T_1, u_1) - b_1(T_1, u_1) = l_1(u_1),\\
&m_2(t', u_2) + a_2(t, u_2) - b_2(q^-(T_1), u_2) = l_2(u_2),\\
&m_3(t_1', u_3) + a_3(t_1, u_3) - b_3(q^-(T_1), u_3) = l_3(u_3),\\
&\forall (u_1, u_2, u_3) \in V.
\end{aligned} \tag{11}$$

Тут

$$m_1(T_1', u_1) = \int_{\Omega_1} c_1\rho_1 \frac{\partial T}{\partial \tau} u_1 d\Omega,$$

$$m_2(t', u_2) = \frac{1}{3}\int_{\Omega_2} \chi_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} u_2 d\Omega,$$

$$m_3(t_1', u_3) = \frac{1}{3}\int_{\Omega_2} \chi_0 \frac{\partial t_1}{\partial \tau} u_3 d\Omega,$$

$$a_1(T_1, u_1) = \int_{\Omega_1} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_i}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} d\Omega, \qquad i = 1,2,3$$

$$a_2(t, u_2) = \int_{\Omega_2} \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial \alpha_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} d\Omega,$$

$$a_3(t_1, u_3) = \int_{\Omega_2}\left(\frac{1}{3}\lambda_0 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + 4\frac{\lambda_0}{h^2} t_1 u_3\right) d\Omega,\ l = 1,2,$$

$$l_1(u_1) = \int_{\Omega_1} q_1^{\bullet} u_1 d\Omega,$$

$$l_2(u_2) = \int_{\Omega_2} (hq_0 - q^+) u_2 d\Omega,$$

$$l_3(u_3) = \int_{\Omega_2} \frac{1}{3} (q_1 - 3q^+) u_3 d\Omega,$$

$$b_1(T_1, u_1) = \int_{\Gamma_1^{(2)}} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \nu} u_1 d\Gamma,$$

$$b_2(T_1, u_2) = \int_{\Omega_2} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \nu} u_2 d\Omega,$$

$$b_3(T_1, u_3) = \int_{\Omega_2} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \nu} u_3 d\Omega \quad .$$

Врахуємо, що розв'язок варіаційної задачі шукаємо на множині функцій, які задовільняють умову

$$u_1 = u_2 - u_3 \quad на \quad \Gamma_1^{(2)} = \Omega_2.$$

Виключимо граничне значення u_1 у білінійній формі $b_1(T_1, u_1)$ в першому рівнянні (11) і додамо до нього два наступні. Отримаємо

$$m_1(T_1^{'}, u_1) + m_2(t^{'}, u_2) + m_3(t_1^{'}, u_3) + a_1(T_1^{'}, u_1) + a_2(t^{'}, u_2) +$$
$$+ a_3(t_1^{'}, u_3) = l_1(u_1) + l_2(u_2) + l_3(u_3).$$

Звідси, враховуючи, що u_1, u_2, u_3 — довільні функції V, отримаємо

$$\begin{aligned}
&m_1(T_1^{'}, u_1) + a_1(T_1, u_1) = l_1(u_1),\\
&m_2(t^{'}, u_2) + a_2(t, u_2) = l_2(u_2), \qquad (12)\\
&m_3(t_1^{'}, u_3) + a_3(t_1, u_3) = l_3(u_3).\\
&\forall (u_1, u_2, u_3) \in V.
\end{aligned}$$

3. Напівдискретизована задача.

Виберемо в V_1 та V_2 послідовності скінченновимірних просторів $\left\{V_1^h\right\}$ та $\left\{V_2^h\right\}$ [3] таких, що

$$\dim V_1^h = N_1(h_1) \to \infty, \qquad \mathrm{h}_1 \to 0,$$

$$\dim V_2^h = N_2(h_2) \to \infty, \qquad \mathrm{h}_2 \to 0,$$

$\bigcup\limits_{h>0} V_i^h$ — щільно вкладені в V_i, тобто для кожної функції

$$\forall v \in V_i \ , \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists h_i > 0, \quad V_i, \text{що} \left\| v - v_i^h \right\|_{v_i} \le \varepsilon .$$

$$T_1^h(x_1, x_2, x_3, \tau) = \sum_{j=1}^{N_1} T_1^j(\tau)\varphi_{1j}^h(x_1, x_2, x_3),$$

$$t^h(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = \sum_{j=1}^{N_2} t^j(\tau)\varphi_{2j}^h(\alpha_1, \alpha_2), \tag{13}$$

$$t_1^h(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = \sum_{j=1}^{N_2} t_1^h(\tau)\varphi_{2j}^h(\alpha_1, \alpha_2).$$

Запишемо напівдискретизовану задачу:

$$m_1\left(T_1^{h'}, u_1\right) + a_1\left(T_1^h, u_1\right) - b_1\left(T_1^h, u_1\right) = l_1(u_1),$$

$$m_2\left(t^{h'}, u_2\right) + a_2\left(t^h, u_2\right) - b_2\left(q^-\left(T_1^h\right), u_2\right) = l_2(u_2), \tag{14}$$

$$m_3\left({t_1}^{h'}, u_3\right) + a_3\left({t_1}^h, u_3\right) - b_3\left(q^-\left(T_1^h\right), u_3\right) = l_3(u_3).$$

4. Властивості білінійних форм задачі.

Очевидно, що за нульових граничних умов білінійні форми $m_1(.,.)$, $m_2(.,.)$, $m_3(.,.)$, $a_1(.,.)$, $a_2(.,.)$, $a_3(.,.)$ — симетричні.

Теорема. Дані білінійні форми є неперервними і V-еліптичними.

Доведення. Властивість неперервності доводиться за допомогою формули Коші-Буньяковського. V-еліптичність випливає з нерівностей Фрідріхса для тривимірного і двовимірного випадків.

5. Енергетичне рівняння.

Підставимо в (14) замість u_1, u_2, u_3 відповідно $T_1^h, \ t^h, \ t_1^h$ і додамо ці рівняння. Отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|T_1^h\right\|_{m_1}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|t^h\right\|_{m_2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|t_1^h\right\|_{m_3}^2 + \left\|T_1^h\right\|_{a_1}^2 +$$

$$+\left\|t^h\right\|_{a_2}^2 + \left\|t_1^h\right\|_{a_3}^2 = l_1\left(T_1^h\right) + l_2\left(t^h\right) + l_3\left(t_1^h\right).$$

Використавши нерівність

$$ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2, \qquad \forall\varepsilon > 0,\ a,b \in R \text{ та}$$

$$\|v\|_{a_i} \ge \beta_i \|v\|_{m_i} \qquad \forall\beta_i = const,$$

обчислимо, що

$$\left\|l_i(.)\right\|_{m_i} \le \left\|q_i\right\|_{m_i}\|\cdot\|_{m_i} \le \frac{1}{\beta_i}\left\|q_i\right\|_{m_i}\|\cdot\|_{a_i} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\|\cdot\|_{a_i}^2 + \frac{1}{2\beta_i}\left\|q_i\right\|_{m_i}^2, \quad i = 1,2,3,$$

$$\text{де} \qquad q_2 = hq_0, \qquad q_3 = \frac{1}{3}q_1.$$

Тоді отримаємо

$$\left\|T_1^h\right\|_{m_1}^2+\left\|t^h\right\|_{m_2}^2+\left\|t_1^h\right\|_{m_3}^2+\int_0^\theta\left\|T_1^h\right\|_{a_1}^2 d\tau+\int_0^\theta\left\|t^h\right\|_{a_2}^2 d\tau+$$

$$+\int_0^\theta\left\|t_1^h\right\|_{a_3}^2 d\tau\le\left\|T_1^{0h}\right\|_{m_1}^2+\left\|t^{0h}\right\|_{m_2}^2+\left\|t_1^{0h}\right\|_{m_3}^2+$$

$$+\frac{1}{\beta_1^{\ 2}}\int_0^\theta\left\|q_1\right\|_{m_1}d\tau+\frac{1}{\beta_2^{\ 2}}\int_0^\theta\left\|q_2\right\|_{m_2}d\tau+\frac{1}{\beta_3^{\ 2}}\int_0^\theta\left\|q_3\right\|_{m_3}d\tau.$$

Нехай H — простір, породжений нормою

$$\|u\|_m^2=\|u_1\|_{m_1}^2+\|u_2\|_{m_2}^2+\|u_3\|_{m_3}^2,$$

а G — простір, породжений нормою

$$\|u\|_a^2=\|u_1\|_{a_1}^2+\|u_2\|_{a_2}^2+\|u_3\|_{a_3}^2.$$

Таким чином, напівдискретні апроксимації Гальоркіна $\left(T_1^h,t^h,t_1^h\right)$ утворюють обмежену множину в просторі $L^\infty(H;0,\theta)\cap L^2(G;0,\theta)$. Це свідчить про стійкість напівдискретних апроксимацій. Крім цього, використовуючи останню нерівність, можна довести теорему.

Теорема. Нехай задані фіксовані значення параметрів дискретизації $h_i>0$ і $\left\{\varphi_{ij}\right\}_{j=1}^{N_i}$, $i=1,2$ — базис простору апроксимацій V_{hi}.

Тоді напівдискретизована варіаційна задача допускає єдиний розв'язок:

$$\left(T_1^h,t^h,t_1^h\right)\in L^\infty(H;0,\theta)\cap L^2(G;0,\theta).$$

1. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. К., 1983.. 2. Підстригач Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл. Доп. АН України 1963. 3. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.,1991.

Стаття надійшла до редколегії 15. 02. 96.