УДК 539.3

Н.П.Флейшман, Ч.Н.Койфман

Математичне моделювання гнучких з'єднувальних елементів

Вплив ребер жорсткості на деформацію пластинок та оболонок досліджували багато авторів, як наприклад [1,4-6,8,9]. У більшості праць прийнята умова неперервності переміщень та кутів поворотів тонкостінної конструкції при переході через лінію ребра, тому ці ребра (накладки) виконують роль підсилювального елемента. На практиці, однак, трапляються випадки, коли товщина з'єднувального елемента набагато менша за товщину тих частин конструкції, які він з'єднує. Наявність гнучкого з'єднувального елемента, який виконує роль своєрідного шарніра, зумовлює те, що під дією поперечного навантаження конструкція працює не тільки на згин, але й на розтяг. Нижче побудована математична модель такого злучення.

1. Розглянемо тонкостінну конструкцію, яка складається з двох частин "1" та "2". Ці частини з'єднані за допомогою тонкої гнучкої ізотропної пластинки малої ширини **2δ=const**, яка має форму криволінійної смуги. Уздовж серединної осі смуги спрямуємо вісь α_2, а лінії α_1 спрямуємо по нормалях до кривої $\alpha_1 = 0$. Деформації гнучкої смуги описуються системою диференціальних рівнянь геометрично нелінійної теорії гнучких пластинок [2,3]. Аналогічно до [3] запишемо їх у векторній формі :

$$\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_1} = \vec{G}\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \vec{Z}}{(\partial \alpha_2)^k}\right), \ k = \overline{0,4}, \qquad (1)$$

де

$$\vec{Z}^{\mathrm{T}} = \{Z_i\}^{\mathrm{T}} = \{\mathrm{N}_1, \hat{S}_1, \hat{Q}_1, M_1, u_1, u_2, w, \theta_1\}^{\mathrm{T}}, (i = \overline{1,8}). \qquad (2)$$

Тут $\mathbf{N_1}$ – нормальна сила; $\hat{S}_1$ та $\hat{Q}_1$ – узагальнені зсувне та перерізуюче зусилля; $\mathbf{M_1}$ – згинаючий момент; $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{w}$ – компоненти вектора переміщення; θ_1 – кут повороту нормалі.

Для гнучкої пластинки сталої товщини досить громіздкі вирази елементів нелінійної вектор-функції $\vec{G} = \{g_i\}$ наведені, зокрема, в

монографії [3]. При осесиметричній деформації ізотропної гнучкої круглої кільцевої смужки в полярних координатах **(r,φ)** маємо, зокрема, $(N_1 = N_r, \hat{Q}_1 = Q_r, M_1 = M_r, u_1 = u, \theta_1 = \theta, w = w, \hat{S}_1 = u_2 = 0)$:

$$\mathbf{g_1 = -(1-\nu)N_r/r + (1-\nu^2)uD_N/r^2,\ g_7 = -\theta}$$
$$\mathbf{g_3 = -q(r) - Q_r/r + (1-\nu^2)D_N u\theta/r^2 + N_r M_r/D_M}$$
$$\mathbf{g_4 = Q_r - (1-\nu)M_r/r + (1-\nu^2)D_M\theta/r^2} \qquad (3)$$
$$\mathbf{g_5 = N_r/D_N - \nu u/r - \theta^2/2,\ g_8 = M_r/D_M - \nu\theta/r}$$

де $\mathbf{D_N = Eh/(1-\nu^2)}$; $\mathbf{D_M = Eh^3/12(1-\nu^2)}$; **E,ν** – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу смуги; $\mathbf{q_r}$ – інтенсивність поперечного навантаження $(\rho-\delta \le r \le \rho+\delta)$; **h=const** – товщина.

На краях $\alpha_1 = \pm\delta$ гнучкої смуги задаються взагалі по вісім інтегральних умов її злучення із сусідніми частинами конструкції "1" та "2":

$$\vec{Z}(\delta, \alpha_2) = \vec{Z}_2^+, \vec{Z}(-\delta, \alpha_2) = \vec{Z}_1^-. \qquad (4)$$

Вектори $\vec{Z}_2^+$ та $\vec{Z}_1^-$ аналогічні вектору шуканих функцій $\vec{Z}$ (2) і визначають відповідно контактні зусилля, згинальні моменти, переміщення та кут повороту нормалі в точках ліній спряження смуги з частинами конструкції, які вона з'єднує.

2. Для виведення математичної моделі злучення тонкостінних елементів конструкції за допомогою вузької гнучкої смуги дискретизуємо її область вздовж осей α_1, на яких вибираємо по три точки $\alpha_1=0$ та $\alpha=\pm\delta$. У точках $\alpha_1=0$ задовольняємо рівняння (1), у точках $\alpha_1=\pm\delta$ — крайові умови (4). Похідну за α_1 в (1) при $\alpha_1=0$ заміняємо її симетричним різницевим аналогом з точністю $0(\delta^2)$ і отримуємо

$$\vec{Z}(\delta,\alpha_2) - \vec{Z}(-\delta,\alpha_2) = 2\vec{G}(0,\alpha_2 \frac{\partial^k \vec{Z}(0,\alpha_2)}{\partial\alpha_2^k}) \cdot \delta \text{ при } \alpha_1 = 0. \qquad (5)$$

Така апроксимація похідної визначає квадратичну залежність вектора $\vec{Z}$ від α_1 вздовж ширини смуги, тому права частина рівності (5) лінійно залежить від α_1. Отже, маємо

$$\vec{G}(0,\alpha_2, \frac{\partial^k \vec{Z}(0,\alpha_2)}{\partial\alpha_2^k}) = \frac{1}{2}(\vec{G}^+ + \vec{G}^-). \qquad (6)$$

Верхні індекси "+" та "-" означають, що вектор-функція $\vec{G}$ береться в точках $\alpha_1 = \delta$ та $\alpha_1 = -\delta$ відповідно.

Підставляючи (6) та (4) в (5), виводимо шукану математичну модель, тобто узагальнені умови злучення частин конструкції за допомогою гнучкої смуги сталої ширини:

$$\vec{Z}_2^+ - \vec{Z}_1^- = (\vec{G}^+ + \vec{G}^-) \cdot \delta. \tag{7}$$

Умови (7) визначають стрибки векторів $\vec{Z}$ при переході з однієї частини конструкції до іншої через з'єднувальний гнучкий елемент. Вони дають змогу усунути з розгляду область смуги і лише опосередковано брати до уваги вплив її фізико-механічних та геометричних параметрів, які входять у функції g_i $(i = \overline{1,8})$.

Очевидно, що при $\delta=0$ (смуги немає) з (7) отримуємо умови ідеального контакту. Неважко перевірити, що при $E=\infty$ (абсолютно жорстка смуга), як і слід було чекати, при довільному δ маємо $\theta^+ = \theta^- = 0, w^+ = w^-, u_1^+ = u_2^+ = 0, u_1^- = u_2^- = 0$. Якщо ж формально прийняти $D_M=0$, отримуємо умови для випадку злучення за допомогою ідеального шарніра $(M_1^+ = M_1^- = 0)$.

Якщо гнучка смуга з'єднує лінійно пружні частини конструкції, їх напружено-деформівний стан, очевидно, вже не залежить лінійно від навантаження.

<u>3. Приклад.</u> Осесиметричний згин круглої лінійно-пружної ізотропної пластинки з концентричною гнучкою смугою.

Пластинка радіуса R складається з двох частин: центральної частини "1" $(0 \le r \le \rho-\delta)$ та кільцевої частини "2" $(\rho+\delta \le r \le R)$. Гнучка смуга займає область $\rho-\delta \le r \le \rho+\delta$. Відповідні товщини та пружні константи позначаємо через h_i, E_i, ν_i $(i=1,2)$. У цьому випадку в полярних координатах (r,φ) маємо $\hat{Q}_\varphi = 0, u_\varphi = 0,$

$$\vec{Z}^T = \{Z_i^T\} = \{N_r, Q_r, M_r, u_r, w, \theta\}^T \ (i = \overline{1,6}) \tag{8}$$

Прогини та радіальні переміщення пластинок під дією поперечного навантаження q(r) шукаємо у вигляді [7]:

$$w_1 = w_{01} + C_1 + C_2 r^2, u_{1r} = 2r(1-\nu)B_1 / E_1,$$

$$w_2 = w_{02} + A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 r^2 \ln r, \tag{9}$$

$$u_{2r} = [2(1-\nu_2)B_2 - (1+\nu_2)B_3 / r^2]r / E_2,$$

де w_{01}, w_{02} -- відомі часткові розв'язки рівняння Софі-Жермен; $A_i, (i=\overline{1,4})$; B_1, B_2, B_3, C_1, C_2 — шукані коефіцієнти, для визначення яких служать шість узагальнених умов злучення (4) та три крайові умови на контурі r=R. Зокрема, якщо пластинка жорстко защемлена на границі, маемо

$$\frac{\partial w_2}{\partial r} = u_{2r} = w_2 = 0. \qquad (10)$$

Через функції (9) за відомими формулами [7,2] визначаємо всі елементи вектора $\vec{Z}$ (8). Підставляючи (9) в умови (7) та (10), отримуємо нелінійну систему дев'яти алгебраїчних рівнянь, з якої визначаються всі коефіцієнти розв"язку (9).

Зокрема, при $E_1=E_2=E$, $\nu_1=\nu_2=\nu=0{,}3$, $\rho=0{,}45R$, $\delta=0{,}1R$, $h=0{,}2h_1$, $h_1=h_2$, $q=16Eh_2^4\, q^*/3(1-\nu^2)R^4=const$, деякі результати обчислень наведені в таблиці для трьох випадків: при $\alpha=2(1-\nu^2)R^2/E_2\, h_2^2$ та $q^*=2$.

Ці результати узгоджуються з відомими даними розрахунків гнучких пластинок [2]. Вони свідчать про те, що наявність гнучкої з'єднувальної смуги істотно впливає на максимальні прогини та напруження в пластинці.

Таблиця

Випадок	$w_1(0)/h_2$	$\alpha\sigma_{r,max}(0)$	$\alpha\sigma_{r,max}(1)$
Смуга відсутня	2,00	5,72	16,00
Смуга розглядається за лінійною теорією	2,14	2,41	18,24
Смуга гнучка	1,65	3,77	27,81

1.А м и р о И. Я., З а р у ц к и й В. А. Методы расчета оболочек.Т.2.Теория ребристых оболочек.К.:Наук. думка,1980. 2. В о л ь м и р А. С. Гибкие пластинки и оболочки.М.: ГИТТЛ, 1956. 3. Г р и г о р е н к о Я. М., М у к о е д А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К.:Выща шк.,1983. 4. М а р т ы н о в и ч Т. Л., Ю р и н е ц В. Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. Львов: Выща шк.,1984. 5. С а в и н Г. Н., Ф л е й ш м а н Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К.: Наук. думка, 1964. 6. С а в и н Г. Н., Ф л е й ш м а н Н. П. Пластинки с криволинейными ребрами жесткости //Механика твердого тела: Тр. 2 Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Обзорные доклады, М., Наука,1966, Вып.3. С.319-342. 7. Т и м о ш е н к о С. П., В о й н о в с к и й - К р и- г е р С. Пластинки и оболочки. М.: ГИФМЛ, 1963. 8. Ф л е й ш м а н Н. П. Обобщенные краевые задачи для пластин с криволинейными ребрами // Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. Bucarest. 1971.Vol.16. №2. P.245-254. 9. S a v i n G. N., F l e i s h m a n N. P. Rib- Reinforced Plates and Shells. Jerusalem : Israel Program of Scientific Translations, 1967.

Стаття надійшла до редколегії 05.09.95

УДК 539.3

Н. П. Флейшман, Н. В. Іванова

Використання методу довільних кривих у дослідженні задач статики теорії пластин

Для розрахунку широкого класу тонких пластинок неканонічної форми пропонується використати чисельно-аналітичний метод довільних кривих, який є узагальненням методу прямих і, на відміну від чисельних методів, дає змогу точно описати форму границі і точніше задовольнити основні рівняння та граничні умові.

1. Розглядаємо задачу про узагальнено плоский напружений стан однорідної ізотропної пластинки у формі довільного криволінійного чотирикутника :

$$D=\{(x,y):g_1(x)\leq y\leq g_2(x), f_1(y)\leq x\leq f_2(y)\}.$$

Одночасно з декартовою системою (x,y) розглядаємо криволінійну неортогональну систему координат $(\xi\,\eta)$, яка пов'язана з декартовою формулами переходу [2]:

$$x=x(\xi\,\eta), y=y(\xi\,\eta), \tag{1}$$

за допомогою яких криволінійний чотирикутник D ін'єктивно відображається на одиничний квадрат площини $(\xi\,\eta)$.

Співвідношення Коші у криволінійній неортогональній системі координат мають вигляд

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial \xi}-\Gamma^1_{11}u_1-\Gamma^2_{11}u_2,$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial \eta}-\Gamma^1_{22}u_1-\Gamma^2_{22}u_2, \tag{2}$$
