ные краевые задачи для пластин с криволинейными ребрами // Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. Bucarest. 1971.Vol.16. №2. P.245-254. 9. S a v i n G. N., F l e i s h m a n N. P. Rib- Reinforced Plates and Shells. Jerusalem : Israel Program of Scientific Translations, 1967.

Стаття надійшла до редколегії 05.09.95

УДК 539.3

Н. П. Флейшман, Н. В. Іванова

Використання методу довільних кривих у дослідженні задач статики теорії пластин

Для розрахунку широкого класу тонких пластинок неканонічної форми пропонується використати чисельно-аналітичний метод довільних кривих, який є узагальненням методу прямих і, на відміну від чисельних методів, дає змогу точно описати форму границі і точніше задовольнити основні рівняння та граничні умові.

1. Розглядаємо задачу про узагальнено плоский напружений стан однорідної ізотропної пластинки у формі довільного криволінійного чотирикутника :

$$D=\{(x,y):g_1(x)\leq y\leq g_2(x), f_1(y)\leq x\leq f_2(y)\}.$$

Одночасно з декартовою системою (x,y) розглядаємо криволінійну неортогональну систему координат $(\xi\,\eta)$, яка пов'язана з декартовою формулами переходу [2]:

$$x=x(\xi\,\eta), y=y(\xi\,\eta), \tag{1}$$

за допомогою яких криволінійний чотирикутник D ін'єктивно відображається на одиничний квадрат площини $(\xi\,\eta)$.

Співвідношення Коші у криволінійній неортогональній системі координат мають вигляд

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-\Gamma_{11}^1u_1-\Gamma_{11}^2u_2,$$

$$\varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial\eta}-\Gamma_{22}^1u_1-\Gamma_{22}^2u_2, \tag{2}$$

© Флейшман Н. П., Іванова Н. В., 1996

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2 ,$$

де u_i — компоненти вектора переміщень у системі $(\xi\ \eta)$; ε_{ij} — компоненти коваріантного тензора деформацій; Γ_{jk}^{i} — символи Кристоффеля другого роду [1].

Компоненти σ^{ij} контраваріантного тензора напружень задовольняють рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \left(r\sigma^{sq} \right)}{\partial \xi} + r\Gamma_{mn}^{q}\sigma^{mn} + \rho r F^{q} = 0 , \quad (m,n,s,q=1,2), \tag{3}$$

де $r = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$; $\rho r F^q$ — компоненти об'ємного навантаження пластинки [1].

Співвідношення закону Гука в криволінійній неортогональній системі координат мають вигляд

$$\varepsilon_{sk} = \frac{1}{2\mu}\left[g_{sm}g_{kn} - \frac{\nu}{1+\nu} g_{sk}g_{mn} \right]\sigma^{mn}, \quad (s,k=1,2), \tag{4}$$

де g_{mn} — коваріантні компоненти метричного тензора в системі (ξ, η); μ — модуль зсуву матеріалу; ν — коефіцієнт Пуасона. За індексами m і n ведемо підсумовування.

Підставляючи (2) в (4) та додаючи два рівняння (3), отримуємо замкнену систему п'яти лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку стосовно п'яти функцій $u_1,\ u_2,\ \sigma^{11},\ \sigma^{12},\ \sigma^{22}$:

$$\widetilde{A}\frac{\partial \overline{z}^*}{\partial \xi} + \widetilde{B}\frac{\partial \overline{z}^*}{\partial \eta} + \widetilde{C}\overline{z}^* + \overline{q}^* = 0 , \tag{5}$$

де $\overline{z}^* = \left\{ u_1,\ u_2,\ \sigma^{12},\ \sigma^{12},\ \sigma^{12} \right\}^T$; $\widetilde{A},\ \widetilde{B},\ \widetilde{C}$ — квадратні матриці, елементи яких залежать від геометрії пластинки та її пружних сталих.

Виражаючи з другого рівняння системи (5) функцію σ^{22} та підставляючи отриманий вираз в інші рівняння, одержуємо систему чотирьох диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial \xi} = B\frac{\partial \overline{z}}{\partial \eta} + D\frac{\partial^2 \overline{z}}{\partial \eta^2} + C\overline{z} + \overline{q} , \tag{6}$$

де $\bar{z} = \left\{z_j\right\} = \left\{u_1,\ u_2,\ \sigma^{11},\ \sigma^{12}\right\}^{\mathrm{T}}$; B, C, D — нові відомі квадратні матриці розміру 4×4. У матриці D не дорівнює нулю лише компонента $d_{42} = -\dfrac{E}{g_{22}^2}$. У матриці B ненульовими компонентами є:

$$b_{12} = b_{43} = \frac{g_{12}^2 - \nu r^2}{g_{22}^2};\ b_{22} = b_{42} = 2\frac{g_{12}}{g_{22}};$$

$$b_{32} = -b_{41} = -\frac{\Gamma_{22}^1}{g_{22}^2};$$

$$b_{21} = b_{34} = -1; \qquad b_{44} = \frac{E}{g_{22}^2}\left(\frac{2}{g_{22}}\cdot\frac{\partial g_{22}}{\partial\eta} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial\eta}\right).$$

Відмінними від нуля компонентами матриці C є:

$$c_{11} = \Gamma_{11}^1 - \frac{g_{12}^2 - \nu r^2}{g_{22}^2}\Gamma_{22}^1;\ c_{12} = \Gamma_{11}^2 - \frac{g_{12}^2 - \nu r^2}{g_{22}^2}\Gamma_{22}^2;$$

$$c_{13} = g_{11}^2 - \frac{(g_{12}^2 - \nu r^2)^2}{g_{22}^2};$$

$$c_{14} = 2g_{11}g_{12} - 2\frac{g_{12}(g_{12}^2 - \nu r^2)}{g_{22}};$$

$$c_{21} = 2\Gamma_{12}^1 - 2\frac{g_{12}}{g_{22}}\Gamma_{22}^1;\ c_{22} = 2\Gamma_{12}^2 - 2\frac{g_{12}}{g_{22}}\Gamma_{22}^2;$$

$$c_{23} = 2g_{11}g_{12} - 2\frac{g_{12}(g_{12}^2 - \nu r^2)}{g_{22}};\ c_{24} = 2(1+\nu)r^2;$$

$$c_{31} = E\frac{(\Gamma_{22}^1)^2}{g_{22}^2}; \quad c_{32} = E\frac{\Gamma_{22}^1\Gamma_{22}^2}{g_{22}^2};$$

$$c_{33} = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\xi} + \Gamma_{11}^1\right) + \frac{\Gamma_{22}^1}{g_{22}^2}\left(g_{12}^2 - \nu r^2\right);$$

$$c_{34} = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\eta} + 2\Gamma_{11}^1\right) + 2\frac{g_{12}}{g_{22}}\Gamma_{22}^1;$$

$$c_{41}=E\frac{\Gamma_{22}^{1}}{g_{22}^{2}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\eta}+\Gamma_{22}^{2}-\frac{2}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\eta}\right)+\frac{E}{g_{22}^{2}}\frac{\partial\Gamma_{22}^{1}}{\partial\eta};$$

$$c_{42}=E\frac{\Gamma_{22}^{2}}{g_{22}^{2}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\eta}+\Gamma_{22}^{2}-\frac{2}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\eta}\right)+\frac{E}{g_{22}^{2}}\frac{\partial\Gamma_{22}^{2}}{\partial\eta};$$

$$c_{43}=\frac{1}{g_{22}^{2}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\eta}+\Gamma_{22}^{2}-\frac{2}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\eta}\right)-\Gamma_{11}^{2}+\frac{1}{g_{22}^{2}}\frac{\partial\left(g_{12}^{2}-\nu r^{2}\right)}{\partial\eta};$$

$$c_{44}=2\frac{g_{12}}{g_{22}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\eta}+\Gamma_{22}^{2}-\frac{2}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\eta}\right)-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\xi}+2\Gamma_{12}^{2}\right)+$$

$$+\frac{2}{g_{22}^{2}}\frac{\partial\left(g_{12}g_{22}\right)}{\partial\eta}.$$

До системи (6) додаються по дві граничні умови на кожній стороні квадрата, які отримуються з відповідних граничних умов на границі області D при заміні змінних (1). Таким чином, отримана крайова задача для системи рівнянь (6), яка розв'язується методом прямих із застосуванням різницевих аналогів другого порядку точності. Остаточно виведена система 4N звичайних лінійних диференціальних рівнянь (ЗДР) стосовно 4N+8 невідомих функцій (7) (оскільки до рівнянь входять функції на законтурних лініях W_{01}, W_{02}, W_{03}, W_{04}, $W_{N+1,1}$, $W_{N+1,2}$, $W_{N+1,3}$ $W_{N+1,4}$.):

$$\frac{\partial\,\overline{W}}{\partial\xi}=A(\xi,\eta_k)\overline{W}+\bar{f}\;,\;(k=1,...N). \qquad (7)$$

з граничними умовами при $\xi=0$ та $\xi=1$:

$$\varphi\,\overline{W}(0)=\overline{\alpha},\qquad \psi\,\overline{W}(1)=\overline{\beta}. \qquad (8)$$

Тут $\overline{W}=\left\{W_{11},W_{12},W_{13},W_{14},\ldots W_{NN}\right\}$, W_{ij} — елемент вектора на "i"-й прямій; φ, ψ — відомі прямокутні матриці (2N×4N): $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ — відомі вектори (2N×1). При цьому крайові умови на лініях $\eta=0$ та $\eta=1$ використовуються для виключення невідомих функцій на законтурних прямих.

Методом суперпозиції двоточкова крайова задача зводиться до задачі Коші, яка розв'язується чисельно методом Рунге-Кутта.

Остаточно визначені компоненти (переміщень та напружень) вектора $\overline{W}$, а також напруження σ^{22} в точках кривих $\eta=const$ пластинки.

2. Якщо пластинка має форму криволінійного $2M$-кутника, її область елементарно розбивається на $(M-1)$ криволінійних чотирикутників, кожен з яких відображається на відповідний одиничний квадрат площини (ξ, η). Таким чином отримуємо ланцюжок таких квадратів, на спільних границях яких записуються умови спряження, тобто умови неперервності фізичних компонент u_1, u_2 та контактних напружень. Остаточно, тобто після заміни континуальної крайової задачі її скінченно-різницевим аналогом, замість двоточкової крайової задачі для системи ЗДР отримуємо багатоточкову крайову задачу, яка також зводиться до задачі Коші методом суперпозиції.

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с. 2. Флейшман Н.П., Койфман Ч.Н. Метод довільних кривих в теорії теплопровідності пластинок змінної товщини//Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. Вип. 43. 1995. С. 112-114.

Стаття надійшла до редколегії 06.02.96.

УДК 519.6:517.925

Г.А.Шинкаренко

Однокрокові рекурентні схеми інтегрування варіаційних задач для гіперболічних рівнянь*

Різноманітні рекурентні схеми інтегрування в часі варіаційних задач, які визначають узагальнені розв'язки початково-крайових задач для рівнянь гіперболічного типу, наведені у працях [1,2,5-9]. Мета цієї праці — побудувати однокрокову схему підвищеної точності інтегрування згаданих задач з використанням кубічних апроксимацій Ерміта та певних умов ортогональності нев'язки на кожному кроці інтегрування. На відміну від праці [3], тут здійснюється специфічний

© Шинкаренко Г.А., 1996

* Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант № APU 051113.