Остаточно визначені компоненти (переміщень та напружень) вектора $\overline{W}$, а також напруження σ^{22} в точках кривих $\eta=const$ пластинки.

2. Якщо пластинка має форму криволінійного $2M$-кутника, її область елементарно розбивається на $(M-1)$ криволінійних чотирикутників, кожен з яких відображається на відповідний одиничний квадрат площини (ξ, η). Таким чином отримуємо ланцюжок таких квадратів, на спільних границях яких записуються умови спряження, тобто умови неперервності фізичних компонент u_1, u_2 та контактних напружень. Остаточно, тобто після заміни континуальної крайової задачі її скінченно-різницевим аналогом, замість двоточкової крайової задачі для системи ЗДР отримуємо багатоточкову крайову задачу, яка також зводиться до задачі Коші методом суперпозиції.

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с. 2. Флейшман Н.П., Койфман Ч.Н. Метод довільних кривих в теорії теплопровідності пластинок змінної товщини//Вісн. ЛДУ. Сер. мех.-мат. Вип. 43. 1995. С. 112-114.

Стаття надійшла до редколегії 06.02.96.

УДК 519.6:517.925

Г.А.Шинкаренко

Однокрокові рекурентні схеми інтегрування варіаційних задач для гіперболічних рівнянь*

Різноманітні рекурентні схеми інтегрування в часі варіаційних задач, які визначають узагальнені розв'язки початково-крайових задач для рівнянь гіперболічного типу, наведені у працях [1,2,5-9]. Мета цієї праці — побудувати однокрокову схему підвищеної точності інтегрування згаданих задач з використанням кубічних апроксимацій Ерміта та певних умов ортогональності нев'язки на кожному кроці інтегрування. На відміну від праці [3], тут здійснюється специфічний

* Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант № APU 051113.

вибір вузлових значень полінома Ерміта: значення розв'язку і його першої похідної у стартовий момент кожного проміжку інтегрування доповнюється значенням другої похідної. Цей вибір дає змогу ефективно реалізувати процес покрокового інтегрування, який за кількістю операцій не поступається перед схемою Ньюмарка.

Дослідження стійкості запропонованих схем виконане шляхом побудови відповідних апріорних енергетичних оцінок.

1. Постановка задачі. Позначимо через H і V гільбертові простори з нормами $\|*\|_H$ та $\|*\|_V$ відповідно; при цьому припускатимемо, що V щільно і неперервно вкладений у H.

Розглянемо еволюційну варіаційну задачу:

$$\begin{array}{ll} \textit{задано } u_0 \in V,\ v_0 \in H,\ f \in L^2(0,T;H); & \\ \textit{знайти } u \in L^2(0,T;V) \textit{ такий, що} & \qquad (1.1) \\ m(u''(t),v) + a(u'(t),v) + c(u(t),v) = m(f(t),v) & \forall t \in (0,T], \\ m(u'(0)-v_0,v) = 0, \quad c(u(0)-u_0,v) = 0 & \forall v \in V. \end{array}$$

Тут $t \in (0,T],\ 0 < T < \infty;\ u' := \dfrac{\partial u}{\partial t};\ u'' := \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},$

білінійні форми

$$m(.,.): H \times H \to R, \quad a(.,.): V \times V \to R,\ c(.,.): V \times V \to R \qquad (1.2)$$

симетричні, неперервні та $H-$, $V-$ *і* $V-$*еліптичні відповідно.*

Подібні до (1.1) еволюційні варіаційні задачі виникають, зокрема, в проблемах еластодинаміки матеріалів з короткочасною пам'яттю.

2. Кусково-кубічна апроксимація Ерміта. Проміжок часу $[0,T]$ покриємо рівномірною (хоча це і не обов'язково) сіткою із вузлів $t_j = j\Delta t, j = 0,1,\dots N$, таким чином, що $N\Delta t = T$.

На кожному із одержаних проміжків $[t_j, t_{j+1}]$ розв'язок $u(t)$ варіаційної задачі (1.1) будемо апроксимувати кубічним поліномом $u_{\Delta t}(t)$ вигляду

$$\begin{aligned} u_{\Delta t}(t) &:= \left\{1-\xi^3(t)\right\}u^j + \left\{1-\xi^2(t)\right\}\xi(t)v^j + \\ &+ \frac{1}{2}\left\{1-\xi(t)\right\}\xi^2(t)w^j + \xi^3(t)u^{j+1}, \end{aligned} \qquad (2.1)$$

$$\xi(t) := \frac{t-t_j}{\Delta t} \quad \textit{на } [t_j, t_{j+1}]$$

з поки що невідомими елементами u^j, v^j, w^j та u^{j+1} із простору V. Зауважимо, що змістовну інтерпретацію останніх надає такий факт:

підстановка вузлових значень $u(t_j), u'(t_j), u''(t_j)$ та $u(t_{j+1})$ замість u^j, v^j, w^j та u^{j+1} відповідно перетворює (2.1) в інтерполяційний поліном Ерміта для функції $u(t)$ на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$.

Вважатимемо, що

$$v^{j+1} := u'_{\Delta t}(t_{j+1}), \quad w^{j+1} := u''_{\Delta t}(t_{j+1}) \tag{2.2}$$

і введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} & q^{j+\alpha} := (1-\alpha)q^j + \alpha q^{j+1} \\ & \dot{q}^{j+1/2} := \frac{1}{\Delta t}(q^{j+1} - q^j) \qquad \alpha \in [0,1] \end{aligned} \tag{2.3}$$

які після нескладних перетворень дають змогу надати поліному (2.1) вигляду

$$u_{\Delta t}(t) = u_{\Delta t}(t_j + \xi(t)\Delta t) = \left\{ u^j + \xi(t)\Delta t v^j + \frac{1}{2}\left[\xi(t)\Delta t\right]^2 w^j \right\} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left[\xi(t)\Delta t\right]^3 \dot{w}^{j+1} \; на \; [t_j, t_{j+1}]. \tag{2.4}$$

3. Орієнтація. Повернувшись до задачі (1.1), зазначимо, що підставивши апроксимацію (2.4) у її початкові умови, одержимо рівняння

$$\begin{aligned} & c(u^0 - u_0, v) = 0 \qquad \forall v \in V, \\ & m(v^0 - v_0, v) = 0 \qquad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{3.1}$$

які однозначно визначають початкові значення вектора зміщень u^0 та швидкостей v^0. Тепер при $j = 0$ можна визначити значення прискорень w^0 із рівняння стану:

$$m(w^j, v) = m(f(t_j), v) - a(v^j, v) - c(u^j, v) \qquad \forall v \in V. \tag{3.2}$$

Підставляння таким чином знайденої (без будь-яких похибок апроксимації!) трійки $\psi^j = (u^j, v^j, w^j)$ у праву частину полінома (2.4) при $j = 0$ показує, що перший рядок у виразі (2.4) подає собою молодші члени розвинення у ряд Тейлора значення точного розв'язку $u(t_j + \Delta t\xi(t))$ задачі (1.1) в околі точки $t = t_j$. Таким чином, основне завдання проектування чисельної схеми інтегрування задачі (1.1) з використанням апроксимацій (2.1) полягає в тому, щоб *визначити невідоме значення* $\dot{w}^{j+1/2} \in V$ *у такий спосіб, щоб останній член правої частини полінома (2.4) збігався із черговим членом розвинення точного розв'язку* $u(t)$ *задачі (1.1)* (3.3)

в ряд Тейлора в околі точки $t = t_j + \Delta t \xi(t)$.

Наприкінці зауважимо, що з огляду на тільки що наведену інтерпретацію невідомих коефіцієнтів кусково-визначеної апроксимації Ерміта (2.4), можна сподіватись на відшукання наближеного розв'язку варіаційної задачі (1.1) з похибкою порядку $O(\Delta t^4)$ (за наявності відповідного запасу гладкості у точного розв'язку цієї задачі).

4. Проекційне рівняння. Як наступний крок до побудови чисельної схеми розв'язування задачі (1.1) замінимо задану функцію $f(t)$ неперервним кусково-лінійним інтерполяційним поліномом:

$$\left.\begin{aligned} &f_{\Delta t}(t) := \{1-\xi(t)\} f^j + \xi(t) f^{j+1} \\ &f^m := f(t_m), \qquad m = j, j+1 \end{aligned}\right. \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}]. \tag{4.1}$$

Тепер візьмемо довільну функцію $\eta = \eta(t)$, таку що

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \eta(t) dt = 1,$$

і, використовуючи апроксимації (2.4) та (4.1.), складемо проекційне рівняння:

$$\begin{gathered} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \{m(u''_{\Delta t}, v) + a(u'_{\Delta t}, v) + c(u_{\Delta t}, v) - m(f_{\Delta t}, v)\} \eta dt = 0, \\ j = 0,1,\ldots, \qquad \forall v \in V. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Якщо ввести позначення

$$\gamma := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi \eta dt, \qquad \beta := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi^2 \eta dt, \qquad \theta := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi^3 \eta dt, \tag{4.3}$$

то рівнянню (4.2) можна надати вигляду

$$\begin{aligned} &m(w^{j+\gamma}, v) + a(v^j + \Delta t \gamma w^{j+\gamma} + \frac{1}{2}\Delta t^2 (\beta - 2\gamma^2) \dot{w}^{j+1/2}, v) + \\ &+ c(u^j + \Delta t \gamma v^j + \frac{1}{2}\Delta t^2 \beta w^{j+\gamma} + \frac{1}{6}\Delta t^3 (\theta - 3\beta\gamma) \dot{w}^{j+1/2}, v) = \\ &= m(f^{j+\gamma}, v) \qquad\qquad \forall\, \mathrm{v} \in \mathrm{V}, \mathrm{j} = 0,1,\ldots, \end{aligned} \tag{4.4}$$

або з урахуванням (3.2)

$$m(w^{j+\gamma},v)+\Delta t\left\{a(\gamma w^{j+\gamma}+\frac{1}{2}\Delta t(\beta-2\gamma^2)\dot{w}^{j+1/2},v)+\right.$$

$$\left.+c(\frac{1}{2}\Delta t\beta w^{j+\gamma}+\frac{1}{6}\Delta t^2(\theta-3\beta\gamma)\dot{w}^{j+1/2},v)\right\}= \tag{4.5}$$

$$=m(w^j,v)+\Delta t\gamma\left\{m(\dot{f}^{j+1/2},v)-c(v^j,v)\right\} \qquad \forall\, \mathrm{v}\in \mathrm{V}.$$

Цікаво, що проекційне рівняння (4.5) містить лише вузлові значення похідних наближеного розв'язку $u_{\Delta t}(t)$ задачі (1.1).

Значення параметрів γ,β та θ рівняння (4.5) можна вибирати з тих чи інших міркувань. Розглянемо тут лише два зручні варіанти.

4.1. Однопараметричне проекційне рівняння.

Вибір $\qquad \beta:=2\gamma^2, \qquad \theta:=3\beta\gamma=6\gamma^3 \qquad$ (4.6)

анулює деякі доданки в рівнянні (4.5) і спрощує його вигляд:

$$m(w^{j+\gamma},v)+\Delta t\gamma\left\{a(w^{j+\gamma},v)+\Delta t\gamma c(w^{j+\gamma},v)\right\}=$$

$$=m(w^j,v)+\Delta t\gamma\left\{m(\dot{f}^{j+1/2},v)-c(v^j,v)\right\} \qquad \forall\, \mathrm{v}\in \mathrm{V}. \tag{4.7}$$

З огляду на теорему Лакса-Мільграма-Вишика варіаційне рівняння (4.7) однозначно розв'язується стосовно $w^{j+\gamma}\in V$ для будь-яких

$$\gamma>0 \tag{4.8}$$

(при $\gamma=0$ рівняння (4.7) перетворюється на тотожність).

Нарешті, після знаходження $w^{j+\gamma}$ із рівняння

$$w^{j+\gamma}=w^j+\Delta t\,\dot{w}^{j+1/2} \tag{4.9}$$

визначаємо $\dot{w}^{j+1/2}$, будуючи у такий спосіб розв'язок задачі (3.3).

4.2. Двопараметричне проекційне рівняння. Нехай $\gamma>0$. Тоді з огляду на (4.9) проекційне рівняння (4.5) можна записати у вигляді

$$m(\dot{w}^{j+1/2},v)+\Delta t\beta_* a(\dot{w}^{j+1/2},v)+\frac{1}{2}\Delta t^2\theta_* c(\dot{w}^{j+1/2},v)=$$

$$=m(\dot{f}^{j+1/2},v)-a(w^j,v)-c(v^j+\beta_*\Delta t w^j,v) \qquad \forall v\in V,\ j=0,1,\ldots, \tag{4.10}$$

де

$$\beta_*:=(2\gamma)^{-1}\beta, \qquad \theta_*:=(3\gamma)^{-1}\theta. \tag{4.11}$$

Варіаційне рівняння (4.10) однозначно розв'язується стосовно $\dot{w}^{j+1/2}$ для будь-яких

$$\beta_* \geq 0, \qquad \gamma_* \geq 0. \tag{4.12}$$

5. Однокрокові рекурентні схеми. Підводячи підсумки параграфів 3, 4, сформулюємо рекурентну схему інтегрування в часі еволюційної варіаційної задачі (1.1):

задано трійку $\psi^0 := \left\{u^0, v^0, w^0\right\} \in V^3$

і значення параметрів Δt *та* $\beta, \theta \geq 0$;

знайти трійку $\psi^{j+1} := \left\{u^{j+1}, v^{j+1}, w^{j+1}\right\} \in V^3$ *таку, що*

$$\begin{aligned}
&m(\dot{w}^{j+1/2}, v) + \Delta t\left\{\beta a(\dot{w}^{j+1/2}, v) + \frac{1}{2}\Delta t\theta c(\dot{w}^{j+1/2}, v)\right\} = \\
&= m(\dot{f}^{j+1/2}, v) - a(w^j, v) - c(v^j + \beta\Delta t w^j, v) \qquad \forall v \in V, \\
&u^{j+1} := u^j + \Delta t v^j + \frac{1}{2}\Delta t^2 w^j + \frac{1}{6}\Delta t^3 \dot{w}^{j+1/2}, \\
&v^{j+1} := v^j + \Delta t w^j + \frac{1}{2}\Delta t^2 \dot{w}^{j+1/2}, \qquad j = 0, 1, \ldots, \\
&m(w^{j+1}, v) = m(f^{j+1}, v) - a(v^{j+1}, v) - c(u^{j+1}, v), \qquad \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Запропонована однокрокова рекурентна схема (5 1) точно враховує початкові умови варіаційної задачі (1.1), задовольняє варіаційне рівняння цієї задачі у стартові моменти часу кожного проміжку інтегрування $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots N-1$. Додамо до цього, що схема (5.1) дає змогу виконувати інтегрування задачі (1.1), змінюючи в разі потреби величину кроку Δt у процесі рекурентних обчислень.

Із часткових випадків схеми (5.1) заслуговує на увагу побудований на основі однопараметричного проекційного рівняння (4.7):

задано трійку $\psi^0 := \left\{u^0, v^0, w^0\right\} \in V^3$

та значення параметрів Δt *та* $\gamma \geq 0$;

знайти трійку $\psi^{j+1} := \left\{u^{j+1}, v^{j+1}, w^{j+1}\right\} \in V^3$ *таку, що*

$$m(w^{j+\gamma},v)+\Delta t\gamma\left\{a(w^{j+\gamma},v)+\Delta t c(w^{j+\gamma},v)\right\}=$$

$$=m(w^{j},v)+\Delta t\gamma\left\{m(\dot{f}^{j+1/2},v)-c(v^{j},v)\right\} \qquad \forall v\in V,$$

$$u^{j+1}:=u^{j}+\Delta t v^{j}+\frac{1}{2}\Delta t^{2}w^{j}+\frac{1}{6}\Delta t^{3}\dot{w}^{j+1/2}, \tag{5.2}$$

$$v^{j+1}:=v^{j}+\Delta t w^{j}+\frac{1}{2}\Delta t^{2}\dot{w}^{j+1/2}, \qquad j=0,1,\ldots,$$

$$m(w^{j+1},v)=m(f^{j+1},v)-a(v^{j+1},v)-c(u^{j+1},v) \qquad \forall v\in V.$$

6. Структура алгебричних рівнянь рекурентних схем. Наближені розв'язки варіаційних рівнянь, які входять до рекурентних схем (5.1) та (5.2), можна знайти, наприклад, методом Гальоркіна. Розглянемо структуру алгебричних рівнянь, які виникають внаслідок такої дискретизації. Скажімо, якщо зафіксувати деякий базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^{N}$ скінченновимірного підпростору $V_h, \dim V_h = N$, із простору V, то рівняння Гальоркіна, які отримуються з перших варіаційних рівнянь схем (5.1) та (5.2), матимуть вигляд

$$\left\{\mathbf{M}+\Delta t\beta\mathbf{A}+\frac{1}{2}\Delta t^{2}\theta\mathbf{C}\right\}\dot{\mathbf{w}}^{j+1/2}=\mathbf{M}\dot{\mathbf{f}}^{j+1/2}-\mathbf{C}\mathbf{v}^{j}-\left\{\mathbf{A}+\Delta t\beta\mathbf{C}\right\}\mathbf{w}^{j}, \qquad \mathrm{j}=0,1,\ldots \tag{6.1}$$

та

$$\left\{\mathbf{M}+\Delta t\gamma\mathbf{A}+(\Delta t\gamma)^{2}\mathbf{C}\right\}\mathbf{w}^{j+\gamma}=\mathbf{M}\left\{\mathbf{w}^{j}+\Delta t\gamma\dot{\mathbf{f}}^{j+1/2}\right\}-\Delta t\gamma\mathbf{C}\mathbf{v}^{j}, \qquad \mathrm{j}=0,1,\ldots \tag{6.2}$$

відповідно.

Тут символами $\mathbf{v}^{m}$, $\mathbf{w}^{m}$ та $\mathbf{f}^{m}$ позначені вектори коефіцієнтів розвинень $u'_{\Delta t}(t_m)$, $u''_{\Delta t}(t_m)$ та $f_{\Delta t}(t_m)$ за базисом простору V_h; матриці $\mathbf{M}, \mathbf{A}$ і $\mathbf{C}$ обчислюються згідно з правилами:

$$\mathbf{M}:=\left\{m(\varphi_i,\varphi_j)\right\}_{i,j=1}^{N}, \quad \mathbf{A}:=\left\{a(\varphi_i,\varphi_j)\right\}_{i,j=1}^{N}, \quad \mathbf{C}:=\left\{c(\varphi_i,\varphi_j)\right\}_{i,j=1}^{N}. \tag{6.3}$$

Зазначимо, що внаслідок властивостей білінійних форм (1.2)

матриці $\mathbf{M}, \mathbf{A}$ *та* $\mathbf{C}$ *із (6.3) симетричні і додатно визначені.* (6.4)

Тому, якщо виконані умови (4.12) та (4.8), матриці систем алгебричних рівнянь (6.1) та (6.2) симетричні і додатно визначені; завдяки цьому їхні розв'язки успішно знаходяться як прямими методами (скажімо, методом Холецького), так і ітераційними.

Порівняльний аналіз трудомісткості обчислень процесу розв'язування систем (6.1) та (6.2) свідчить, що за всіх інших однакових умов система (6.2) потребує не лише меншої кількості арифметичних операцій, але й меншого об'єму ресурсів пам'яті комп'ютера. Особливого виграшу можна досягнути, якщо матриця $\mathbf{M}$ має (а це досить таки типова ситуація в практиці методу скінченних елементів) діагональну структуру.

Водночас у разі потреби інтегрування варіаційної задачі зі змінною довжиною кроку Δt структура матриці системи (6.1) на відміну від системи (6.2) дає змогу уникнути трудомісткого переформування матриці при переході від величини кроку Δt до кроку Δt_1. Дійсно, якщо обчислення з кроком Δt виконувались зі значеннями параметрів β та γ, то при переході на крок Δt_1 матриця системи (6.2) залишається незмінною, якщо нові значення параметрів β_1 та γ_1 вибрані у такий спосіб, що

$$\Delta t\beta = \Delta t_1\beta_1 \qquad \Delta t^2\gamma = \Delta t_1^2\gamma_1. \tag{6.5}$$

Міркування стосовно різних обчислювальних аспектів, які пов'язані з процесом рекурентного розв'язування рівнянь типу (6.1) чи (6.2), містить праця [5].

<u>**7. Стійкість рекурентних схем.**</u> З огляду на властивості білінійних форм (1.2) введемо такі норми:

$$\begin{aligned} &|u| := m^{1/2}(u,u), \qquad \|u\| := c^{1/2}(u,u), \\ &|||u||| := a^{1/2}(u,u) \qquad\qquad \forall u \in V. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Як наслідок апроксимації Ерміта (2.4) зазначимо, що

$$\dot{w}^{j+1/2} := w^{j+1/2}. \tag{7.2}$$

Використовуючи цей факт, перепишемо проекційне рівняння схеми (5.1) у вигляді

$$\begin{aligned} &m(\dot{w}^{j+1/2}, v) + a(w^{j+1/2} + \Delta t(\beta - \frac{1}{2})\dot{w}^{j+1/2}, v) + \\ &+ c(v^{j+1/2} + \Delta t(\beta - \frac{1}{2})w^{j+1/2} + \frac{1}{2}\Delta t^2(\theta - \beta)\dot{w}^{j+1/2}, v) = \\ &= m(\dot{f}^{j+1/2}, v) \qquad \forall v \in V,\ j = 0,1,\dots\ . \end{aligned} \tag{7.3}$$

Приймаючи в цьому рівнянні $v := \dot{v}^{j+1/2} := w^{j+1/2}$, після нескладних перетворень одержуємо енергетичне рівняння:

$$\left|w^{m+1}\right|^2+\Delta t\left\{\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\left\|w^{m+1}\right\|^2+\frac{1}{2}\Delta t(\theta-\beta)\left\|w^{m+1}\right\|^2\right\}+$$

$$+\left\|v^{m+1}\right\|^2+2\Delta t\left\{\sum_{j=0}^{m}\left\|w^{j+1/2}\right\|^2+\Delta t\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\sum_{j=0}^{m}\left\|w^{j+1/2}\right\|^2\right\}=$$

$$=\left|w^0\right|^2+\left\|v^0\right\|^2+\Delta t\left\{\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\left\|w^0\right\|^2+\frac{1}{2}\Delta t(\theta-\beta)\left\|w^0\right\|^2\right\}+ \tag{7.4}$$

$$+2\Delta t\sum_{j=0}^{m}m(\dot f^{\,j+1/2},w^{j+1/2}),\qquad m=0,1,\ldots\ .$$

Застосовуючи до останнього рівняння нерівність

$$m(\dot f^{\,j+1/2},w^{j+1/2})\le\frac{1}{2}\left\{C\left|\dot f^{\,j+1/2}\right|^2+\left\|w^{j+1/2}\right\|^2\right\} \tag{7.5}$$

зі сталою $C>0$, значення якої не залежить від $w^{j+1/2}$ та $\dot f^{\,j+1/2}$, приходимо до такої апріорної оцінки:

$$\left|w^{m+1}\right|^2+\Delta t\left\{\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\left\|w^{m+1}\right\|^2+\frac{1}{2}\Delta t(\theta-\beta)\left\|w^{m+1}\right\|^2\right\}+$$

$$+\left\|v^{m+1}\right\|^2+\Delta t\sum_{j=0}^{m}\left\{\left\|w^{j+1/2}\right\|^2+\frac{1}{2}\Delta t\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\left\|w^{j+1/2}\right\|^2\right\}\le$$

$$\le\left|w^0\right|^2+\left\|v^0\right\|^2+\Delta t\left\{\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\left\|w^0\right\|^2+\frac{1}{2}\Delta t(\theta-\beta)\left\|w^0\right\|^2\right\}+ \tag{7.6}$$

$$+\Delta tC\sum_{j=0}^{m}m\left\|\dot f^{\,j+1/2}\right\|^2,\qquad m=0,1,\ldots\ .$$

Одержані результати підсумовує така теорема.

Теорема про стійкість рекурентних схем.

Нехай розв'язок $u(t)$ задачі (1.1) такий, що $u'(0),u''(0)\in V$ і дискретизована в часі варіаційна задача (1.1) розв'язується за допомогою однокрокової рекурентної схеми (5.1) або (5.2). Тоді кожна з цих схем дає змогу єдиним чином визначити трійку $\psi^m:=\{u^m,v^m,w^m\}$, $m=1,2,\ldots$, і при цьому справедливі такі твердження:

(i) Рекурентна схема (5.1) безумовно (стосовно кроку інтеграваня Δt) стійка в сенсі норми

$$\left\{ \left\| v^m \right\|^2 + \left| w^m \right|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \left\| w^{j+1/2} \right\|^2 \right\}^{1/2},$$

якщо її параметри β і θ задовольняють нерівності

$$\theta \geq \beta \geq \frac{1}{2}; \tag{7.7}$$

(*ii*) *Однопараметрична схема (5.2) безумовно стійка для будь-яких*

$$\gamma \geq \frac{1}{2}. \tag{7.8}$$

8. Висновки й узагальнення. У даній праці побудовані однокрокові рекурентні схеми (5.1) та (5.2) інтегрування еволюційної задачі (1.1). Ці схеми точно враховують початкові умови задачі, задовольняють її варіаційне рівняння у стартові моменти часу кожного кроку інтегрування і дають змогу змінювати його величину в процесі обчислень. Визначені умови стійкості запропонованих схем у відповідних енергетичних нормах. Ужита тут методологія є узагальненням підходу до побудови та дослідження рекурентних схем еволюційних варіаційних задач, який розвинений автором у працях [4-6].

1. Бате К.-Ю., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982.448 с. 2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир,1986. 318с. 3. Москальков М.Н. Схемы метода конечных элементов повышенной точности для решения нестационарных уравнений второго порядка // Диференц. уравнения. 1980. Т.16.N 7. С. 1283-1292. 4. Шинкаренко Г.А. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пироэлектричества. II. Дискретизация и разрешимость нестационарных задач // Диференц. уравнения. 1994. Т.30. N 2. С.317-326. 5. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач.. К.: НМК ВО,1991.88 с. 6. Шинкаренко Г.А. Про одну модифікацію схеми Ньюмарка // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. С.46-52. 7. Geradin M., Rixen D. Mechanical vibrations: Theory and application to Structural Dynamics. Chicheser, N.-Y. etc: Wiley, 1994. 412 p. 8. Hughes T.J.R. The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis. Englwood Cliffs, N.-J.: Prentice Hall, 1987. 803 p. 9. Park K.S. Transient analysis methods in computational dynamics // Finite elements: Theory and applications / Ed. D.L.Dwoeyr D.L. et. al. N.Y. etc.: Springer, 1988. P.240-267.

Стаття надійшла до редколегії 08. 02. 96.