

493p. 13. Hughes T.J.R., Wing K.L., Brooks A. Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation//J. Comput. Phys. 1979. Vol.30. N1. P. 1-60, 14. Pironneau O. The Finite Element Method for Hyperbolic Systems//Finite Element: Theory and Application/Ed. Dwoyer D.L. et. al. N.Y. etc.: Springer, 1988. P. 67-93.

Стаття надійшла до редколегії 11.01.96.

УДК 539.214

P. I. Kісіль, I. C. Муха

Двовимірні схеми методу скінченних елементів для дослідження пружнопластичного деформування тонкостінних гнучких тіл

Нехай тверде тіло займає об'єм V в R^3 та обмежене поверхнею S . Припустимо, що тіло віднесене до деякої системи криволінійних координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ і

$$V = \{\bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in v\}.$$

Розглядатимемо процес деформування твердого, трансверсально-ізотропного, однорідного тіла під дією силових навантажень. Припустимо, що всі зовнішні та внутрішні сили є консервативними. Крім цього, вважатимемо, що деформації тіла є помірно малими, тобто такими, при яких приріст віртуальних робіт внутрішніх сил може бути поданий у вигляді

$$\delta W_B = \int_V \Sigma : \delta \varepsilon(U) dV,$$

де Σ — симетричний тензор напружень Піоли-Кірхгофа;

$\varepsilon(U) = E(U) + \frac{1}{2} \Omega(U, U)$ — симетричний тензор деформацій Гріна;

$E(U) = \frac{1}{2}(\nabla U^T + \nabla U)$ — тензор лінійних (малих) деформацій;

∇U — тензор дисторсії: $[\nabla U]_{ij} = U_{j,i}$; $\Omega(U, U)$ — деякий симетричний білінійний оператор.

Останнє припущення справедливе у випадку, коли в тілі присутні малі переміщення точок при середніх кутах повороту їхніх околів. Такі гіпотези адекватно відображають процеси помірної деформування тонкостінних гнучких тіл.

Будемо припускати, що процес деформування тіла відбувається досить повільно, отже, цей процес можна розглядати як ряд послідовних рівноважних станів. Це означає, що модель деформування тіла може бути записана у квазістатичній постановці.

Будемо вважати, що в тілі в момент часу τ_m присутні початкові переміщення U_m та напруження Σ_m , і вони перебувають у рівновазі з масовими силами Q_m і поверхневими напруженнями $\tilde{\Sigma}_{v\,m}$ на частині поверхні S_Σ . На частині поверхні S_u переміщення точок задані і дорівнюють $\tilde{U}$. Припустимо, що за час $\Delta\tau_m = \tau_{m+1} - \tau_m$ на тіло подіяли додаткові масові сили ΔQ_m і поверхневі напруження $\Delta\tilde{\Sigma}_{v\,m}$, а точки поверхні S_u здійснили додаткові переміщення $\Delta\tilde{U}_m$. Під дією цих факторів тіло змінило свою деформовану конфігурацію. Якщо вважати, що стан тіла в момент часу τ_m є зафіксований і не отримує варіації, то тоді

$$\int_V (\Sigma_m + \Delta\Sigma_m) : \delta\Delta\varepsilon_m \, dV = \int_V (Q_m + \Delta Q_m) \cdot \delta\Delta U_m \, dV + \int_{S_\Sigma} (\tilde{\Sigma}_{v\,m} + \Delta\tilde{\Sigma}_{v\,m}) \cdot \delta\Delta U_m \, dS, \quad (1)$$

де $\Delta\Sigma_m$, $\Delta\varepsilon_m$ і ΔU_m — прирости, отримані відповідними величинами за час $\Delta\tau_m$. Розв'язок варіаційного рівняння (1) будемо шукати ітераційним методом. Припустимо, що нам відомий деякий наближений розв'язок $\Delta U_m^{(i)}$, $\Delta\varepsilon_m^{(i)}$, $\Delta\Sigma_m^{(i)}$. Подамо точний розв'язок у вигляді

$$\Delta U_m = \Delta U_m^{(i)} + dU_m^{(i)}, \quad \Delta U_m^{(i)}|_{S_u} = \Delta\tilde{U}_m, dU_m^{(i)}|_{S_u} = 0, \\ \Delta\Sigma_m = \Delta\Sigma_m^{(i)} + d\Sigma_m^{(i)}. \quad (2)$$

Припустимо, що величини $dU_m^{(i)}$ і $d\Sigma_m^{(i)}$ є величинами вищого порядку мализни порівняно з відповідними Δ — величинами.

Будемо вважати, що існує зв'язок між безмежно малими приростами напружень і безмежно малими приростами деформацій у вигляді

$$d\Sigma_m^{(i)} = R_{\Sigma\varepsilon}(U_m, \Delta U_m^{(i)}, \Sigma_m, \Delta\Sigma_m^{(i)}) : d\varepsilon_m^{(i)} + R_{\Sigma 0}(U_m, \Delta U_m^{(i)}, \Sigma_m, \Delta\Sigma_m^{(i)}), \quad (3)$$

де $R_{\Sigma\varepsilon}$ — деякий симетричний додатно-визначений тензор четвертого рангу; $R_{\Sigma 0}$ — тензор другого рангу. Співвідношення (3) справедливе у випадку пружнопластичного деформування твердого тіла [2].

Підставляючи (2) і (3) в (1) і нехтуючи членами порядку $(dU_m^{(i)})^3$ і $(dU_m^{(i)})^4$, отримуємо варіаційне рівняння для визначення $dU_m^{(i)}$:

$$\delta L_m(U_m, \Delta U_m^{(i)}, \Sigma_m, \Delta\Sigma_m^{(i)}, dU_m^{(i)}) = 0, \quad dU_m^{(i)}|_{S_u} = 0, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} L_m(U, \Delta U, \Sigma, \Delta\Sigma, dU) = & \frac{1}{2} \int_V (\Sigma + \Delta\Sigma + R_{\Sigma 0}) : \Omega(dU, dU) dV + \\ & + \int_V (\Sigma + \Delta\Sigma + R_{\Sigma 0}) : [E(dU) + \Omega(U + \Delta U, dU)] dV - \\ & - \int_V (Q_m + \Delta Q_m) \cdot dU dV - \int_{S_\Sigma} (\tilde{\Sigma}_{v m} + \Delta\tilde{\Sigma}_{v m}) \cdot dU dS \end{aligned}$$

Варіаційне рівняння (4) є задачею про мінімум квадратичного функціоналу і може бути розв'язане за допомогою МСЕ. Проте побудова чисельних схем такого типу наптовхується на значні труднощі, пов'язані з необхідністю багаторазового розв'язування задачі (4), котра сама по собі є досить складною і ресурсомісткою. Тому у даній праці запропонований комбінований підхід до розв'язання цієї проблеми. Він ґрунтується на тому, що аналіз полів напружень і пластичних деформацій, які виникають в тілі під час квазістатичного деформування, здійснюється в рамках просторових співвідношень деформування. Згідно з цими ж співвідношеннями будуються тензори $R_{\Sigma\varepsilon}$ і $R_{\Sigma 0}$, які входять у співвідношення (3). Однак для розв'язування варіаційної задачі (4) здійснюється редукція до двовимірного простору з використанням гіпотез теорії оболонок, а також гіпотези щодо розподілу напружень по товщині тіла. За розв'язками, отриманими у рамках двовимірної задачі, відновлюється просторове поле деформацій, а за ним і поле напружень, виходячи зі співвідношень просторової теорії.

Для отримання редукованої задачі припустимо, що характерний розмір тіла вздовж напрямку α_3 рівний h і значно менший, ніж два інших, тобто

$$V = \{ \bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, -h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2 \}.$$

Приймемо такі гіпотези.

По-перше, припустимо, що в тілі наявний узагальнений плоский напружений стан, тобто $\Sigma_{33} = 0$.

По-друге, приймемо гіпотези Тимошенка для деформування нормалі, згідно з якими

$$U_s(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_s(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_s(\alpha_1, \alpha_2), \quad s = 1, 2,$$

$$U_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_3(\alpha_1, \alpha_2).$$

Обтиском оболонки будемо нехтувати, що не протирічить основним припущенням теорії середнього згину оболонок.

Виділяючи в інтегралах по об'єму V інтеграл по α_3 у межах від $-h/2$ до $h/2$ та усереднюючи статичні величини, отримуємо редуковану варіаційну постановку лінеаризованої задачі:

$$\delta l_m(u_m, \Delta u_m^{(i)}, \sigma_m, \Delta \sigma_m^{(i)}, du_m^{(i)}) = 0, \quad du_m^{(i)}|_{S_u} = 0. \quad (5)$$

У праці [1] наведений розгорнутий вираз l_m для випадку геометрично нелінійного пружного деформування. У випадку непружного деформування функціонал l_m будується аналогічно. Однак при цьому використовується гіпотеза про те, що розподіл напружень по товщині тіла є кусково-лінійним.

Для розв'язування редукованої задачі (5) побудована чисельна схема методу скінченних елементів на основі ізопараметричних апроксимацій другого порядку. Зазначимо, що у випадку геометрично нелінійної пружної задачі така схема відрізняється від схеми МСЕ для розв'язання лінійної пружної задачі тільки тим, що для розв'язування першої необхідно багатократно розв'язувати другу. Проте у випадку, коли тіло деформується непружно, схема ускладнюється тим, що у кожному вузлі скінченноелементної сітки слід обчислювати значення напружень в деякій множині точок по товщині. Дослідження показали, що для отримання адекватної картини деформування цих точок має бути більше, ніж 10, а у випадку декількох пластичних зон — ще більше. Обчислені значення напружень потрібно зберігати у всіх точках і накопичувати при переході до наступного кроку квазістатичного навантаження.

Описана методика використовувалась для чисельного розв'язання задачі пружнопластичного деформування трійникового з'єднання трубопроводів (рис. 1). Задачу розв'язували при таких значеннях геометричних та фізичних величин: $L_1 = 1.7\text{м}$, $L_2 = 1.7\text{м}$, товщина труб $h_1 = h_2 = 0.05\text{м}$, $R_1 = 0.5\text{м}$, $R_2 = 1.0\text{м}$; модуль Юнга $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, межа текучості $\sigma_T = 218 \text{ МПа}$. Конструкцію навантажували внутрішнім тиском інтенсивності $p_n = 6 \text{ МПа}$. На рис. 2 зображені залишкові пластичні деформації по товщині тіла в найбільш напружених точках А та В. Лінія 1 відповідає кільцевим деформаціям у точці А, а лінія 2 — осьовим. Лінії 3 та 4 відображають аналогічні залишкові деформації у точці В.

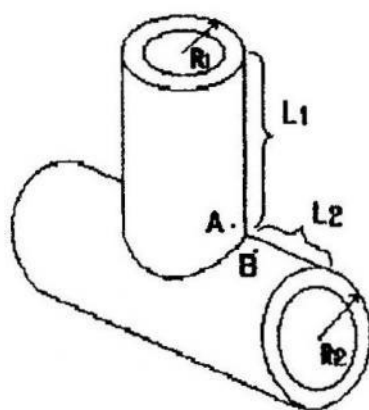


Рис.1

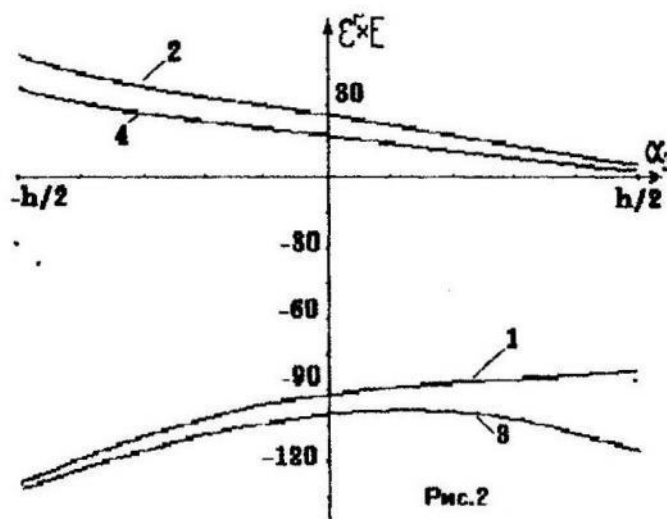


Рис.2

Дослідження описаної методики на розглянутій задачі показало її переваги, які полягають у тому, що достатньо адекватну картину напружено-деформованого стану можна отримати при значній економії обчислювальних ресурсів.

1. Муха І.С., Савула Я.Г. Нелінійна модель пружного деформування тонкостінних гнучких тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 41, С.82-91.
2. Simo J.C., Taylor R.L. Consistent tangent operators for rateindependent elastoplasticity // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1985. Vol.48. P.101-118.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.96