

І.І.Дияк, В.М.Макар

Дослідження просторової динамічної задачі теорії пружності для неоднорідних анізотропних тіл*

У даній праці на основі моделі осесиметричної просторової лінійної теорії пружності з урахуванням анізотропії пружного матеріалу пропонується чисельний підхід до розв'язання динамічної задачі, який ґрунтується на дискретизації вихідної задачі за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів (МСЕ) по просторових координатах і використанні методу розкладу за власними формами для інтегрування в часі [1].

У циліндричній системі координат розглядається осесиметричне кусково-однорідне анізотропне тіло, що займає обмежену область $\Omega \subset R^3$ з неперервною за Ліпшицем границею. Тоді, як відомо [4], визначення динамічної реакції такого тіла полягає у знаходженні вектора переміщень $u = (u_r, u_z, u_\varphi)^T$, що задовольняє рівняння динамічної рівноваги, кінематичні та статичні граничні умови на границі області $\Gamma = \partial\Omega$ і початкові умови, що накладені на переміщення та швидкості. При цьому виконуються геометричні лінійні співвідношення Коші та фізичні співвідношення узагальненого закону Гука, які в матричній формі можна відповідно записати у вигляді

$$\varepsilon = Bu \quad (1)$$

$$\sigma = D\varepsilon \quad (2)$$

де $\sigma = \{\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{z\varphi}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}\}^T$, $\varepsilon = \{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{z\varphi}, \varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{rz}\}^T$;

B - матриця диференціальних операторів, вигляд якої наведений у праці [2]; матриця пружних констант D у випадках ортотропного, транзотропного та ізотропного матеріалу має таку структуру:

© Дияк І.І., Макар В.М., 1996

* Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISEEP), гранти № APU051042, № PSU061060

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Причому для ізотропного матеріалу

$d_{11} = d_{22} = d_{33} = \lambda + 2\mu$, $d_{12} = d_{13} = d_{23} = \lambda$, $d_{44} = d_{55} = d_{66} = \mu$, де λ, μ — коефіцієнти Ламе;

для ортогotropного

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad d_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \quad d_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ d_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad d_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad d_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta}, \\ d_{44} &= 2G_{23}\Delta, \quad d_{55} = 2G_{13}\Delta, \quad d_{66} = 2G_{12}\Delta, \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 E_3}, \end{aligned}$$

для транстропного

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{E' - E(\nu')^2}{E(E')^2 \Delta}, \quad d_{22} = \frac{E' - E(\nu')^2}{E(E')^2 \Delta}, \quad d_{33} = \frac{1 - \nu^2}{E^2 \Delta}, \\ d_{12} &= \frac{\nu E' + E(\nu')^2}{E(E')^2 \Delta}, \quad d_{13} = \frac{\nu'(1 + \nu)}{EE' \Delta}, \quad d_{23} = \frac{\nu'(1 + \nu)}{EE' \Delta}, \\ d_{44} &= 2G'\Delta, \quad d_{55} = 2G'\Delta, \quad d_{66} = 2G\Delta, \\ \Delta &= \frac{E'(1 - \nu^2) - 2E(\nu')^2(1 + \nu)}{(EE')^2}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \end{aligned}$$

де $E_1, E_2, E_3, E, E', \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}, \nu, \nu', G_{12}, G_{13}, G_{23}, G'$ — так звані технічні константи [3].

З метою застосування МСЕ для чисельного розв'язання поставленої задачі слід перейти до варіаційної постановки. Для цього вихідні рівняння руху домножуємо на довільну вектор-функцію V , що належить простору

$$Q_A = \left\{ V = (v_r, v_z, v_\varphi)^T : v_i = g_i \text{ на } \Gamma_u, v_i \in W_2^1(\Omega), i = r, z, \varphi \right\}$$

де Γ_u — частина границі області Ω на якій задані кінематичні граничні умови. Інтегруючи за частинами з використанням формули Гріна і беручи до уваги статичні граничні умови, отримуємо систему варіаційних рівнянь:

$$\begin{aligned} a_{11}(u_r, v) + a_{12}(u_z, v) + a_{13}(u_\varphi, v) + m(\ddot{u}_r, v) &= b_r(v), \\ a_{21}(u_r, v) + a_{22}(u_z, v) + a_{23}(u_\varphi, v) + m(\ddot{u}_z, v) &= b_z(v), \\ a_{31}(u_r, v) + a_{32}(u_z, v) + a_{33}(u_\varphi, v) + m(\ddot{u}_\varphi, v) &= b_\varphi(v), \end{aligned} \quad (4)$$

де скалярні добутки мають вигляд

$$\begin{aligned} a_{11}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{11} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + d_{33} \frac{w}{r} \frac{v}{r} + d_{13} \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + d_{13} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{v}{r} \right) d\Omega + \\ &\quad + \iiint_{\Omega} \left(d_{44} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + d_{55} \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) d\Omega \\ a_{12}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{44} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + d_{23} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{v}{r} + d_{12} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} \right) d\Omega, \\ a_{13}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{13} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} + d_{55} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right] + d_{33} \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} v \right) d\Omega, \\ a_{22}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{44} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + d_{22} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + d_{66} \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) d\Omega, \\ a_{23}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{66} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + d_{23} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega, \\ a_{33}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{55} \left[\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] + d_{66} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega + \\ &\quad + \iiint_{\Omega} d_{33} \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\Omega, \end{aligned}$$

$$a_{21}(w, v) = a_{12}(v, w), a_{31}(w, v) = a_{13}(v, w), a_{32}(w, v) = a_{23}(v, w).$$

Чисельну процедуру розв'язування варіаційних рівнянь будемо з використанням напіваналітичного МСЕ з розкладом за тригонометричними функціями по кутовій координаті. Нехай Q_{hm} скінченновимірний підпростір з Q_A і функції

$N_1(r, z), \psi_1(\varphi), \dots, N_n(r, z), \psi_n(\varphi)$ утворюють базу Q_{hm} . Тоді шукані переміщення мають вигляд

$$u_h(r, z, \varphi, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_i(r, z) \psi_j(\varphi) u^{ij}(t) \quad (5)$$

Тут за $\psi_j(\varphi)$, $j = 1, \dots, m$ обирається система тригонометричних функцій, зокрема, для апроксимації $u_r, u_z - \{1, \cos j\varphi, \sin j\varphi\}$, для $u_\varphi - \{1, \sin j\varphi, \cos j\varphi\}$; $N_i(r, z)$ — лінійні або квадратичні фінітні функції МСЕ на криволінійних чотирикутниках сирендипового типу. Підставляючи (5) у (4) і послідовно приймаючи $v = N_i \psi_j$, з урахуванням ортогональності системи тригонометричних функцій на проміжку $[0, 2\pi]$ отримуємо для j -ї гармоніки систему звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку, яка в матричній формі виглядає так:

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{U}}_j(t) + \mathbf{K}_j \mathbf{U}_j(t) = \mathbf{R}_j(t) \quad (6)$$

з початковими умовами

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \dot{\mathbf{U}}_0, \quad (7)$$

де коефіцієнти матриць мас і жорсткості мають вигляд:

$$\mathbf{M}_{st} = \begin{pmatrix} m(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & 0 & 0 \\ 0 & m(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & 0 \\ 0 & 0 & m(N_i \psi_j, N_k \psi_l) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{st} = \begin{pmatrix} a_{11}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{12}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{13}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) \\ a_{21}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{22}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{23}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) \\ a_{31}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{32}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{33}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_s = (b_r(N_k \psi_l), b_z(N_k \psi_l), b_\varphi(N_k \psi_l))^T \quad s = i \times k, \quad t = j \times l.$$

Інтегрування системи (6) по часовій координаті здійснюється за допомогою методу розкладу за власними формами [1]. Згідно з цим методом система (6) за допомогою перетворення $\mathbf{U}_j(t) = \Phi_j \mathbf{X}_j(t)$

зводиться до розв'язання $\tilde{k}$ окремих рівнянь:

$$\ddot{\mathbf{x}}_j^i(t) + (\omega_j^i)^2 \mathbf{x}_j^i(t) = (\varphi_j^i)^T \mathbf{R}_j(t), \quad i = 1, \tilde{k} \quad (8)$$

з початковими умовами:

$$\mathbf{x}_j^i|_{t=0} = (\varphi_j^i)^T \mathbf{M}_j \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}_j^i|_{t=0} = (\varphi_j^i)^T \mathbf{M}_j \dot{\mathbf{U}}_0 \quad (9)$$

Тут $\Phi_j = \{\varphi_j^1, \varphi_j^2, \dots, \varphi_j^{\tilde{k}}\}$ — матриця, стовпцями якої є власні вектори, отримані із задачі на власні значення:

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{U}}_j(t) + \mathbf{K}_j \mathbf{U}_j(t) = \mathbf{0} \quad (10)$$

де ω_j^i - кругова частота для j -ї гармоніки; $\tilde{k}$ — кількість перших власних пар задачі (10). Задачу на власні значення (10) розв'язуємо за допомогою методу ітерацій у підпросторі [1]. У загальному випадку розв'язок кожного рівняння (8) отримуємо за допомогою інтеграла Дюгамеля:

$$\mathbf{x}_j^i(t) = \frac{1}{\omega_j^i} \int (\varphi_j^i)^T \mathbf{R}_j(\tau) \sin \omega_j^i(t - \tau) d\tau + \alpha_j^i \sin \omega_j^i t + \beta_j^i \cos \omega_j^i t \quad (11)$$

де коефіцієнти α_j^i, β_j^i визначаються з початкових умов (9). Переміщення вузлових точок отримуємо суперпозицією реакції системи за всіма власними формами. Загальну реакцію системи визначаємо шляхом підсумовування переміщень за всіма гармоніками. Далі напруження у вузлових точках знаходимо на основі формул (1) та (2).

Наведений алгоритм реалізований у вигляді комплексу Сі- та Фортран-програм. Він функціонує у межах операційної системи MS-DOS та операційної оболонки Windows на IBM-сумісних ПК і характеризується високим ступенем автоматизації підготовки вхідної та вихідної інформації. Ефективність та надійність створеного програмного забезпечення підтверджується тестовими розрахунками. Зокрема, розглядалася задача про визначення динамічної реакції круглої жорстко защемленої пластинки на дію змінного у часі нормального навантаження. Геометричні та фізичні характеристики пластинки: товщина $h = 0.1$ м, радіус $R = 1.0$ м, модуль Юнга $E = 1.0$ Н/м², густина $\rho = 1.0$ к/м³ коефіцієнт Пуасона $\nu = 0.3$. В таблиці приведені значення перших шість частот осесиметричних вільних коливань пластинки, отриманих за допомогою вищеописаного алгоритму (третій стовпець) і за теорією оболонок типу Тимошенка [5] (другий стовпець). На рис. 1 зображено графіки перших чотирьох форм власних коливань пластинки.

Таблиця

ω_i i	аналіт. розв. Кірхгофа	чисел. розв. по Тимошенку	чисел. розв. теор. пружн.
1	0.049202	0.047893	0.0481786
2	0.191545	0.175869	0.1773226
3	0.429147	0.365104	0.3691509
4	0.761852	0.595655	0.6040335
5	-	0.639281	0.6405618
6	1.18963	0.853137	0.8676872

Для вказаної пластинки розв'язувалися задачі динаміки під дією нормальних осесиметричних навантажень виду:

$$P_1(\tau) = 1, \quad 0 \leq \tau \leq \infty,$$

$$P_2(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ 0, & \tau_0 \leq \tau \leq \infty \end{cases}$$

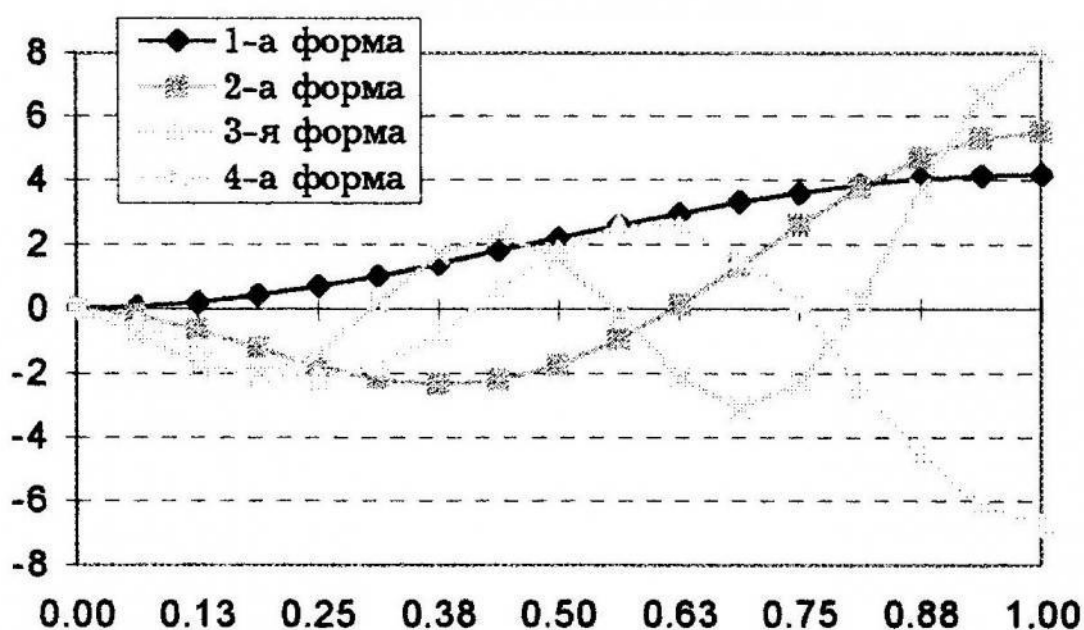


Рис. 1. Графіки форм власних коливань

Розв'язки обох динамічних задач порівнювалися з розв'язками тих же задач, отриманим по методиці описаній у праці [5], в якій використовувалися рівняння математичної моделі теорії оболонок типу Тимошенка. На рис. 2 зображено графіки залежності прогинів u_z в

центрі серединної поверхні пластинки від часу. Крива 1 відповідає розв'язку динамічної задачі при навантаженні $P_1(\tau)$, а крива 2 — при навантаженні $P_2(\tau)$ і $\tau_0 = 4$ с.

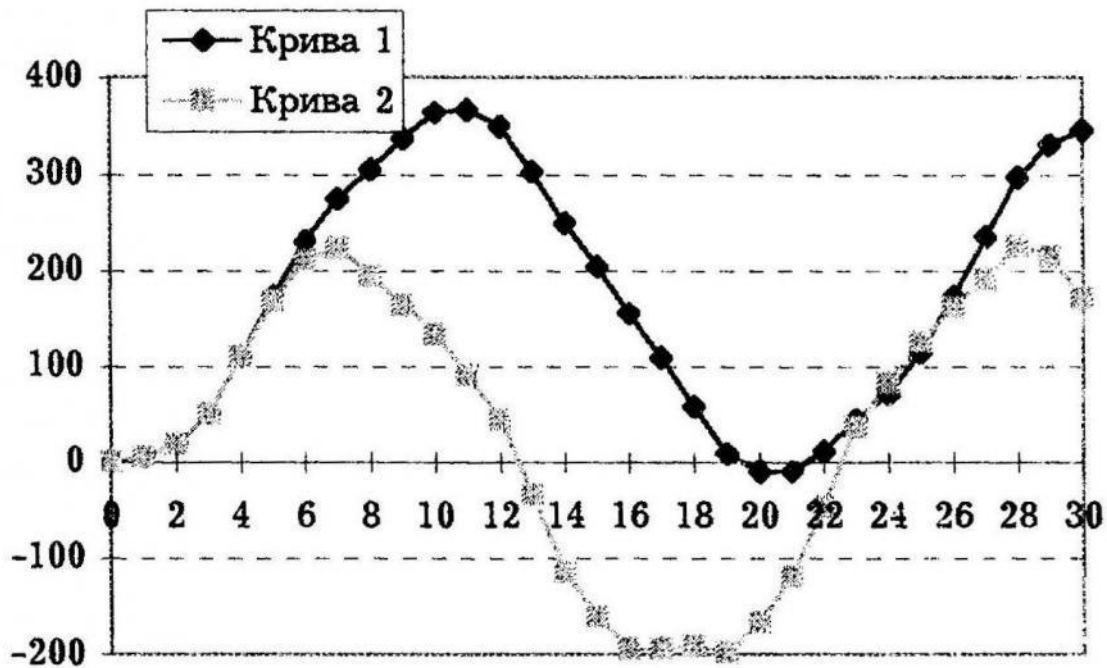


Рис. 2. Графіки залежності прогинів від часу



Рис. 3. Графіки залежності напружень від часу

Рис. 3 містить аналогічні результати для напружень σ_{π} . Розв'язки отримані на сітці з 32 скінченних елементів (16 елементів по радіусу і 2 по висоті) і при $\tilde{k} = 4$. Відповідні результати, отримані у праці [5], на рис. 2 і 3 не зображені, оскільки в масштабах даних рисунків графіки важко розрізнити.

1. Бате К., Вилсон Е., Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.:Стройиздат, 1982. 447с. 2. Григоренко А. Я., Дзяк И.И. Решение пространственных задач о свободных колебаниях осесимметричных тел.// Прикл. механика. Т.30. Вып. 5. С.19-24. 3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.:Наука, 1977. 416 с. 4. Новацкий В. Теория упругости. М.:Мир, 1975. 872 с. 5. Копитко М. Ф.Решение задач динамики оболочек сложной геометрии методом конечных элементов: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Львів, 1987.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.96

УДК 517.958:519.6

Н.П.Головач, І.І.Дзяк

Прямий метод граничних елементів чисельного розв'язування задачі термопружності*

1. Постановка задачі. Розглядається незв'язна двовимірна задача квазістатичної термопружності для ізотропного пружного середовища, яке займає область Ω із ліпшицевою границею Γ .

Термопружний стан тіла описується вектором переміщень $u = (u_1, u_2)$, що задовольняє рівняння рівноваги Ляме [1,5]:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \beta T_{,i} \quad \text{в } \Omega \times (0, t], \quad (1)$$

та температурою $T(x_1, x_2, t)$, що визначається з (2) [1,5]:

$$\Delta T = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial \tau} + W \quad \text{в } \Omega \times (0, t]. \quad (2)$$

При цьому виконуються співвідношення Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - \beta T \delta_{ij} \quad \text{в } \Omega \times (0, t] \quad (3)$$

© Головач Н.П., Дзяк І.І., 1996

* Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISEEP), гранти № PSU061028 та № APU051042.