Рис. 3 містить аналогічні результати для напружень σ_{rr}. Розв'язки отримані на сітці з 32 скінченних елементів (16 елементів по радіусу і 2 по висоті) і при $\tilde{k} = 4$. Відповідні результати, отримані у праці [5], на рис. 2 і 3 не зображені, оскільки в масштабах даних рисунків графіки важко розрізнити.

1. Бате К., Вилсон Е., Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.:Стройиздат,1982. 447с. 2. Григоренко А. Я., Дыяк И.И. Решение пространственных задач о свободных колебаниях осесимметричных тел.// Прикл. механика. Т.30. Вип. 5. С.19-24. 3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.:Наука, 1977. 416 с. 4. Новацкий В. Теория упругости. М.:Мир, 1975. 872 с. 5. Копитко М. Ф.Решение задач динамики оболочек сложной геометрии методом конечных элементов: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук. Львів, 1987.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.96

УДК 517.958:519.6

Н.П.Головач, І.І.Дияк

Прямий метод граничних елементів чисельного розв'язування задачі термопружності*

1. Постановка задачі. Розглядається незв'язна двовимірна задача квазістатичної термопружності для ізотропного пружного середовища, яке займає область Ω із ліпшицевою границею Γ.

Термопружний стан тіла описується вектором переміщень $u = (u_1, u_2)$, що задовольняє рівняння рівноваги Ляме [1,5]:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \beta T_{,i} \qquad \text{в} \quad \Omega \times (0, t], \tag{1}$$

та температурою $T(x_1, x_2, t)$, що визначається з (2) [1,5]:

$$\Delta T = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial \tau} + W \qquad \text{в} \quad \Omega \times (0, t]. \tag{2}$$

При цьому виконуються співвідношення Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta T \delta_{ij} \qquad \text{в} \quad \Omega \times (0, t] \tag{3}$$

---

* Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISEEP), гранти № PSU061028 та № APU051042.

та геометричні співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad \text{в} \quad \Omega \times (0,t] \,, \tag{4}$$

де λ, μ — сталі Ляме; X_1, X_2 - компоненти вектора масових сил; $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ — компоненти відповідно тензора деформацій та напружень; δ_{ij} — символ Кронекера; $\beta = \alpha_t(3\lambda + 2\mu)$; α_t — лінійний коефіцієнт температурного розширення; k — коефіцієнт температуропровідності; W — густина внутрішніх джерел тепла.

Тут і надалі мається на увазі підсумовування від 1 до 2 за індексами, що повторюються, а також $(\ldots)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\ldots)$, Δ — оператор Лапласа.

Нехай на межі $\Gamma = \partial\Omega$ задаються граничні умови загального вигляду

$$\begin{cases} u_i \nu_i = \overline{u}^1_\nu & u_i \tau_i = \overline{u}^1_\tau \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ \sigma_{ij} \nu_i \nu_j = \overline{p}^1_\nu & \sigma_{ij} \nu_i \tau_j = \overline{p}^1_\tau \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \quad \text{де} \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \ \text{ і} \\ {}_i \nu_i = \overline{u}^2_\nu & \sigma_{ij} \nu_i \tau_j = \overline{p}^2_\tau \quad \text{на} \quad \Gamma_3, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \varnothing; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} T = \overline{\overline{T}} \quad \text{на} \quad \Gamma'_1, & \text{де} \quad \Gamma = \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2 \,, \\ T_{,i} \nu_i = \overline{q} \quad \text{на} \quad \Gamma'_2, & \Gamma_1 \cap \Gamma'_2 = \varnothing. \end{cases}$$

Тут ν_i, τ_i — напрямні косинуси зовнішньої нормалі $\overline{\nu}$ і дотичної $\overline{\tau}$ на границі Γ .

Вважається заданою також початкова умова вигляду

$$T(x_1, x_2, 0) = T_0 \qquad \text{в} \quad \Omega \,. \tag{6}$$

<u>**2. Основні інтегральні співвідношення.**</u> Для границі області записуються граничні інтегральні рівняння прямого методу граничних елементів (ПМГЕ), які формулюються на основі відомої теореми взаємності Бетті [1,3]:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_\Gamma F^*_{ij}(x,\xi) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_\Gamma G^*_{ij}(x,\xi) p_j(x) d\Gamma(x) + \\ + \int_\Omega X_j(z) G^*_{ij}(z,\xi) d\Omega(z) \ + \ \beta \int_\Omega G^*_{jk,k}(z,\xi) T(z,\tau) d\Omega(z) \quad \text{для } \tau = t \end{aligned} \tag{7}$$

та

$$c(\xi)T(\xi,t) + k\int_0^t\int_\Gamma T(x,\tau)q^*(\xi,x,t,\tau)d\Gamma(x)d\tau =$$
$$= k\int_0^t\int_\Gamma q(x,\tau)T^*(\xi,x,t,\tau)d\Gamma(x)d\tau + \int_\Omega (T_0 + W)T^*(\xi,x,t,0)d\Omega(x) \quad (8)$$

Тут $G^*_{ij}(x,\xi), T^*(\xi,x,t,\tau)$ — фундаментальні розв'язки відповідно системи диференціальних рівнянь (1) та рівняння (2); $q^*(\xi,x,t,\tau) = \dfrac{\partial T^*(\xi,x,t,\tau)}{\partial n}$; $F^*_{ij} = \sigma^*_{ijk}n_k$, де σ^*_{ijk} — напруження, зумовленні переміщенням G^*_{ij}; коефіцієнти $c(\xi)$, $c_{ij}(\xi)$ залежать тільки від локальної геометрії межі $\partial\Omega$. Відомо, що у випадку гладкої границі $c_{ij}(\xi) = 0.5\delta_{ij}$. Якщо ж точка ξ є вершиною кута, то використовуємо підхід подвоєння вузлів [1].

3. Схема побудови чисельного розв'язку. Щоб розв'язати (7) і (8) і знайти невідомі граничні величини, інтегральні рівняння апроксимуємо системами лінійних алгебричних рівнянь. Для цього дискретизуємо і границю області $\partial\Omega$, і проміжок часу $(0,t]$, а також області Ω для обчислення останніх доданків у формулах (7), (8).

У межах кожного граничного елемента передбачається, що всі відомі та невідомі граничні значення функцій u_i, p_i, T, q змінюються певним наперед заданим чином. Ми використовуємо поліноміальну апроксимацію (лінійну, квадратичну за просторовими змінними $x = (x_1, x_2)$ та кусково-постійну за часом). При цьому порядок апроксимації просторових змінних та порядок апроксимації шуканих функцій можуть не збігатися.

Обираючи вузли граничних елементів за точки колокації та записуючи в кожному із них рівняння (9) [2]:

$$c_i T^i_F + k\sum_{j=1}^{N}\sum_{f=1}^{F}\Big(\int_{\Gamma_j}\phi^T\int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} q^*\psi\, d\tau d\Gamma\Big)T^n =$$
$$= k\sum_{j=1}^{N}\sum_{f=1}^{F}\Big(\int_{\Gamma_j}\phi^T\int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} T^*\psi\, d\tau d\Gamma\Big)q^n + \sum_{l=1}^{L}\int_{\Omega_l} T^*(T_0 + W)d\Omega\ , \quad (9)$$

одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь. Для отримання такої ж глобальної системи рівнянь для інтегрального співвідношення

(7) використовуємо процедуру Бубнова - Гальоркіна із нев'язкою вигляду [3]

$$
\begin{aligned}
r_i(\xi) = & \sum_{l=0}^{N_j^n-1}\sum_{j=1}^{2}\left[c_{ij}(\xi)\varphi^{ln}(\xi) + \int_{\Gamma_n} F_{ij}^*(x,\xi)\varphi^{ln}(x)d\Gamma(x)\right]u_j^{ln} + \\
& + \sum_{\substack{m=1 \\ (m\neq n)}}^{N}\sum_{l=0}^{N_j^m-1}\sum_{j=1}^{2}\left[\int_{\Gamma_n} F_{ij}^*(x,\xi)\varphi^{lm}(x)d\Gamma(x)\right]u_j^{lm} - \\
& - \sum_{m=1}^{N}\sum_{l=0}^{N_j^m-1}\sum_{j=1}^{2}\left[\int_{\Gamma_n} G_{ij}^*(x,\xi)\varphi^{lm}(x)d\Gamma(x)\right]p_j^{lm} - \\
& - \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_l} X_i G_{ij}^*(z,\xi)d\Omega(z) - \\
& - \beta\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega_l} G_{jk,k}^*(z,\xi)T(z,\tau)d\Omega(z), \quad \xi\in\Gamma_n, \ \tau=\tau_F.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

В обох випадках (після врахування заданих граничних умов (5)) систему рівнянь можна записати у матричній формі:

$$
Ay = b \ , \tag{11}
$$

де A — цілковито заповнена несиметрична матриця. Для обчислення елементів матриці використовуються квадратурні формули Гаусса. Відомо, що у підінтегральних функціях у разі збігу аргументів мають місце особливості типу $1/r$ та $\ln r$. Такі інтеграли обчислюються за спеціальними методиками виділення сингулярностей [6].

При розв'язуванні задачі термопружності із застосуванням ПМГЕ не вдається повністю звести задачу до розв'язання граничного інтегрального рівняння, так само, як і в рівнянні теплопровідності при ненульовій початковій температурі або за наявності масових сил у задачі теорії пружності. Об'ємні інтеграли можна обчислити за відомою із методу скінченних елементів схемою, зобразивши область у вигляді об'єднання скінченних трикутних або чотирикутних елементів та використавши задані значення у вузлах апроксимації. Відомі також схеми, які полягають у зведенні інтегралів по області до інтегралів по границі [4]. Їх побудову продемострyємо на прикладі об'ємного інтеграла вигляду

$$\int_{\Omega} X_j(z) G^*_{ij}(z,\xi) d\Omega(z) \tag{12}$$

із рівняння (7).

Згідно з одним із цих підходів компоненти вектора масових сил подаємо у вигляді лінійної комбінації відомих координатних функцій f^s:

$$X_j = \sum_{s=1}^{S} f^s \alpha_j^s, \tag{13}$$

де $f^s = f(\xi_s, x)$ — функція між точкою ξ_s і точкою x (наприклад, $f^s = r(\xi_s, x)$); α_j^s — невідомі коефіцієнти, зв'язані з кожною f^s.

Тоді отримуємо, застосовуючи (13):

$$\int_{\Omega} X_j G^*_{ij} d\Omega = \sum_{s=1}^{S} \left\{ \alpha_j^s \left[c_{ij}\hat{u}_j + \int_{\Gamma} F^*_{ij}\hat{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} G^*_{ij}\hat{p}_j d\Omega \right] \right\}. \tag{14}$$

Тут $\hat{u}_j$ — частковий розв'язок рівняння (1) із правою частиною f^s; $\hat{p}_j$ —зусилля, що йому відповідають.

Інший метод перетворення об'ємного інтеграла у граничний грунтується на тотожності Гріна. Оскільки інтеграл по області має вигляд (12), функції G^1_{ij} необхідно взяти такими, щоб виконувалась рівність $\Delta G^1_{ij} = G^*_{ij}$.

Тоді

$$\int_{\Omega} X_j G^*_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} X_j (\Delta G^1_{ij}) d\Omega = \int_{\Gamma} \left\{ X_j \frac{\partial G^1_{ij}}{\partial n} - G^1_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial n} \right\} d\Gamma + \int_{\Omega} G^1_{ij} \Delta X_j d\Omega \tag{15}$$

Вводимо функцію X^1_j

$$X^1_j = \Delta X_j. \tag{16}$$

Тоді об'ємний інтеграл у правій частині рівняння (15) записуємо як

$$\int_{\Omega} X^1_j G^1_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} X^1_j (\Delta G^2_{ij}) d\Omega = \int_{\Gamma} \left\{ X^1_j \frac{\partial G^2_{ij}}{\partial n} - G^2_{ij} \frac{\partial X^1_j}{\partial n} \right\} d\Gamma + \int_{\Omega} G^2_{ij} \Delta X^1_j d\Omega \tag{17}$$

і т.д.

Вище викладену процедуру описуємо рекурсивними формулами:

$$X_{ij}^{s+1} = \Delta X_{ij}^{s}$$
$$\Delta G_{ij}^{s+1} = G_{ij}^{s} \qquad \text{для} \quad s = 0,1,2\dots \quad . \tag{18}$$

Об'ємний інтеграл (12) зображаємо як

$$\int_{\Omega} X_j G_{ij}^{*} d\Omega = \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left\{ X_j^{s} \frac{\partial G_{ij}^{s+1}}{\partial n} - G_{ij}^{s+1} \frac{\partial X_j^{s}}{\partial n} \right\} d\Gamma \, . \tag{19}$$

Програмна реалізація на основі такого підходу здійснена мовою С++ для ПЕОМ.

1. Б е н е р д ж и П., Б а т т е р ф и л д Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494с. 2. Г о л о в а ч Н. П., Д и я к І. І. Чисельне дослідження задачі теплопровідності прямим методом граничних елементів. // Вісн.Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип.39. С.46-52. 3. С а в у л а Я. Г., Д и я к І. І., П а у к Н.М. Гранично-скінченно-елементний аналіз комбінованих моделей двови- мірної задача теорії пружності. // Доп. НАН. 1995. № 5. С.49-52. 4.B r e b b I a C. A. On Two Different Methods for Transforming Domain Integrals to the Boundary // Advances in BEM. 1989. Vol. 1 Com. & Fun.. P.59-74. 5.S l á d e k V, S l á d e k J. Computation of thermal stresses in quasi-static non-stationary thermoelasticity using boundary elements. // International journal for numerical methods in engineering. 1989. Vol. 28. 1989, P. 1131-1144. 6.P a r r e i r a P., G u i g g i a n i M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method. // Comput. and Struct. 1989. Vol. 33. №1. P.269-279.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.96р

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

До питання розв'язності інтегрального рівняння осесиметричної задачі електростатики

Розглянемо задачу розрахунку осесиметричного електростатичного поля, створеного зарядженим провідником у формі деякої циліндричної поверхні. Остання утворюється обертанням навколо осі Oz незамкненої кривої Γ, інформація про яку подається на декартовій півплощині zr $(r \geq 0)$ за допомогою параметричних рівнянь: