$$X_{ij}^{s+1} = \Delta X_{ij}^{s}$$
$$\Delta G_{ij}^{s+1} = G_{ij}^{s} \qquad \text{для} \quad s = 0,1,2\ldots \; . \tag{18}$$

Об'ємний інтеграл (12) зображаємо як

$$\int_{\Omega} X_j G_{ij}^{*} d\Omega = \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left\{ X_j^{s} \frac{\partial G_{ij}^{s+1}}{\partial n} - G_{ij}^{s+1} \frac{\partial X_j^{s}}{\partial n} \right\} d\Gamma \; . \tag{19}$$

Програмна реалізація на основі такого підходу здійснена мовою C++ для ПЕОМ.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494с. 2. Головач Н. П., Дияк І. І. Чисельне дослідження задачі теплопровідності прямим методом граничних елементів. // Вісн.Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип.39. С.46-52. 3. Савула Я. Г., Дияк І. І., Паук Н.М. Гранично-скінченно-елементний аналіз комбінованих моделей двови- мірної задача теорії пружності. // Доп. НАН. 1995. № 5. С.49-52. 4.Brebbia C. A. On Two Different Methods for Transforming Domain Integrals to the Boundary // Advances in BEM. 1989. Vol. 1 Com. & Fun.. P.59-74. 5.Sládek V, Sládek J. Computation of thermal stresses in quasi-static non-stationary thermoelasticity using boundary elements. // International journal for numerical methods in engineering. 1989. Vol. 28. 1989, P. 1131-1144. 6.Parreira P., Guiggiani M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method. // Comput. and Struct. 1989. Vol. 33. №1. P.269-279.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.96р

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

До питання розв'язності інтегрального рівняння осесиметричної задачі електростатики

Розглянемо задачу розрахунку осесиметричного електростатичного поля, створеного зарядженим провідником у формі деякої циліндричної поверхні. Остання утворюється обертанням навколо осі Oz незамкненої кривої Γ, інформація про яку подається на декартовій півплощині zr $(r \geq 0)$ за допомогою параметричних рівнянь:

$$\Gamma = \{(z,r) \in \mathbf{R}^2 : z = z(t),\ r = r(t),\ t \in \overline{\Delta},\ r > 0;\ z(t),\ r(t) \in \mathbf{C}^2(\overline{\Delta})\}.$$

Тут $\Delta = (\alpha, \beta)$ — інтервал дійсної осі $\mathbf{R}^1$, причому $|\beta - \alpha| = \kappa \le 1$.

Відомо [1], що поставлена задача зводиться до такого одновимірного інтегрального рівняння (ІР) першого роду:

$$\int_\alpha^\beta \varphi(t) r(t) K(t,x) M(t) dt = U_0, \qquad (1)$$

де U_0 — граничне значення потенціалу на поверхні; $\varphi(t)$ — шукана густина розподілу зарядів уздовж Γ;

$$T(t,x) = \{[r(t) + r(x)]^2 + [z(t) - z(x)]^2\}^{1/2}, \quad x \in \Delta;$$

$$M(t) = \{[r'(t)]^2 + [z'(t)]^2\}^{1/2} > 0, \quad t \in \overline{\Delta};$$

$$K(t,x) = P(t,x) - Q(t,x)\ln\eta \equiv \sum_{l=0}^{4} a_l \eta^l - \ln\eta \sum_{l=0}^{4} b_l \eta^l,$$

причому

$$\eta = T^{-2}(t,x)\{[r(t) - r(x)]^2 + [z(t) - z(x)]^2\}.$$

В аналізі задачі (1) важливо з'ясувати тип ІР. Це допомагає вирішити питання розв'язності, що у свою чергу диктує вибір алгоритму наближеного розв'язання (1) та визначає характер апроксимацій шуканої густини $\varphi(t)$. Неважко переконатися в тому, що (1) зводиться до сингулярного ІР першого роду з логарифмічною особливістю в ядрі:

$$(L + N)\varphi \equiv \int_\alpha^\beta \varphi(t)[\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|t - x|} + N(t,x)]dt = U(x), \qquad (2)$$

де $U(x) = U_0 B^{-1}(x)$, причому $B(x) = \pi b_0 M(x)$, а

$$N(t,x) = B^{-1}(x)\Big\{\big[B(x) - 2Q(t,x)A(t,x)\big]\ln|t - x| +$$

$$+A(t,x)\Big[P(t,x) + Q(t,x)\ln\big(\eta^{-1}(t-x)^2\big)\Big]\Big\},$$

$$A(t,x) = r(t)M(t)T^{-1}(t,x).$$

Зауважимо, що $N(t,x)$ — неперервна функція обох аргументів, оскільки

$$\lim_{t\to x} \pi N(t,x) = (2b_0)^{-1} a_0 + \ln[2r(x)M^{-1}(x)].$$

Не зменшуючи загальності, розглянемо частковий випадок (1), коли

$$\Gamma = \{(z,r) \in \mathbf{R}^2 \colon\ z(t) \equiv t,\ r(t) \equiv 1,\ t \in \overline{\Delta}\}\ .$$

Тоді в термінах рівнянь (1), (2)

$$\begin{aligned} &T(t,x) = [4 + (t-x)^2]^{1/2}\ ; \\ &\eta = (t-x)^2 T^{-2}(t,x)\ ; \\ &U(x) = U_0(\pi b_0)^{-1}\ ; \\ &N(t,x) = (\pi\, b_0)^{-1}\{[b_0 - \Phi(t,x)]\ln|t-x| + D(t,x)\}\ , \end{aligned} \tag{3}$$

де

$$\Phi(t,x) = 2Q(t,x)T^{-1}(t,x)\ ,$$

$$D(t,x) = T^{-1}(t,x)[P(t,x) + 2Q(t,x)\ln T(t,x)]\ .$$

Досліджувати розв'язність ІР (2) можна в різних функціональних просторах, але у всіх випадках потрібно враховувати сингулярну поведінку шуканого розв'язку в околі кінців розімкненої кривої Γ. У зв'язку з цим розглянемо кілька просторів. Нехай

$$H(\overline{\Delta}) = \{\varphi(t) \in C(\overline{\Delta}) \colon\ |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le C|t_1 - t_2|^{\mu};$$
$$t_1, t_2 \in \overline{\Delta}, t_1 \ne t_2;\ C > 0;\ 0 < \mu \le 1\}\ .$$

Якщо на множині функцій $H(\overline{\Delta})$ визначити норму

$$\|\varphi\|_{H(\overline{\Delta})} = \|\varphi\|_{C(\overline{\Delta})} + h(\varphi)\ ,$$

де

$$h(\varphi) = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in \overline{\Delta} \\ t_1 \ne t_2}} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\mu}}\ ,$$

то одержаний нормований простір називають простором Гельдера. Можна показати, що $H(\overline{\Delta})$ — банахів. У випадку, коли значення параметра μ є суттєвим, використовують позначення $H_{\mu}(\overline{\Delta})$ — простір Гельдера з показником μ.

Розглянемо також множину функцій

$$\tilde{H}(\Delta) = \{\varphi(t) \colon\ \varphi(t) = \varphi^*(t)/R(t),\ t \in \Delta,$$
$$R(t) = [(t-\alpha)(\beta - t)]^{1/2},\ \varphi^*(t) \in H(\overline{\Delta})\}\ ,$$

яка разом із нормою $\|\varphi\|_{\widetilde{H}(\Delta)} = \|\varphi^*\|_{H(\overline{\Delta})}$ називається ваговим, або модифікованим, простором Гельдера. І нарешті, нехай

$$\widetilde{H}^1(\Delta) = \{\varphi(t)\colon \varphi'(t) = \varphi^*(t) / R(t),\ t \in \Delta;$$
$$\varphi^*(t) \in H(\overline{\Delta}),\ \varphi^*(\alpha) = \varphi^*(\beta) = 0\}$$

з нормою $\|\varphi\|_{\widetilde{H}^1(\Delta)} = \|\varphi\|_* + \|\varphi^*\|_{C(\overline{\Delta})} + h(\varphi^*)$, де $\|\varphi\|_* = \|\varphi\|_{C(\overline{\Delta})}$ тоді й лише тоді, коли $\varphi(t) \in C(\overline{\Delta})$.

Будемо розглядати розв'язок ІР (2) у просторі $\widetilde{H}(\Delta)$. Справедливою є така теорема.

Теорема 1. Оператор $L^{-1}\colon \widetilde{H}^1(\Delta) \to \widetilde{H}(\Delta)$ існує й обмежений $(\kappa \neq 4)$.

Доведення. Для доведення першого твердження розглянемо операторне рівняння

$$\mathrm{L}\varphi \equiv -\frac{1}{\pi}\int_a^b \varphi(t)\ln|t-x|dt = \mathrm{G}(x), \qquad x \in \Delta.$$

У праці [2] показано, що розв'язок цього рівняння існує при будь-якій правій частині з $\widetilde{H}^1(\Delta)$, отже, оператор L^{-1} існує.

Доведемо, що L^{-1} обмежений. Оператор L^{-1} діє за формулою

$$(L^{-1}G)(t) = -\frac{1}{\pi R(t)}\int_\alpha^\beta \frac{R(x)G'(x)}{x-t}dx + \frac{C}{R(t)},$$

де

$$C = \ln^{-1}\left(\frac{4}{\kappa}\right)\left\{G(x) - \frac{1}{\pi^2}\int_\alpha^\beta \ln|x-t|\frac{dt}{R(t)}\int_\alpha^\beta \frac{R(\tau)G'(\tau)}{\tau - t}d\tau\right\}.$$

Потрібно довести, що $\|L^{-1}G\|_{\widetilde{H}(\Delta)} \le K\|G\|_{\widetilde{H}^1(\Delta)}$. Зазначимо, що $G(x) \in \widetilde{H}^1(\Delta)$ тоді й тільки тоді, коли $G'(x) \in \widetilde{H}(\Delta)$. Останнє означає, що $G'(x)$ можна подати у вигляді $G^*(x)/R(x)$, причому $G^*(x) \in H(\overline{\Delta})$, а $G^*(\alpha) = G^*(\beta) = 0$. Тому

$$\|G\|_{\widetilde{H}^1(\Delta)} = \|G\|_{C(\overline{\Delta})} + \|G^*\|_{C(\overline{\Delta})} + h(G^*).$$

Для оцінки $\left\| L^{-1}G \right\|_{\widetilde{H}(\Delta)}$ досить розглянути лише доданок $C/R(t)$, причому $h(C)=0$. Перший доданок оцінюють аналогічним чином. Отже,

$$\left\| \frac{C}{R(t)} \right\|_{\widetilde{H}(\Delta)} = \left\| C \right\|_{H(\bar{\Delta})} = \left\| C \right\|_{C(\bar{\Delta})} = \max_{x\in\Delta} \left| C(x) \right| .$$

Тому

$$\left| C(x) \right| \le C_1 \left\{ \left\| G \right\|_{C(\bar{\Delta})} + \frac{1}{\pi\, C_1} \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(\tau)G'(\tau)}{\tau - t} d\tau \right\|_{C(\bar{\Delta})} \right\} =$$

$$= C_1 \left\| G \right\|_{C(\bar{\Delta})} + \frac{1}{\pi} \max_{t} \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(\tau)G'(\tau)}{\tau - t} d\tau \right| ,$$

де $C_1 = \left| \ln^{-1}\left(\frac{4}{\kappa}\right) \right|$.

Як легко побачити,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(\tau)G'(\tau)}{\tau - t} d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{[R(\tau)G'(\tau) - R(t)G'(t)]\left|\tau - t\right|^{\mu}}{(\tau - t)\left|\tau - t\right|^{\mu}} d\tau + R(t)G'(t) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\tau}{\tau - t} .$$

Тому

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(\tau)G'(\tau)}{\tau - t} d\tau \right| \le h(G^*) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\tau}{\left|\tau - t\right|^{1-\mu}} + C_2 \left\| G^* \right\|_{C(\bar{\Delta})} .$$

Тут $C_2 = \left| \ln\left(\frac{\beta - \bar{t}}{\bar{t} - \alpha} \right) \right|$, а $\bar{t}$ — точка, в якій функція $\left| G^*(t) \right|$ досягає свого максимального значення на $\bar{\Delta}$:

$$\left| G^*(\bar{t}) \right| = \max_{t\in\bar{\Delta}} \left| G^*(t) \right| = \left\| G^* \right\|_{C(\bar{\Delta})} .$$

При цьому $\bar{t} \ne \alpha$, $\bar{t} \ne \beta$, оскільки $G^*(\alpha) = G^*(\beta) = 0$, $G^*(t) \not\equiv 0$ і

$$R(t)G'(t) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\tau}{\tau - t} = G^*(t) \ln\left(\frac{\beta - t}{t - \alpha} \right) \to 0$$

у випадку, коли $t \to \alpha$ або $t \to \beta$.

Таким чином,

$$|C(x)| \le C_1 \|G\|_{C(\bar{\Delta})} + \frac{1}{\pi} C_2 \|G^*\|_{C(\bar{\Delta})} + \frac{1}{\pi} C_3 h(G^*) \le C_4 \|G\|_{\tilde{H}^1(\Delta)} ,$$

де

$$C_3 = \max_{t \in \Delta} \int_{\alpha}^{\beta} |\tau - t|^{\mu - 1} d\tau ,$$

а $C_4 = \max\left\{ C_1, \frac{1}{\pi} C_2, \frac{1}{\pi} C_3 \right\}$, що й завершує доведення теореми.

Повернемось до ІР (2), коли функція $N(t,x)$ подається у вигляді (3). Справедлива також така теорема.

Теорема 2. Оператор N: $\tilde{H}(\Delta) \to \tilde{H}^1(\Delta)$ цілком неперервний.

Доведення. Внаслідок достатньої гладкості функції $D(t,x)$ (див. (3)) потрібно довести повну неперервність лише оператора

$$\tilde{N}\varphi \equiv (\pi\, b_0)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} [b_0 - \Phi(t,x)] \ln|t - x| \varphi(t) dt .$$

Покажемо, що оператор $\tilde{N}$: $\tilde{H}(\Delta) \to \tilde{H}^1(\Delta)$ відображає кожну обмежену множину функцій із $\tilde{H}(\Delta)$ у компактну (в сенсі метрики простору $\tilde{H}^1(\Delta)$). Справді, нехай

$$\mathrm{M} = \left\{ \varphi(t) \in \tilde{H}(\Delta) \colon \|\varphi\|_{\tilde{H}(\Delta)} = \|\varphi^*\|_{C(\bar{\Delta})} + h(\varphi^*) \le C = \mathrm{const} \right\} .$$

З означення норми простору $H(\bar{\Delta})$ випливає, що функції $\varphi^*(t) \in \mathrm{M}$ рівномірно обмежені та одностайно неперервні:

$$\left|\varphi^*(t_1) - \varphi^*(t_2)\right| = \frac{\left|\varphi^*(t_1) - \varphi^*(t_2)\right|}{|t_1 - t_2|^{\mu}} |t_1 - t_2|^{\mu} \le$$

$$\le h(\varphi^*) |t_1 - t_2|^{\mu} \le C |t_1 - t_2|^{\mu} .$$

Отже, за теоремою Арцела [4], з M можна виділити рівномірно збіжну послідовність $\left\{\varphi_n^*\right\}$. Нехай її границя (в сенсі простору $C(\bar{\Delta})$) є φ^*. Приймемо, що $\psi_n = \tilde{N}\varphi_n$, $\psi = \tilde{N}\varphi$, де $\varphi_n(t) = \varphi_n^*(t) / R(t)$,

$\varphi(t) = \varphi^*(t)/R(t)$. Наше твердження буде доведене, якщо покажемо, що ψ_n прямує до ψ у метриці $\widetilde{H}^1(\Delta)$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \|\omega_n\|_{\widetilde{H}^1(\Delta)} = 0 ,$$

де $\omega_n = \psi - \psi_n$. Однак це безпосередньо випливає з того, що, по-перше,

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in\bar{\Delta}} |\omega_n(x)| = 0 ,$$

оскільки

$$\omega_n(x) = (\pi\, b_0)^{-1} \int_\alpha^\beta R^{-1}(t)[b_0 - \Phi(t,x)]\ln|t-x|\rho_n(t)dt =$$

$$= (\pi\, b_0)^{-1}[b_0 - \Phi(\bar{t},x)]\ln|\bar{t}-x|\rho_n(\bar{t})\int_\alpha^\beta R^{-1}(t)dt =$$

$$= b_0^{-1}[b_0 - \Phi(\bar{t},x)]\ln|\bar{t}-x|\rho_n(\bar{t}) ,$$

звідки $|\omega_n(x)| \le b_o^{-1} K \|\rho_n\|_{C(\bar{\Delta})}$, де

$$K = \max_{x\in\bar{\Delta}} \left|[b_0 - \Phi(\bar{t},x)]\ln|\bar{t}-x|\right| ,$$

$\rho_n = \varphi^* - \varphi_n^*$, а $\bar{t} \in \bar{\Delta}$ — деяка точка, передбачена теоремою про середнє значення. По-друге,

$$\omega'_n(x) = -(\pi\, b_0)^{-1} \int_\alpha^\beta \Phi'_x(t,x)\ln|t-x|R^{-1}(t)\rho_n(t)dt +$$

$$+(\pi\, b_0)^{-1} \int_\alpha^\beta R^{-1}(t)[\Phi(t,x) - b_0]\rho_n(t)(t-x)^{-1}dt \equiv Q_n^{(1)}(x) + Q_n^{(2)}(x)$$

Тут, маючи на увазі, що $Q_n^{(i)}(x) = R(x)Q_n^{(i)}(x)R^{-1}(x)$, $(i = 1,2)$, залишається показати, що

$$\left\|Q_n^{(i)}\right\|_{\widetilde{H}(\Delta)} = \left\|RQ_n^{(i)}\right\|_{C(\bar{\Delta})} + h(RQ_n^{(i)}) \to 0 , \quad n \to \infty .$$

Враховуючи попереднє, прямування до нуля величини $\left\|RQ_n^{(i)}\right\|_{C(\bar{\Delta})}$ є очевидним. Легко бачити також, що

$$R(x)Q_n^{(1)}(x) = b_0^{-1}\ln(4/\kappa)R(x)\Phi'_x(\bar{t},x)\rho_n(\bar{t}),$$

де $\bar{t} \in \bar{\Delta}$ — деяка точка, передбачена теоремою про середнє. Тому на підставі достатньої гладкості функції $\Phi'_x(\bar{t},x)$, того, що $R(x) \in H(\bar{\Delta})$, а також беручи до уваги відому властивість добутку функцій із класів Гельдера [3], одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} h(RQ_n^{(1)}) = 0.$$

Нарешті, використовуючи позначення $S(t,x) = R(x)[\Phi(t,x) - b_0](t-x)^{-1}$, де $[\Phi(t,x) - b_0](t-x)^{-1} \in H(\bar{\Delta})$ (див. [4]), можна записати нерівність

$$\frac{\left|R(x_1)Q_n^{(2)}(x_1) - R(x_2)Q_n^{(2)}(x_2)\right|}{\left|x_1 - x_2\right|^{\mu}} \le$$

$$\le (\pi b_0)^{-1}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\left|S(t,x_1) - S(t,x_2)\right|}{\left|x_1 - x_2\right|^{\mu}}\frac{\left|\rho_n(t)\right|}{R(t)}dt \le b_0^{-1}h(S)(\bar{t})\left\|\rho_n\right\|_{C(\bar{\Delta})},$$

звідки випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} h(RQ_n^{(2)}) = 0.$$

Отже, теорема доведена.

Зважаючи на зазначене вище, легко навести рівняння (2) у такому еквівалентному вигляді:

$$(I + L^{-1}N)\varphi = L^{-1}U,$$

причому $L^{-1}N \in \sigma(\tilde{H}(\Delta))$ як добуток обмеженого та цілком неперервного. Звідси за теоремою Нікольського [4] оператор $I + L^{-1}N$ — фредгольмів. Отже, питання про розв'язність (2) вирішується в межах теорії Фредгольма.

1. Гарасим Я. С., Остудін Б. А. Розробка математичного та програмного забезпечення для розрахунку осесиметричних електростатичних полів на базі персональних комп'ютерів//Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 41. С. 27-35. 2. Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. М.: Изд-во МГУ, 1989. 184с. 3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные

интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с. 4. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495с.

Стаття надійшла до редколегії 26.02.96

УДК 518:517.948

Л.Л.Роман

Чисельне розв'язування задач пружності для круглих пластин

Для розв'язування класу задач про напружено-деформований стан круглих пластин змінної товщини h під дією нормальних осесиметричних навантажень застосуємо методи, побудовані у праці [2].

Запишемо у векторній формі розв'язкову систему рівнянь [1]:

$$\frac{dN}{dx} = f(x,N), \tag{1}$$

де

$$N = \{N_i\} = \{N_r, u, Q_r, M_r, w, v_r\},$$
$$f(x,N) = (f_1(x,N),\ldots,f_6(x,N)),\ x_0 \le x \le 1,$$
$$f_1(x,N) = -\frac{1-\nu}{x}N_r + \frac{h}{x^2}u,$$
$$f_2(x,N) = \frac{1-\nu^2}{x}N_r - \frac{\nu}{x}u - \frac{1}{2}v_r^2,$$
$$f_3(x,N) = -\frac{1}{x}Q_r - \frac{h}{x^2}uv_r - \frac{4}{h^3}N_rM_r + q_g,$$
$$f_4(x,N) = -Q_r - \frac{1-\nu}{x}M_r + \frac{(1-\nu^2)h^3}{4x^2}v_r,$$
$$f_5(x,N) = -v_r,\ f_6(x,N) = \frac{4}{h^3}M_r - \frac{\nu}{x}v_r.$$

Тут $N_r, N_\theta, Q_r, M_r, M_\theta$ — безрозмірні зусилля і моменти; u, w — радіальне і нормальне переміщення.

Крайові умови в загальному випадку мають вигляд

$$B_1N(x_0) = b_1,\ B_2N(1) = b_2, \tag{2}$$

де B_1, B_2, b_1, b_2 — задані прямокутні матриці і вектори відповідно.