интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с. 4. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495с.

Стаття надійшла до редколегії 26.02.96

УДК 518:517.948

Л.Л.Роман

Чисельне розв'язування задач пружності для круглих пластин

Для розв'язування класу задач про напружено-деформований стан круглих пластин змінної товщини h під дією нормальних осесиметричних навантажень застосуємо методи, побудовані у праці [2].

Запишемо у векторній формі розв'язкову систему рівнянь [1]:

$$\frac{dN}{dx} = f(x,N), \tag{1}$$

де

$$N = \{N_i\} = \{N_r, u, Q_r, M_r, w, v_r\},$$
$$f(x,N) = (f_1(x,N),\dots,f_6(x,N)),\ x_0 \le x \le 1,$$
$$f_1(x,N) = -\frac{1-\nu}{x}N_r + \frac{h}{x^2}u,$$
$$f_2(x,N) = \frac{1-\nu^2}{x}N_r - \frac{\nu}{x}u - \frac{1}{2}v_r^2,$$
$$f_3(x,N) = -\frac{1}{x}Q_r - \frac{h}{x^2}uv_r - \frac{4}{h^3}N_rM_r + q_g,$$
$$f_4(x,N) = -Q_r - \frac{1-\nu}{x}M_r + \frac{(1-\nu^2)h^3}{4x^2}v_r,$$
$$f_5(x,N) = -v_r,\ f_6(x,N) = \frac{4}{h^3}M_r - \frac{\nu}{x}v_r.$$

Тут $N_r, N_\theta, Q_r, M_r, M_\theta$ — безрозмірні зусилля і моменти; u, w — радіальне і нормальне переміщення.

Крайові умови в загальному випадку мають вигляд

$$B_1N(x_0) = b_1,\ B_2N(1) = b_2, \tag{2}$$

де B_1, B_2, b_1, b_2 — задані прямокутні матриці і вектори відповідно.

Дослідимо задачу знаходження мінімального прогину $W(x)$:

$$\min_{x_0 \le x \le 1} W(x) \tag{3}$$

кільцевої пластини завтовшки $h(x)$ під дією рівномірно розподіленого навантаження при обмеженні на рівень зусиль:

$$N_r^2 + N_\theta^2 \le \gamma \text{ . (4)}$$

Крайові умови (2) в цьому випадку записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} &\text{при } x = x_0 ,\ u(x) = W(x) = v(x) = 0 , \\ &\text{при } x = 1 ,\ N_r(x) = M_r(x) = Q_r(x) = 0 . \end{aligned} \tag{5}$$

Для розв'язування задачі (3), (1), (4), (5) застосуємо методику [2] зведення такого типу задач до спеціально побудованої задачі нелінійного програмування. Введемо позначення:

$$N_r(x_0) = z_0^1 ,\ Q_r(x_0) = z_0^2 ,\ M_r(x_0) = z_0^3 ,$$

$$z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3) ,\ \eta(x) = N_r^2(x) + N_\theta^2(x) - \gamma ,$$

$$N(0) = (z_0^1, 0, z_0^2, z_0^3, 0, 0) ,$$

де $z(x, z_0)$ — розв'язок задачі Коші для системи рівнянь (1) за умови:

$$N(x_0) = N_0 . \tag{6}$$

Підставивши при $x = 1$ розв'язок задачі Коші (1), (6) $z(x, z_0)$ в крайові умови (2), побудуємо

$$q(z_0) = (N_r(z(1, z_0)), M_r(z(1, z_0)), Q_r(z(1, z_0)))^T .$$

У результаті знаходження розв'язку задачі (3), (1), (4), (5) звелося до розв'язування задачі:

$$\begin{aligned} &\min_{x_0 \le x \le 1} W(x) , \\ &q(z_0) = 0 ,\ \eta(x) \le 0 , \\ &\frac{dN}{dx} = f(x, N) ,\ N(x_0) = N_0 . \end{aligned} \tag{7}$$

Задачу (7) розв'язуватимемо за такою схемою:

1) задамо зачення $z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3)$;

2) обчислимо $z(x, z_0)$, розв'язавши задачу (1), (6), а також $q(z_0)$, $\eta(x)$;

3) побудуємо модифіковану функцію Лагранжа:

$$H(x, z_0, \mu, \lambda) = W(z(x, z_0)) + \sum_{i=1}^{3} \varphi(q_i(z_0), \mu_i) + \phi(\eta(x), \lambda) , \tag{8}$$

де функції φ і ϕ вибираємо так, щоб можна було розв'язати систему:

$$\varphi_q(q(z_0), \mu_i) = \mu_i, \quad i = 1,2,3, \quad \phi_\eta(\eta(x), \lambda) = \lambda\,; \tag{9}$$

Для мінімізації функції (8) застосуємо метод Ньютона досліджений у [2].

При чисельному розв'язуванні задачі приймали:

$$h(x) = h_0(1 - 0.666x)\,, h_0 = 1\,, x_0 = 0.5\,,$$

$$q_\gamma = q_0 = 5, 10, 15, \ldots, 30\,,\ \nu = 0.3\,, \gamma = 0.3, 0.5,$$

$$\varphi(q_i, \mu_i) = q_i\mu_i + \frac{1}{2}q_i^2(1 + \frac{1}{2}\cos\mu_i)\,,$$

$$\phi(\eta(x), \lambda) = \frac{1}{4\tau}[(\lambda + \tau\eta(x))_+^4 - 4\tau\eta(x)\lambda^3] + \frac{\lambda}{\tau}\begin{cases}\tau\eta(x), & \eta(x) \ge 0,\\ \operatorname{arctg}\tau\eta(x), & \eta(x) < 0\,.\end{cases}$$

Одержані при цьому чисельні значення узгоджуються з точністю 10^{-4}-10^{-5} з результатами [1].

1. Г р и г о р е н к о Я.М., М у х о е д А.П. Решение нелинейних задач теории обо-лочек на ЭВМ. К., 1983. 286 с. 2. Р о м а н Л.Л. "Про застосування методу Ньютона для розв'язування задач операторного програмуван-ня//Питання оптимізації обчислень.: Тези доп. К., 1993. С.144-145.

Стаття надійшла до редколегії 17.01.96

УДК 519.21

Р.Т.Мисак

Стаціонарне рівняння Ріккаті для визначення оптимального оператора-регуляризатора

Нехай математична модель деякої системи S задається рівнянням

$$\vec{y}(t) = \int_G x(t,s)\vec{c}(s)ds + \vec{\varepsilon}(t), \tag{1}$$

де $\vec{y}(t)$ — вектор-функція спостережень; $x(t, s)$ — відома функція двох змінних; $\vec{c}(t)$ — невідома вектор-функція, яку необхідно оцінити за спостереженнями $\vec{y}(t)$; $\vec{\varepsilon}(t)$ — випадкова функція похибок, яка задовольняє умови

$$M\vec{\varepsilon}(t) = 0;\ M\vec{\varepsilon}(t)\vec{\varepsilon}'(t) = R\,\cdot \tag{2}$$