де функції φ і ϕ вибираємо так, щоб можна було розв'язати систему:

$$\varphi_q(q(z_0),\mu_i)=\mu_i,\quad i=1{,}2{,}3,\qquad \phi_\eta(\eta(x),\lambda)=\lambda\,; \tag{9}$$

Для мінімізації функції (8) застосуємо метод Ньютона досліджений у [2].

При чисельному розв'язуванні задачі приймали:

$$h(x)=h_0(1-0.666x)\,,h_0=1\,,x_0=0.5\,,$$

$$q_\gamma=q_0=5,10,15,\ldots,30\,,\ \nu=0.3\,,\gamma=0.3,\,0.5,$$

$$\varphi(q_i,\mu_i)=q_i\mu_i+\frac{1}{2}q_i^2(1+\frac{1}{2}\cos\mu_i)\,,$$

$$\phi(\eta(x),\lambda)=\frac{1}{4\tau}[(\lambda+\tau\eta(x))_+^4-4\tau\eta(x)\lambda^3]+\frac{\lambda}{\tau}\begin{cases}\tau\eta(x), & \eta(x)\ge 0,\\ \operatorname{arctg}\tau\eta(x), & \eta(x)<0\,.\end{cases}$$

Одержані при цьому чисельні значення узгоджуються з точністю 10^{-4}-10^{-5} з результатами [1].

1.Г р и г о р е н к о Я.М., М у х о е д А.П. Решение нелинейных задач теории обо-лочек на ЭВМ. К., 1983. 286 с. 2. Р о м а н Л.Л. "Про застосування методу Ньютона для розв'язування задач операторного програмування//Питання оптимізації обчислень.: Тези доп. К., 1993. С.144-145.

Стаття надійшла до редколегії 17.01.96

УДК 519.21

Р.Т.Мисак

Стаціонарне рівняння Ріккаті для визначення оптимального оператора-регуляризатора

Нехай математична модель деякої системи S задається рівнянням

$$\vec{y}(t)=\int_G x(t,s)\vec{c}(s)ds+\vec{\varepsilon}(t), \tag{1}$$

де $\vec{y}(t)$ — вектор-функція спостережень; $x(t,s)$ — відома функція двох змінних; $\vec{c}(t)$ — невідома вектор-функція, яку необхідно оцінити за спостереженнями $\vec{y}(t)$; $\vec{\varepsilon}(t)$ — випадкова функція похибок, яка задовольняє умови

$$M\vec{\varepsilon}(t)=0;\ M\vec{\varepsilon}(t)\vec{\varepsilon}'(t)=R\,\cdot \tag{2}$$

Припустимо, що функції $\vec{y}(t)$, $\vec{c}(t)$, $\vec{\varepsilon}(t) \in L_2(G,\mu)$, де $L_2(G,\mu)$ — простір функцій з інтегрованим на G квадратом і заданою на ньому мірою μ. Простір $L_2(G,\mu)$, який надалі ми будемо позначатимемо L_2, є гільбертовим простором [4]. Скалярний добуток в L_2 визначається формулою

$$(f,g) = \int_G f(x)g(x)dx\ .$$

Норма в L_2 визначається формулою

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_G f^2(x)dx}\ .$$

Нехай невідома вектор-функція $\vec{c}(s)$ задовольняє умову

$$\|\vec{c}(s)\| = (\vec{c}(s),\vec{c}(s)) = \int_G \vec{c}\,'(s)\vec{c}(s)ds \le 1 \cdot \tag{3}$$

В операторн.ій формі рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\vec{y} = X\vec{c} + \vec{\varepsilon}, \tag{4}$$

де X — оператор, що діє на просторі L_2.

Неважко показати, що оцінка $\hat{\vec{c}}(s)$ невідомої функції $\vec{c}(s)$, отримана методом найменших квадратів, є розв'язком інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду:

$$\int_G x(s,t)\vec{y}(t)dt = \iint_G x(s,t)x(t,\tilde{s})\hat{\vec{c}}(\tilde{s})dsdt, \tag{5}$$

де $K(s,\tilde{s}) = \int_G x(s,t)x(t,\tilde{s})dt$ — ядро оператора.

Рівняння (5) в операторній формі має вигляд

$$X^*\vec{y} = X^*X\hat{\vec{c}},$$

де X^* — оператор, спряжений до оператора X

Звідси у випадку існування оберненого оператора $(X^*X)^{-1}$ оцінка $\hat{\vec{c}}$ визначається як

$$\hat{\vec{c}} = (X^*X)^{-1}X^*\vec{y}.$$

Однак відомо, що рівняння Фредгольма 1-го роду належить до класу так званих некоректних рівнянь [5]. Тому є сенс розглядати регуляризовані оцінки, які введемо таким чином [1,2]

$$\tilde{\vec{c}} = (X^*X + A)^{-1}X^*\vec{y}, \tag{6}$$

де A — деякий додатно визначений самоспряжений оператор, визначений на L_2 і такий, що існує неперервний оператор $(X^*X + A)^{-1}$.

Причому нас цікавитиме лише такий оператор-регуляризатор A, що мінімізує вираз $M\|\vec{c}-\tilde{\vec{c}}\|^2$.

Позначимо через L множину додатно визначених самоспряжених операторів, визначених на L_2. Тоді справедлива є така теорема

Теорема 1. Нехай виконуються умови (2) і (3), тоді

$$\begin{aligned} &\inf_{A\in L} \sup_{\vec{c}\in L_2:(\vec{c},\vec{c})\le 1} M\|\vec{c}-\tilde{\vec{c}}\|^2 = \lambda_1(\hat{A}(\hat{A}+X^*X)^{-2}\hat{A}) + \\ &+Sp((\hat{A}+X^*X)^{-1}X^*RX(\hat{A}+X^*X)^{-1}), \end{aligned} \tag{7}$$

де λ_1 — максимальне власне число оператора $\hat{A}(\hat{A}+X^*X)^{-2}\hat{A}$.

Якщо λ_1 однократне при всіх розв'язках $\hat{A}$, тоді розв'язок рівняння (7) є розв'язком спектрального стаціонарного операторного рівняння Ріккаті:

$$\hat{A}V\hat{A}-\hat{A}W-W^*\hat{A}-Q=0, \tag{8}$$

де

$$Q = X^*XX^*RX + X^*RXX^*X;$$

$$V = \vec{e}_1\vec{e}_1'X^*X + X^*X\vec{e}_1\vec{e}_1';$$

$$W = X^*RX - \vec{e}_1\vec{e}_1'(X^*X)^2;$$

$\vec{e}_1$ — власний вектор, що відповідає власному числу λ_1.

Доведення. Очевидно, що

$$\begin{aligned} M\|\vec{c}-\tilde{\vec{c}}\|^2 &= M\|\vec{c}-(A+X^*X)^{-1}X^*\vec{y}\|^2 = \|((A+X^*X)^{-1}X^*X-I)\vec{c}\|^2 + \\ &+Sp((A+X^*X)^{-1}X^*RX(A+X^*X)^{-1}), \end{aligned}$$

де I — одиничний оператор.

Беручи до уваги співвідношення Релея, отримаємо

$$\begin{aligned} &\sup_{\vec{c}:(\vec{c},\vec{c})\le 1} M\|\vec{c}-\hat{\vec{c}}\|^2 = \lambda_1(((A+X^*X)^{-1}-I)^*((A+X^*X)^{-1}-I))+ \\ &Sp(\hat{A}+X^*X)^{-2}X^*RX = \lambda_1(A(A+X^*X)^{-2}A)+Sp(A+X^*X)^{-2} * \\ &*X^*RX. \end{aligned}$$

Цей вираз характеризує похибку регуляризованої оцінки. Знайдемо тепер такий оператор-регуляризатор, щоб похибка була мінімальною. Для цього скористаємось необхідними умовами екстремуму та формулою для збурень власних чисел [2] і візьмемо похідну за напрямком:

$$\begin{aligned} &(\partial/\partial t)(\lambda_1((\hat{A}+t\Theta)(\hat{A}+t\Theta+X^*X)^{-2}(\hat{A}+t\Theta))+Sp((\hat{A}+t\Theta+ \\ &+X^*X)^{-1}X^*RX(\hat{A}+t\Theta+X^*X)^{-1}))_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

де Θ — деякий довільний оператор з множини L, $0 \langle t \langle \infty$.

Враховуючи довільність оператора Θ, отримуємо

$$\hat{A}\vec{e}_1\vec{e}_1'(\hat{A}+X^*X)^2-\hat{A}\vec{e}_1\vec{e}_1'\hat{A}(\hat{A}+X^*X)+(\hat{A}+X^*X)^2\vec{e}_1\vec{e}_1'\hat{A}-(\hat{A}+$$

$$+X^*X)\hat{A}\vec{e}_1\vec{e}_1'\hat{A}-(\hat{A}+X^*X)X^*RX-X^*RX(\hat{A}+X^*X)=0.$$

Звідси маємо операторне стаціонарне рівняння Ріккаті для визначення шуканого оператора-регуляризатора:

$$\hat{A}(\vec{e}_1\vec{e}_1'X^*X+X^*X\vec{e}_1\vec{e}_1')\hat{A}-\hat{A}(X^*RX-\vec{e}_1\vec{e}_1'(X^*X)^2)-(X^*RX-\vec{e}_1\vec{e}_1'*$$

$$*(X^*X)^2)\hat{A}-X^*XX^*RX-X^*RXX^*X=0.$$

Отже, теорема 1 доведена.

<u>Теорема 2.</u> Нехай виконуються умови (2), (3) і стосовно оператора R відомо лише, що $R\in L$ та $SpR\le\beta\langle\infty$. Тоді

$$inf_{A\in L}\,sup_{\vec{c}\in L_2:(\vec{c},\vec{c})\le 1;SpR\le\beta} M\|\vec{c}-\tilde{\vec{c}}\|^2=\lambda_1(\hat{A}(\hat{A}+X^*X)^{-2}\hat{A})+ \qquad (9)$$

$$+\beta\mu_1(X(\hat{A}+X^*X)^{-2}X^*),$$

де μ_1 — максимальне власне число оператора $X(\hat{A}+X^*X)^{-2}X^*$.

Якщо власні числа λ_1,μ_1 однократні для всіх розв'язків рівняння (9), тоді його розв'язок є розв'язком спектрального стаціонарного операторного рівняння Ріккаті:

$$\hat{A}V\hat{A}-\hat{A}W-W^*\hat{A}-\beta Q=0,$$

де

$$Q=X^*XX^*\vec{u}_1\vec{u}_1'X+X^*\vec{u}_1\vec{u}_1'XX^*X;$$

$$V=\vec{e}_1\vec{e}_1'X^*X+X^*X\vec{e}_1\vec{e}_1';$$

$$W=\beta X^*\vec{u}_1\vec{u}_1'X-\vec{e}_1\vec{e}_1'(X^*X)^2;$$

$\vec{e}_1,\vec{u}_1$ — власні вектори, що відповідають власним числам λ_1,μ_1 відповідно.

<u>Доведення.</u> Враховуючи співвідношення Релея [4], легко показати, що виконується співвідношення

$$\sup_{SpR\le\beta}Sp((A+X^*X)^{-1}X^*RX(A+X^*X)^{-1})=$$

$$=\beta\mu_1(X(A+X^*X)^{-2}*X^*).$$

Тоді подальше доведення аналогічне доведенню теореми 1.

1. Гирко В.Л., Онша Ю.М., Мысак Р.Т. Уравнение Риккати для матрицы-регуляризатора в методе наименьших квадратов // Вычисл. и прикл. математика. 1988. Вып.64. С.135-137. 2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.:Мир. 1972. 3. Мысак Р.Т. Спектральное уравне-

ние для оптимальной матрицы-регуляризатора в методе наименьших квадратов // Специальная радиоелектроника. М., 1993. Вып. 1-3. С. 50-52. 4. Рид М., Саймон Б. Методы современной матфизики. Т1. Функциональный анализ. М.:Мир. 1977. 358 с. 5 Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решений некорректних уравнений. М.: Наука, 1986.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.1996

УДК 519.6

Б.М.Голуб

Функції наповнення у глобальній оптимізації

У даній статті розглянуті деякі аспекти побудови функцій наповнення, що використовуються [1,2] в тунельних методах пошуку глобального мінімуму ліпшицевої функції *f(x)* на компактній множині $X \subset R^n$, де R^n — *n*-вимірний евклідів простір.

1. Означення. Нехай $x_* \in X$ — довільна точка строгого мінімуму функції *f(x)*. Позначимо

$$A(x_*) = \{x \in X : f(x) > f(x_*)\},$$

$$B(x_*) = \{x \in X : f(x) \le f(x_*)\} \setminus \{x_*\},$$

$$B_\varepsilon(x_*) = \{x \in X: \ f(x) \le f(x_*) - \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0,$$

$$H(y) = \{h \in R^n : y + \alpha h \in X, \ \alpha > 0\}, \quad y \in X.$$

Якщо L — константа Ліпшиця для функції *f(x)*, то для довільних $x \in X$, $h \in R^n$ та $\alpha > 0$ таких, що $x + \alpha h \in X$, виконується нерівність $\left|f(x+\alpha h) - f(x)\right| \le \alpha L\|h\|$. Звідси випливає існування скінченної похідної функції *f(x)* за напрямком h у довільній точці $x \in X$:

$$|f'(x;h)| = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\left|f(x+\alpha h) - f(x)\right|}{\alpha} \le L\|h\|.$$

Лема 1. Для того, щоб точка *y* була екстремальною для функції *f(x)*, необхідно і достатньо виконання нерівності $f'(y;h_1) \cdot f'(y;h_2) \ge 0$ для довільних $h_1, h_2 \in H(y)$.

Доведення леми безпосередньо випливає з означень екстремальної точки та похідної за напрямком.