

Також у цьому аналізі потрібно вести довідник основних показників господарської діяльності підприємств і установ (наприклад, розмір основних виробничих фондів повинен бути приблизно однаковим для одного й того самого підприємства упродовж тривалого часу). Відхилення віднижньої чи верхньої межі інтервалу довір'я для аналізу має єдине тлумачення — подана інформація недостовірна.

Використана література:

1. Айвазян С.А. Статистическое исследование зависимостей. М., 1968;
2. Рябушкин Т.В. Теория и методы экономической статистики. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 1.03.96

УДК 539.3:538.54

О.Р. Гачкевич, О.М. Дзюбачик, М.Т. Солодяк

Визначення гістерезисного тепла у феритах при індукційному нагріванні

Відомо [1,5], що в деяких феритах (наприклад, з прямокутною петлею гістерезису) внаслідок великого омичного опору майже не виникають індукційні струми, і отже, практично не виділяється Джоулеве тепло. Проте такі тіла характеризуються великим тангенсом кута втрат або великим тепловиділенням при перемагнічуванні, знаходження якого є метою даної роботи.

Нехай на поверхні (S) тіла підтримується напруженість зовнішнього магнітного поля

$$\vec{H}^{(0)}(\vec{r}_0, t) = \vec{H}_0(\vec{r}_0) \cos \omega t. \quad (1)$$

Зауважимо, що для даного випадку амплітуда $\vec{H}_0(\vec{r})$ мало змінюється всередині тіла (глибинне нагрівання). Тут $\vec{r}; \vec{r}_0$ — радіус-вектори даної точки тіла і розглядуваної точки поверхні відповідно; $\omega = 2\pi\nu$; ν — частота; t — час.

Питому густину гістерезисного тепла, що виникає внаслідок перемагнічування, після усереднення за періодом коливань електромагнітної хвилі $T = 1/\nu$ зобразимо [3,4] у вигляді

$$Q = v \oint \vec{H} \cdot d\vec{B} = v \int_0^T \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt. \quad (2)$$

Крапкою між величинами позначено скалярний добуток векторів. Гістерезисну залежність між індукцією $\vec{B}$ і напруженістю $\vec{H}$ магнітного поля будемо таким чином. Прийmemo, що ці вектори паралельні, тобто

$$\vec{B} = B(H) \vec{e}_H, \quad (3)$$

де $\vec{e}_H = \frac{\vec{H}}{H}$ — одиничний орт у напрямі вектора $\vec{H}$; H і B — проєкції векторів $\vec{H}$ і $\vec{B}$ на додатний напрям вектора $\vec{H}$. Зауважимо, що в такому наближенні виконується співвідношення $\vec{H} \cdot \vec{B} = HB$ і формула (2) також справедлива відповідно для проєкцій розглядуваних величин.

Нелінійну залежність $B = B(H)$ описуватимемо динамічною петлею гістерезису. Аналітичний вираз такої петлі при періодичній у часі напруженості магнітного поля можна записати таким чином [3]:

$$B = \mu_0 \left(\sqrt{1 - \chi^2} H - \frac{\chi}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \beta \arctg \alpha \left(\sqrt{1 - \chi^2} H - \frac{\chi}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t} \right), \quad (4)$$

де $\beta = \frac{2}{\pi} B_S$; $\alpha = (\mu - 1)\mu_0/\beta$; $\chi = H_c/H_m$ при $H < H_m$ і $\chi = H_c/H_0$ при $H > H_m$; H_c — коерцитивна сила; H_m — напруженість магнітного поля, що відповідає гістерезисному насиченню; μ_0 — магнітна стала; μ — початкова відносна магнітна проникність матеріалу; B_S — величина індукції насичення. У випадку $\chi = 0$ співвідношення (4) описує основну криву намагнічування, що апроксимує залежність для магнітом'яких матеріалів [2], у яких відсутнє гістерезисне тепло.

Підставляючи залежність (4) у формулу (2) і враховуючи при цьому співвідношення (1) і (3), вираз для тепловиділення зображаємо як

$$Q = 2\pi v^2 H_0^2 \left[I_1 + (\mu - 1) I_2 \right]. \quad (5)$$

Тут

$$I_1 = \int_0^T dt \cos \omega t \left(\chi \cos \omega t - \sqrt{1 - \chi^2} \sin \omega t \right); \quad (6)$$

$$I_2 = \int_0^T \frac{dt \cos \omega t \left(\chi \cos \omega t - \sqrt{1 - \chi^2} \sin \omega t \right)}{1 + \varepsilon \left(\sqrt{1 - \chi^2} \cos \omega t + \chi \sin \omega t \right)^2}, \quad (7)$$

$\varepsilon = \sqrt{\alpha H_0}$ — параметр нелінійності [2].

Зауважимо, що інтеграл I_1 обчислюється елементарно і дорівнює

$$I_1 = \frac{1}{2} T \chi. \quad (8)$$

Для знаходження другого інтеграла I_2 скористаємося методикою обчислення означених інтегралів за допомогою лишків. Для цього зробимо заміну змінної інтегрування, увівши комплексну змінну z , зв'язану зі змінною t співвідношенням $z = e^{i \omega t}$. При зміні t від 0 до T комплексна змінна пробігає замкнутий контур — коло $|z| = 1$ в додатному напрямку. Таким чином, інтеграл (7) переходить в інтеграл по замкнутому контуру від функції комплексної змінної:

$$I_2 = \frac{k}{\varepsilon \omega} \oint_{|z|=1} \frac{dz \left[z^4 - (k^2 - 1) z^2 - k^2 \right]}{z \left[z^4 + \frac{2(\varepsilon + 2)}{\varepsilon} k^2 z^2 + k^4 \right]}, \quad (9)$$

де $k \equiv \sqrt{1 - \chi^2} + i \chi$.

Особливими точками підінтегральної функції є нулі знаменника:

$$z_0 = 0, \quad z_1 = \frac{ik}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon + 2 - 2\sqrt{\varepsilon + 1}}, \quad z_2 = -z_1, \quad z_3 = -\frac{k^2}{z_1} \quad \text{і}$$

$$z_4 = \frac{k^2}{z_1}, \quad \text{які є полюсами першого порядку. Оскільки } |z_1| < 1, \text{ то}$$

точки z_0, z_1 і z_2 лежать всередині круга $|z| = 1$. Розклавши підінтегральну функцію на прості множники, а також скориставшись основною теоремою теорії лишків [6], отримаємо у кінцевому результаті для I_2

$$I_2 = \frac{T\chi}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}. \quad (10)$$

Підставивши формули (8) і (10) у співвідношення (5), матимемо вираз для гістерезисного тепла:

$$Q = \pi \nu \mu_0 H_0^2 \chi \left[1 + \frac{2(\mu - 1)}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}} \right]. \quad (11)$$

Якщо величина магнітного поля є меншою за характерну для феромагнітних тіл, тобто $H_0 < H_S = B_S / \mu_0 \approx 10^6 \text{ А / м}$, то в залежності (4) нехтуємо першим членом порівняно з другим [1,4,5]. Враховуючи співвідношення (1), залежність (4) для даного наближення подаємо у вигляді

$$b \cong \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}} \arctg \sqrt{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \chi^2} \cos \omega t + \chi \sin \omega t \right), \quad (12)$$

де $b = B / \mu_0 H_0$ — безрозмірна індукція магнітного поля.

У такому наближенні у формулі (11) для тепловиділень аналогічно знехтуємо одиницею порівняно з другим членом. Тоді з виразу (11) отримаємо для відносного гістерезисного тепла співвідношення

$$q = \frac{Q}{2 \pi \nu \mu \mu_0 H_0^2} = \frac{\chi}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}. \quad (13)$$

Аналіз числових досліджень виконано для сплаву ЮДНК 4, для якого $H_c = 0,55 \cdot 10^5 \text{ А / м}$, $H_m = 2,4 \cdot 10^5 \text{ А / м}$, $B_r = 1,2 \text{ Тл}$, $\mu = 151$, $B_S = 1,4 \text{ Тл}$.

Рис. 1 ілюструє залежність індукції від напруженості магнітного поля, яка описана формулою (12), для значень $H_0 = 10^3 \text{ А / м}$, $H_0 = 10^5 \text{ А / м}$, $H_0 = 10^7 \text{ А / м}$ (відповідно криві 1-3); рис. 2 — залежність гістерезисного тепла q від амплітуди магнітного поля на поверхні H_0 .

Аналіз отриманих результатів свідчить, що зі збільшенням H_0 до величини H_m ширина петлі гістерезису є постійною, а відносні тепловиділення q майже не залежать від H_0 . При $H_0 > H_m$ ширина петлі зменшується обернено пропорційно до H_0 , а величина q — за законом $1 / \sqrt{H_0}$.

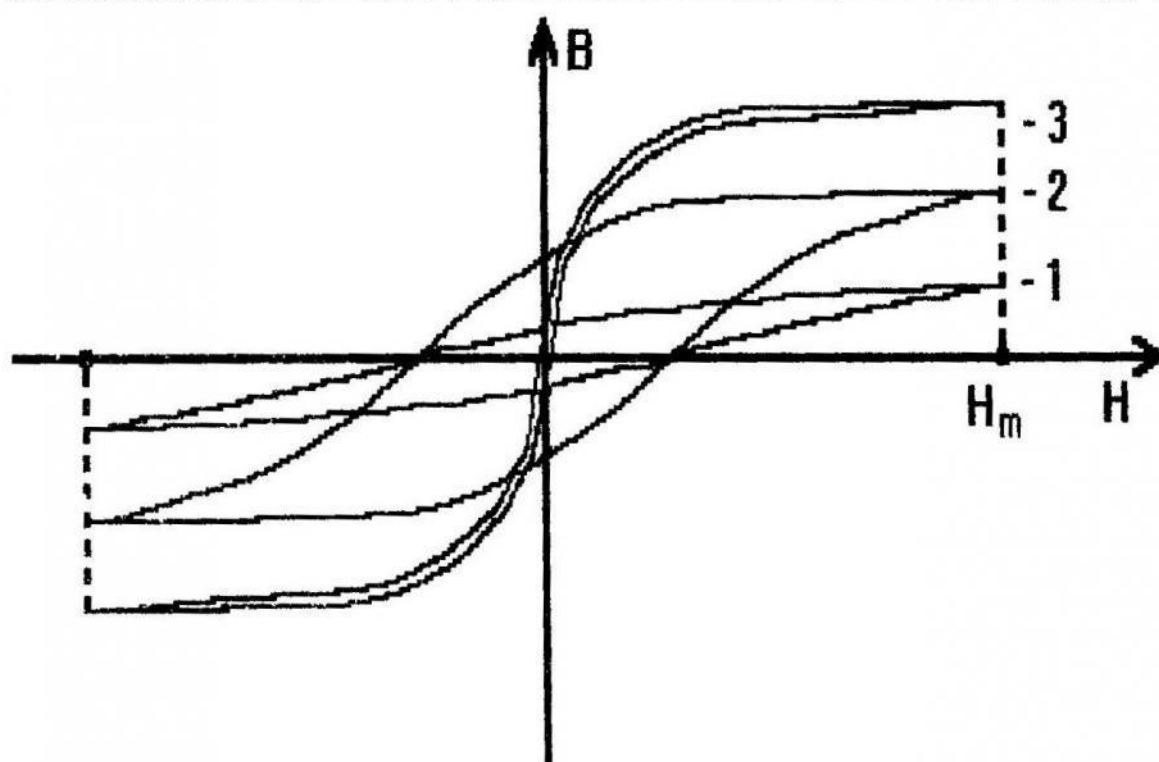


Рис. 1

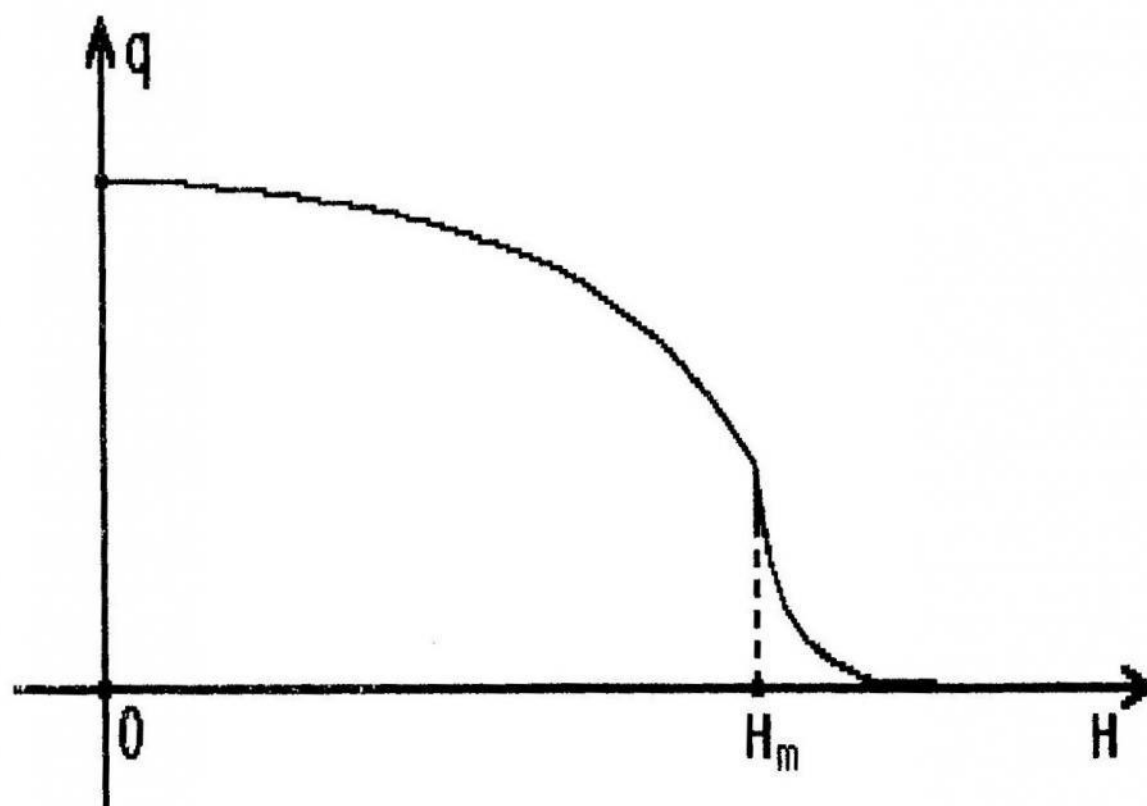


Рис. 2

1. Боровик Е. С., Мильнер А. С., Еременко В. В. Лекции по магнетизму. Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1972. 248 с. 2. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т. Термопружність електропровідних магнітом'яких тіл у зовнішніх усталених електромагнітних полях // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1987. № 2. С. 43-47. 3. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т. Термопружність електропровідних магнітотвердих тіл у зовнішніх усталених електромагнітних полях // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1988. № 5. С. 25-28. 4. Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т. Термомеханическое поведение слоя при воздействии гармонического электромагнитного поля // Прикл. механика. 1989. Т. 25, № 12. С. 93-101. 5. Мишин Д. Д. Магнитные материалы. М.: Высш. шк., 1981. 335 с. 6. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1967. - 304 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.02.96

УДК 519.6:539.3

І.І.Дияк

Симетрична скінченно-гранично-елементна апроксимація D-адаптивної моделі теорії пружності

У роботах [4,5,6] для дослідження пружно-деформованого стану просторових конструкцій запропоновано D-адаптивні моделі теорії пружності. Чисельне дослідження таких моделей проведено на основі застосування методу скінченних елементів (МСЕ) [6] та комбінованої скінченно-гранично-елементної апроксимації [5]. Застосування методу Гальоркіна до розв'язання задачі теорії пружності на основі прямого методу граничних елементів (ПМГЕ) у формі [1,5,11] приводить до несиметричної матриці результуючої системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Вперше варіант симетричного об'єднання МСЕ та ПМГЕ був запропонований у роботі [7]. В останні роки симетричний варіант МГЕ, який вимагає використання граничних інтегральних рівнянь з гіперсингулярними ядрами — об'єкт широкого кола досліджень як теоретичних, так і практичних застосувань [9,10,12,13].

Розглядається змішана крайова задача теорії пружності [2]:

$$\Delta^* u = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$