1. Боровик Е. С., Мильнер А. С., Еременко В .В. Лекции по магнетизму. Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1972. 248 с. 2. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т. Термопружність електропровідних магнітом`яких тіл у зовнішніх усталених електромагнітних полях // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1987. № 2. С. 43-47. 3. Бурак Я.Й., Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т. Термопружність електропровідних магнітотвердих тіл у зовнішніх усталених електромагнітних полях // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1988. № 5. С. 25-28. 4. Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т. Термомеханическое поведение слоя при воздействии гармонического електромагнитного поля // Прикл. механика. 1989. Т. 25, № 12. С. 93-101. 5. Мишин Д .Д. Магнитные материалы. М.: Высш. шк., 1981. 335 с. 6. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1967. - 304 с.

*Стаття надійшла до редколегії 27.02.96*

УДК 519.6:539.3

*І.І.Дияк*

# Симетрична скінченно-гранично-елементна апроксимація D-адаптивної моделі теорії пружності

У роботах [4,5,6] для дослідження пружно-деформованого стану просторових конструкцій запропоновано D-адаптивні моделі теорії пружності. Чисельне дослідження таких моделей проведено на основі застосування методу скінченних елементів (МСЕ) [6] та комбінованої скінченно-гранично-елементної апроксимації [5]. Застосування методу Гальоркіна до розв'язання задачі теорії пружності на основі прямого методу граничних елементів (ПМГЕ) у формі [1,5,11] приводить до несиметричної матриці результуючої системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Вперше варіант симетричного об'єднання МСЕ та ПМГЕ був запропонований у роботі [7]. В останні роки симетричний варіант МГЕ, який вимагає використання граничних інтегральних рівнянь з гіперсингулярними ядрами — об'єкт широкого кола досліджень як теоретичних, так і практичних застосувань [9,10,12,13].

Розглядається змішана крайова задача теорії пружності [2]:

$$\Delta^{*}\mathbf{u} = \mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)grad(div\mathbf{u}) = 0, \qquad \mathbf{x}\in\Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}[\mathbf{n}] = \lambda(div\mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \mu\mathbf{n} \times rot\mathbf{u} = \mathbf{h}, \ \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D. \quad (3)$$

Тут $\Delta$ — Лапласіан, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ — вектор переміщень, $\mathbf{n}$ — вектор зовнішньої одиничної нормалі на $\partial\Omega$, $\lambda$, $\mu$ — константи Ляме матеріалу. Вектори $\mathbf{h}, \mathbf{g}$ — задані граничні напруження та переміщення на Неймановій $\Gamma_N$ та Діріхле $\Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_N$ частинах границі області відповідно.

Нехай $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Gamma_c = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, де $\Omega_2$ — область вигляду

$$\Omega_2 = \left\{\alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1^0 \le \alpha_1 \le \alpha_1^e, \ -h/2 \le \alpha_2 \le h/2\right\};$$

тут $h$ — значно менше, ніж інший характерний розмір цієї області. Згідно з [4] можна розділити задачу (1)-(3) на систему двох крайових задач з умовами спряження на спільній границі $\Gamma_c$ [5,6]. Це складає так звану D-адаптивну модель задачі (1)-(3).

Припустимо тепер, що $\Omega_1 = \Omega_B$, а $\Omega_2 = \Omega_F$, тобто вважаємо, що $\Omega = \Omega_B \cup \Omega_F \cup \Gamma_c$; тут $\Omega_B$ — область гранично-елементної апроксимації розв'язку; $\Omega_F$ — область скінченно-елементної апроксимації розв'язку. Далі для спрощення викладок вважатимемо, що $\Gamma_N \cap \partial\Omega_B = 0$.

Згідно з фундаментальними концепціями СЕ та ГЕ аналізу, гібридна процедура базується на варіаційному формулюванні. У даній роботі використаємо симетричний варіант ПМГЕ [7,9,12]. Фундаментальні розв'язки (1), як відомо [2], можна подати у вигляді

$$\Gamma_{ij} = -\frac{\lambda + 3\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)\mu}\left[\delta_{ij}\ln r - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} r_{,i} r_{,j}\right], \ j = 1,2 \quad (4)$$

де $r = |y - x|$. Тоді значення переміщень для $\mathbf{x} \in \Omega_B$ знаходяться з

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{t}(y)\Gamma(y,x)dS_y - \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{u}(y)T_y[\Gamma(y,x)]dS_y \quad (5)$$

Визначимо граничні інтегральні оператори [7]:

$$(\mathbf{Vt})(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{t}(y)\Gamma(y,x)dS_y\,,$$

$$(\mathbf{Ku})(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{u}(x)\mathbf{T_y}\left[\Gamma(y,x)\right]dS_y\,,$$

$$(\mathbf{K}'\mathbf{t})(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{t}(y)\mathbf{T_x}\left[\Gamma(y,x)\right]dS_y\,,$$

$$(\mathbf{Dt})(\mathbf{x}) = -\mathbf{T_x}\left[\int_{\partial\Omega_B} \mathbf{u}(x)\mathbf{T_y}\left[\Gamma(y,x)\right]dS_y\right];$$

тут оператор $\mathbf{V}$ — потенціал простого шару, $\mathbf{K}$ — потенціал подвійного шару, $\mathbf{K}'$ — спряжений до потенціалу подвійного шару (в обох останніх операторах інтеграли розуміємо в сенсі головного значення Коші), $\mathbf{D}$ — гіперсингулярний оператор. Далі, використовуючи проектор Кальдерона, можна записати перевизначену систему граничних інтегральних рівнянь

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}(x)\\ \mathbf{t}(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\mathbf{I}-\mathbf{K} & \mathbf{V}\\ \mathbf{D} & \frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u}(x)\\ \mathbf{t}(x)\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Граничні інтегральні оператори $\mathbf{V},\mathbf{K},\mathbf{D}$ — псевдодиференціальні оператори порядку -1, 0, 1 відповідно. Властивості цих операторів у просторах Соболєва відомі з роботи [8]. Зі співвідношень (6) можемо записати явне представлення для напружень, яке задається оператором Стєклова-Пуанкаре:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Su} = \mathbf{V}^{-1}\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}\right)\mathbf{u} = \left[\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}'\right)\mathbf{V}^{-1} + \left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}\right)\mathbf{D}\right]\mathbf{u}, \tag{7}$$

який є симетричним псевдодиференціальним оператором порядку -1, що відповідає розв'язку задачі Діріхле. Правий обернений оператор задається, як

$$\mathbf{u}-\mathbf{r} = \mathbf{Ut} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{I}+\mathbf{K}\right)^{-1}\mathbf{Vt} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{I}-\mathbf{K}\right)\dot{\mathbf{D}}^{-1}\left(\frac{1}{2}\mathbf{I}-\mathbf{K}'\right)\mathbf{t}+\mathbf{Vt} \tag{8}$$

де $\dot{\mathbf{D}}^{-1}$ означає псевдообернений до $\mathbf{D}$ по відношенню до жорстких зміщень $\mathbf{r}$. Це відображення відповідає розв'язку задачі Неймана, якщо задовільняються умови існування розв'язку задачі.

Визначимо енергетичний простір, який відповідає $\Omega_F$ [3]:

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega_F) := \left\{ v \in H^1(\Omega_F) \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_F \cap \Gamma_D \right\}$$

Простір слідів гранично-елементної області визначимо як $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_B)$, а спряжений до нього — як $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_B)$. Введемо позначення $\langle \sigma, v \rangle = \int\limits_{\partial\Omega_B} (\sigma, v) dS$, де $(\bullet,\bullet)$ — скалярний добуток у $R^2$.

Введемо підпростір

$$H_0^{-\frac{1}{2}}(\Omega_B) := \left\{ x \in \left( H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_B) \right)^2 : \int\limits_{\Omega_B} x dS = 0, \ \int\limits_{\partial\Omega_B} r x dS = 0 \right\},$$

де $r$ — радіус-вектор точки. Визначимо також добуток просторів:

$$\mathbf{U} = \left\{ (\mathbf{u_F}, \tilde{\mathbf{u}}) \in \left( H^1(\Omega_F) \right)^3 \times \left( H^{\frac{1}{2}}(\Omega_B) \right)^2, \ \mathbf{u_F} = \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{на}\, \Gamma_c \right\}$$

Тепер простір тестових функцій для області $\Omega_B$ визначається так:

$$\mathbf{V}_{\Gamma_\mathbf{D}} = \left\{ (\mathbf{v_F}, \tilde{\mathbf{v}}) \in \mathbf{U} : \mathbf{v_F} \in \left( H^1_{\Gamma_D}(\Omega_F) \right)^3, \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{w} \ \text{на}\, \partial\Omega_B, \mathbf{w} \in \left( H^1(\Omega) \right)^2, \mathbf{w}|_{\Gamma_\mathbf{D}} = 0 \right\}$$

Тоді варіаційну постановку задачі можна сформулювати:

Знайти

$$\left( (\mathbf{u_F}, \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{u_B}, \mathbf{t_B} \right) \in \mathbf{U} \times \left( H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_B) \times H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_B) \right) \tag{9}$$

з $\mathbf{u}_F = \mathbf{g}$ на $\Gamma_D \cap \partial\Omega_F$ і $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g}$ на $\Gamma_\mathrm{D} \cap \partial\Omega_B$, що задовільняють рівняння

$$a_F(\mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F) + \langle \mathbf{t}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle = f(\mathbf{v}_F), \qquad \forall (\mathbf{v_F}, \tilde{\mathbf{v}}) \in \mathbf{V}_{\Gamma_D} \tag{10}$$

та варіаційні умови спряження:

$$\langle \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_B, \tau_B \rangle = 0 \quad \forall \tau_B \in \left( H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_B) \right)^2. \tag{11}$$

Умова (9) тут розуміється так: для $\forall(\mathbf{u}_F, \widetilde{\mathbf{u}})$: $\exists\ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ така що $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ на $\Gamma_D$ для заданої $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ і $\mathbf{u}_F = \mathbf{u}$ на $\Omega_F$, $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ на $\partial\Omega_B$ .

Тут у рівнянні (10):

$$a_F(\mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F) = \int\limits_{\Omega_F} (T_{11}(\mathbf{u}_F)\varepsilon_{11}(\mathbf{v}_F) + T_{13}(\mathbf{u}_F)\varepsilon_{13}(\mathbf{v}_F) + M_{11}(\mathbf{u}_F)\kappa_{11}(\mathbf{v}_F))d\Omega,$$

$$f(\mathbf{v}_F) = \int\limits_{\Gamma_N} \mathbf{h}\mathbf{v}_F d\Gamma,$$

де $T_{11,} T_{13,} M_{11}$ – сили та момент відповідно, $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}, \kappa_{11}$ – компоненти тензора деформацій [4].

Підставивши представлення (7) та використавши (6), одержимо симетричний запис другого доданка (10)

$$\langle \mathbf{t}_B, \widetilde{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{S}\mathbf{u}_B, \widetilde{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{D}\mathbf{u}_B, \widetilde{\mathbf{v}} \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{t}_B, \widetilde{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{t}_B, \mathbf{K}\widetilde{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{V}\mathbf{t}_B, \tau \rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\langle \mathbf{u}_B, \tau \rangle - \langle \mathbf{K}\mathbf{u}_B, \tau \rangle.$$

Аналогічно до [9] можна показати, що білінійна форма у (10) є неперервною та $H_{\Gamma_B} \times H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_B)$ — еліптичною.

1. Дияк І.І.,Чернуха А.Ю.Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів.// Вістник Львів. ун-ту.Сер. мех.-мат. 1993. - Вип.39. с.41-46. 2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. - Гос. из-тво "Физ.-мат. литер." -М., 1963, 472 с. 3. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. - М.: Наука, 1985-590с. 4. Савула Я.Г. Краевые и вариационные задачи для одной комбинированной математической модели теории упругости.// Математ. методы и физ.-мех.поля.1990, вып.32, с.92-95. 5. Савула Я.Г., Дияк І.І., Паук Н.М. Гранично-скінченно-елементний аналіз комбінованих моделей двовимірної задачі теорії пружності.// Доповіді НАН України, 1995, N5. - с.49-52. 6. СавулаЯ.Г., Дыяк И.И., ДубовикА.В. Применение комбинированной модели для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций. // Прикладная механика, т.25, №9, 1989, с.62-65. 7. Costabel M. Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements.// Boundary Elements IX, C.A.Brebbia. (Eds). Vol.1, Berlin, 1987, pp.411-420. 8. Costabel M. Boundary integral operators on lipschitz

domains: Elementary results.//SIAM J.Math.Anal.,Vol.19(6), 1988, pp.613-626. **9.** Hsiao G.C., Schnack E., Wendland W.L. A Hybrid Coupled Finite-Boundary Elementt Method. - Preprint 95-11, Universitat Stuttgart. Math. Institut A. 1995.-35p. **10.** Holzer S.M. The symmetric Galerkin BEM for plane elasticity: scope and applications.// Proc. of the First European Conf. on Num. Meth. in Eng.1992, - pp.383-391. **11.** Parreira P.,Guiggiani M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method. //Comput. and Struct., 1989,33,№ 1, pp.269-279. **12.** Sirtori S., Maier G., Novati G., Miccoli S. A Galerkin symmetric boundary-element method in elasticity: formulation and implementation.// Int. J. Num. Meth. Eng.,1992, Vol.35, No.2, pp. 255-282. **13.** Steinbach O.,Wendland W.L. Efficient Preconditioners for Boundary Element Methods and their Use in Domain Decomposition Methods.-Bericht Nr.95-19, 18p.

*Стаття надійшда до редколегії 06.03.96.*

УДК 539.3:519.6

*О.М. Томашевський*

# Моделювання теплофізичних процесів виготовлення литих зубних протезів

Як відомо, заливка металу в процесі отримання зубних протезів проводиться в попередньо підігріту форму[2]. Необхідність підігріву форми зумовлена тим, що характерні товщини отримуваних виробів дуже малі (0,2-0,3 мм), а їх конфігурації складні. У зв'язку з цим важливо досягнути швидкої і повної заповнюваності форми, а також забезпечити виконання умов, при яких кристалізація металу в кожній частині виробу відбувається в однакових умовах.

Для отримання зубних протезів використовуються спеціальні кювети, котрі мають форму металевого циліндра, заповненого вогнетривкою формувальною сумішшю. Для вибору раціонального режиму одержання відливу спочатку необхідно знати закономірності охолодження кювети. Тому визначення розподілу температури в ній у довільний момент часу є актуальною задачею.

Детальна інформація про розподіл температури в кюветі дає можливість: