

domains: Elementary results.//SIAM J.Math.Anal.,Vol.19(6), 1988, pp.613-626. 9. Hsiao G.C., Schnack E., Wendland W.L. A Hybrid Coupled Finite-Boundary Elementt Method. - Preprint 95-11, Universitat Stuttgart. Math. Institut A. 1995.- 35p. 10. Holzer S.M. The symmetric Galerkin BEM for plane elasticity: scope and applications.// Proc. of the First European Conf. on Num. Meth. in Eng.1992, - pp.383-391. 11. Parreira P.,Guiggiani M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method. //Comput. and Struct., 1989,33,№ 1, pp.269-279. 12. Sirtori S., Maier G., Novati G., Miccoli S. A Galerkin symmetric boundary-element method in elasticity: formulation and implementation.// Int. J. Num. Meth. Eng.,1992, Vol.35, No.2, pp. 255-282. 13. Steinbach O.,Wendland W.L. Efficient Preconditioners for Boundary Element Methods and their Use in Domain Decomposition Methods.-Bericht Nr.95-19, 18p.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.96.

УДК 539.3:519.6

О.М. Томашевський

Моделювання теплофізичних процесів виготовлення литих зубних протезів

Як відомо, заливка металу в процесі отримання зубних протезів проводиться в попередньо підігріту форму[2]. Необхідність підігріву форми зумовлена тим, що характерні товщини отримуваних виробів дуже малі (0,2-0,3 мм), а їх конфігурації складні. У зв'язку з цим важливо досягнути швидкої і повної заповнюваності форми, а також забезпечити виконання умов, при яких кристалізація металу в кожній частині виробу відбувається в однакових умовах.

Для отримання зубних протезів використовуються спеціальні кювети, котрі мають форму металевого циліндра, заповненого вогнетривкою формувальною сумішшю. Для вибору раціонального режиму одержання відливу спочатку необхідно знати закономірності охолодження кювети. Тому визначення розподілу температури в ній у довільний момент часу є актуальною задачею.

Детальна інформація про розподіл температури в кюветі дає можливість:

- по-перше, при заданому розташуванні виробів, котрі відливатимуться у кюветі, визначити гранично допустимий проміжок часу, протягом якого кювета може знаходитися поза нагрівачим пристроєм за умови, що температура в місці заливки не буде нижчою гранично допустимого значення 750°C (температури, при якій відбувається швидка кристалізація відливки, що перешкоджає заповненню форми);
- по-друге, при заданій тривалості перебування форми поза нагрівачим пристроєм можна визначити місцезнаходження порожнини для заливки, що забезпечує отримання якісного виробу;
- по-третє, інформація про температурне поле дозволяє визначити область в кюветі, найбільш сприятливу з точки зору теплових режимів, і область у кюветі з мінімальною швидкістю охолодження.

При моделюванні процесу охолодження кювети враховується реальність розмірів, форма, фізичні властивості матеріалу оболонки і формувальної суміші. Вважається, що охолодження кювети на повітрі відбувається за рахунок теплообміну за законом Ньютона (при температурі підігріву $900 - 1000^{\circ}\text{C}$ променеві втрати досить незначні). При цьому коефіцієнт теплообміну вибирається однаковим як для поверхні оболонки, так і для поверхні формувальної суміші.

1. Постановка задачі. Нехай кювета займає область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, утворену шляхом обертання профілю W (рис.1) навколо осі Oz . W_1 — частина профілю, обертання якого утворює область, котру займає оболонка, а W_2 — формувальна суміш. Нехай $\Gamma = \partial W_2$ — твірна поверхні, через яку відбувається охолодження кювети.

Задача визначення температурного поля кювети в довільний момент часу в процесі її охолодження від початкової температури T_0 за рахунок конвективного теплообміну за законом Ньютона з довкіллям, температура якого T_c , з урахуванням осесиметричності геометричної конфігурації кювети та умов її охолодження зводиться до знаходження розв'язку початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad x \in W \quad (1)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_c), \quad x \in \Gamma \quad (2)$$

$$T(x, \tau_0) = T_0(x) \quad (3)$$

Згідно з методом Бубнова-Гальоркіна і з урахуванням формули Гріна, з (1)-(3) одержуємо слабку варіаційну форму вихідної задачі:

$$(c\rho \dot{T}, v) + a(T, v) + \langle \alpha T, v \rangle = \langle \alpha T_c, v \rangle \quad (4)$$

$$\forall v \in H_A, \tau \in (0, \tau^*]$$

$$(T, v)|_{\tau=0} = (T_0, v) \quad \forall v \in H_A \quad (5)$$

Тут позначено: $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial \tau}$, $(\cdot, \cdot)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярні добутки в

$L_2(\Omega)$ та $L_2(\Gamma)$, і прийнято, що $\frac{\partial T}{\partial \tau} \in L_2(0, \tau^*)$.

У такій постановці змінна τ може розглядатись як параметр. Апроксимація Гальоркіна узагальненого розв'язку задачі (4)-(5) будеться у вигляді [3]

$$T_h(x, \tau) = \sum_{i=1}^N Q^i(\tau) \varphi_i(x). \quad (6)$$

Використовуючи напівдискретні апроксимації Гальоркіна, розв'язання варіаційної задачі (4)-(5) зводимо до розв'язання нелінійної задачі Коші, яка в матричному вигляді запишеться наступним чином

$$M(Q) \dot{Q}(\tau) + G(Q) Q(\tau) = F(Q, \tau) \quad (7)$$

$$Q(0) = \mathbf{r} \quad (8)$$

Тут $Q(\tau) = (Q^1(\tau), \dots, Q^N(\tau))^T$ — вектор невідомих коефіцієнтів розкладу (6). Елементи матриць M та G та компоненти векторів F і $\mathbf{r}$ наведені у [1]. Представимо вектор невідомих коефіцієнтів розкладу (6) у вигляді

$$Q(\tau) = \sum_j \psi_j(\tau) q_j, \quad (9)$$

де q_j — вузлові значення Q в момент часу τ .

Відомі різні схеми лінеаризації для нелінійних початково-крайових задач параболічного типу [5]. Тут для знаходження значень q_j застосовується проста безітераційна схема:

$$M(q_i) \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta \tau} + G(q_i) q_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}}(q_i), \quad (10)$$

$$q_0 = \mathbf{r}, \quad (11)$$

$$\text{де } F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i).$$

Таким чином, для знаходження значень температури на кожному часовому кроці потрібно розв'язати систему рівнянь (10). Пакет програм для ПЕОМ типу IBM PC/AT, у якому реалізований описаний вище підхід, дає можливість ефективного дослідження практичних задач.

2. Результати чисельних експериментів. За даною методикою одержаний розв'язок задачі про охолодження кювети, нагрітої до температури $T_0 = 950^\circ\text{C}$, за рахунок конвективного обміну з оточуючим середовищем, температура якого $T_c = 20^\circ\text{C}$.

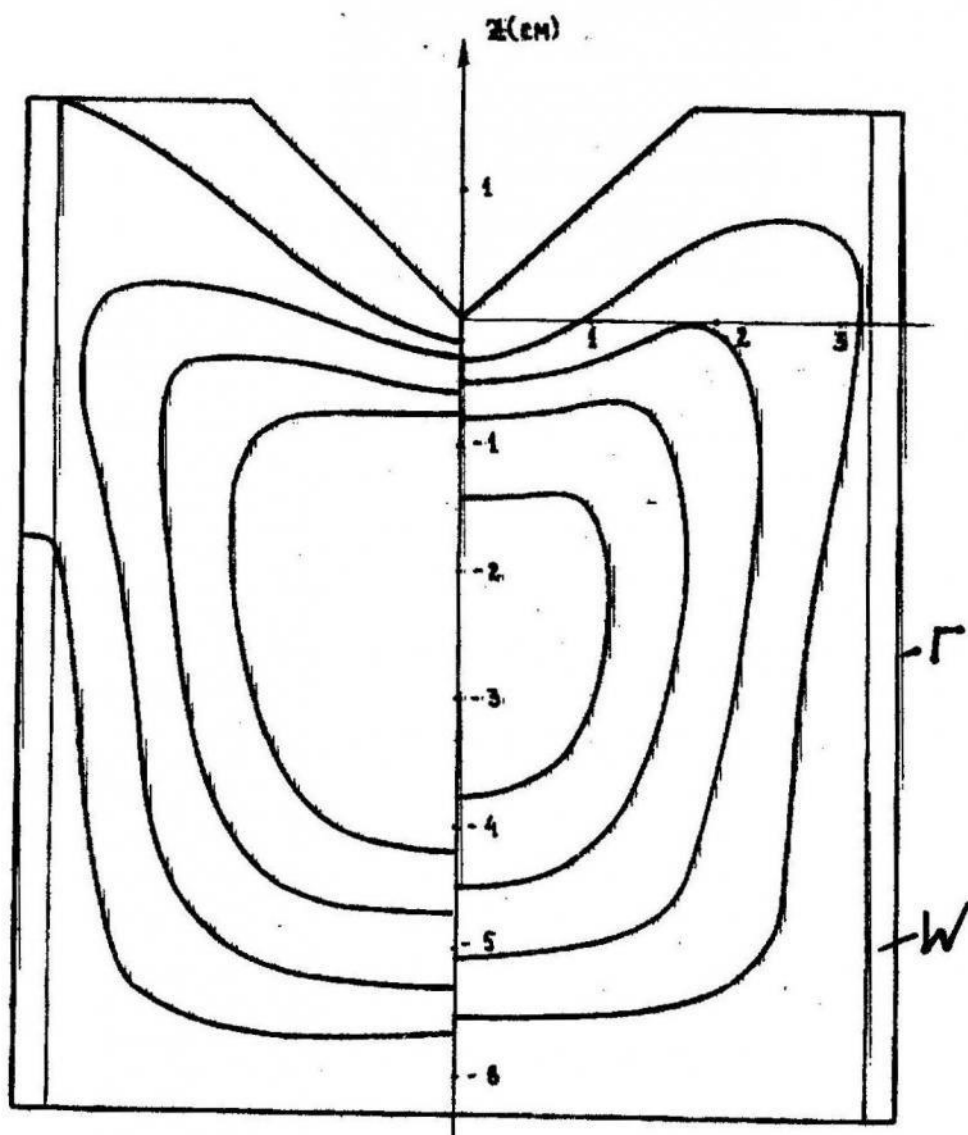


Рис. 1

При цьому вважалось, що коефіцієнт теплообміну був $162 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град}$ (у випадку руху кювети) та $72,1 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град}$ (у стані спокою); теплофізичні характеристики формувальної суміші вибиралися наступними: коефіцієнт теплопровідності — $0,326 \text{ Вт/м}\cdot\text{град}$, питома теплоємність — $0,795 \text{ кДж/кг}\cdot\text{град}$, густина — $1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, коефіцієнт теплопровідності і питома теплоємність матеріалу оболонки вважалися залежними від температури, причому $\lambda = 0,0175 \cdot t + 14$, а закон зміни питомої теплоємності матеріалу поданий на рис.2. Густина матеріалу оболонки — $8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ [4].

На рис.1 наведені ізотерми гранично допустимої температури 750°C в момент часу 2, 4, 6, 8 хв. У правій частині профілю — результати для коефіцієнта тепловіддачі $\alpha = 162 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град}$, у лівій — для $\alpha = 72,2 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град}$.

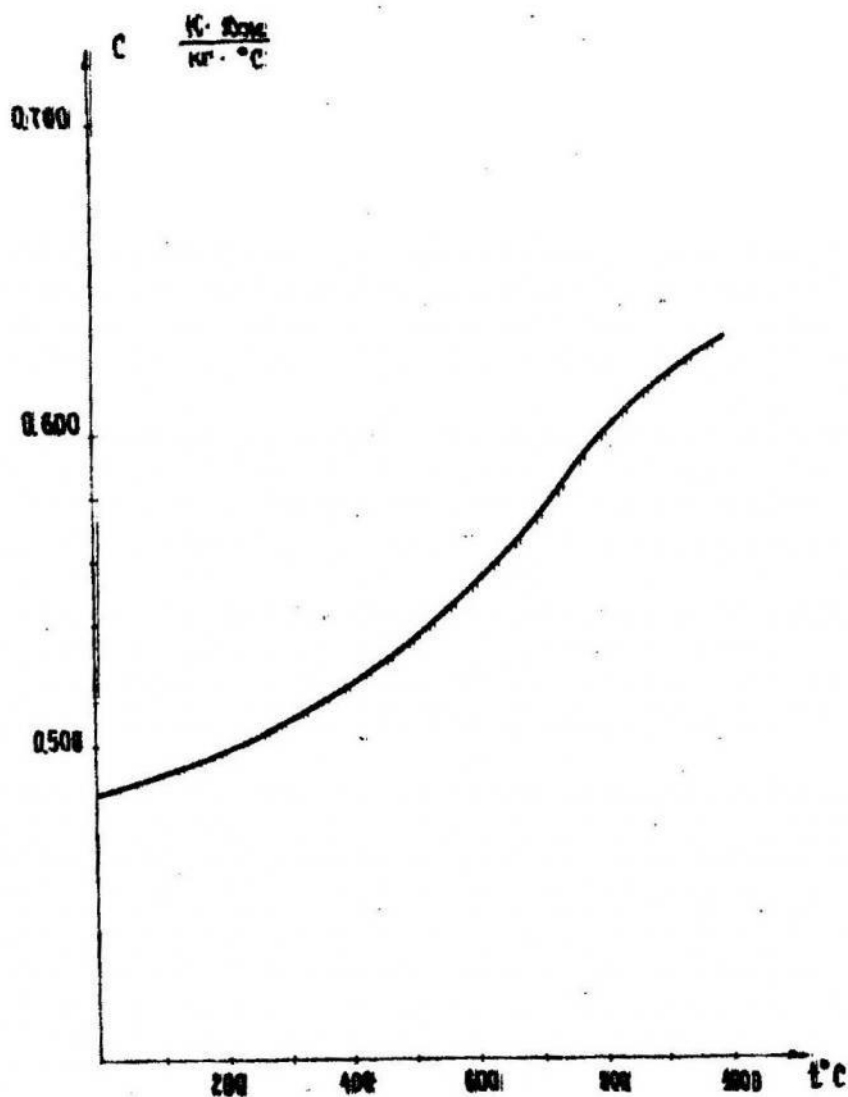


Рис. 2

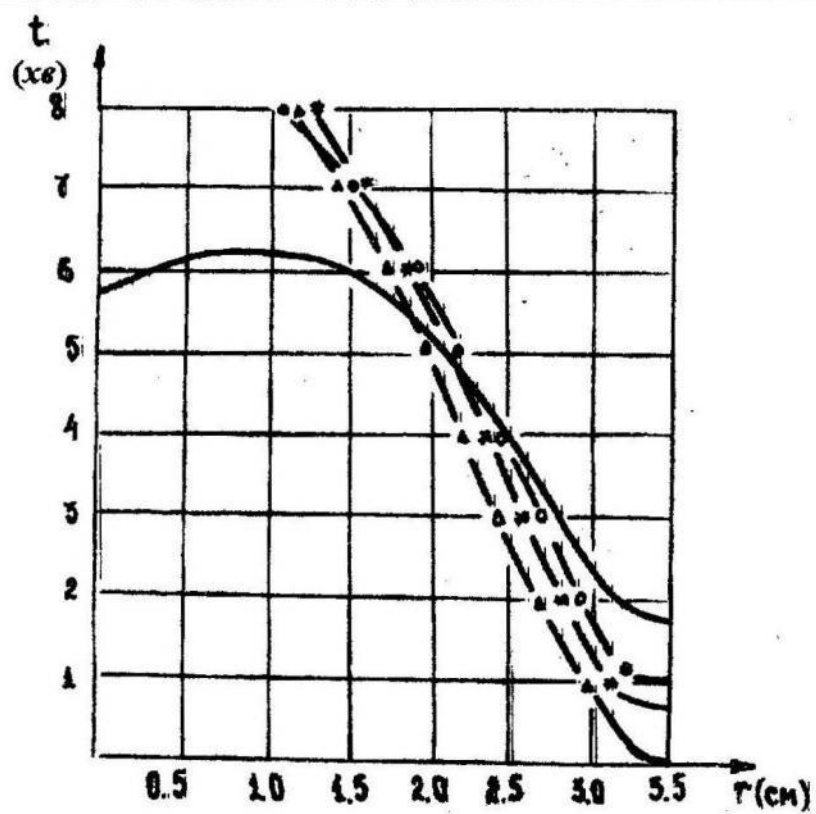


Рис. 3

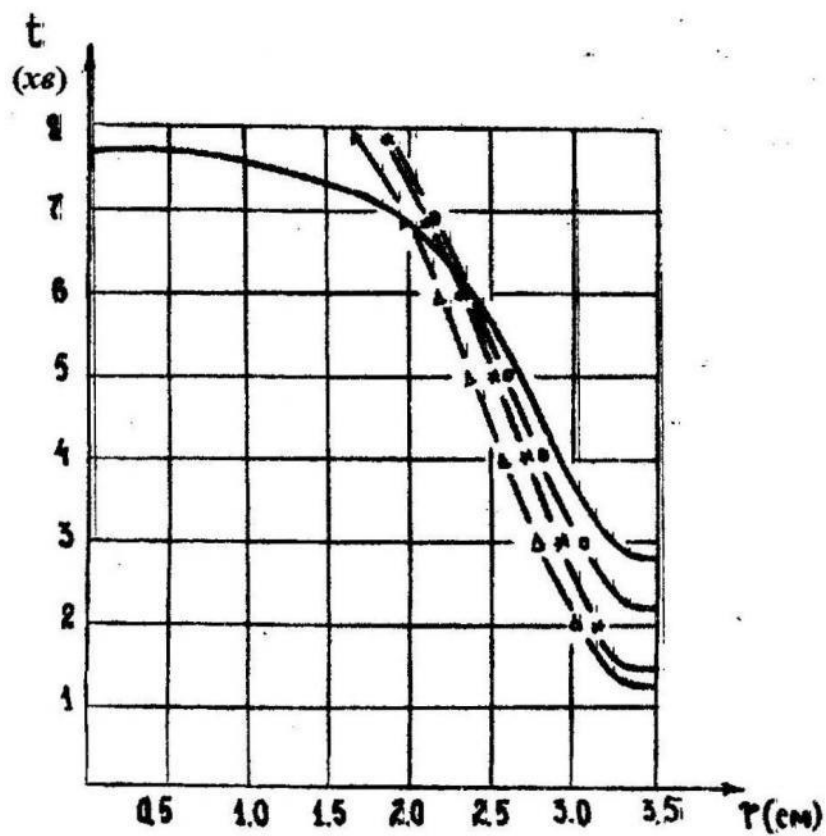


Рис. 4

На рис.3 і рис.4 наведені графіки, які ілюструють швидкість охолодження кювети в різних перетинах: $Z = -0,75$ см (суцільна лінія), $Z = -1,5$ см (лінія з кружечками), $Z = -2,25$ см (лінія з зірочками), $Z = -3$ см (лінія з трикутниками) для цих двох значень коефіцієнта тепловіддачі відповідно. Зокрема, при заданій тривалості перебування форми поза нагрівачим пристроєм можна визначити місцезнаходження порожнини для заливання, яке забезпечує отримання якісного виробу. Так, якщо геометричний профіль порожнини для заливання повторює профіль ізотерм температури, то її розташування у вертикальній площині буде забезпечувати однорідність теплових умов кристалізації. У цьому випадку розташування порожнини є виправданим з точки зору однорідності теплових умов. Однак такий збіг профілів виробу та ізотерм, які отримуються, у більшості випадків буде проблематичним. Тому більш зручним є розташування порожнини в горизонтальній площині. Тут однорідність теплових умов буде гарантована осесиметричністю температурного поля і симетричністю виробу, який відливається. При цьому для різних часових інтервалів перебування кювети поза нагрівачим пристроєм оптимальними з точки зору теплових умов можуть бути різні положення порожнини для заливки. Наприклад, якщо цей час перевищує 4,5 хв. (для рухомої кювети), оптимальним є розташування порожнини в горизонтальній площині $Z = -0,75$ см (див. рис.1). З проведених досліджень при тривалості охолодження від 4,5 хв. до 6,3 хв. оптимальною є площина $Z = -1,5$ см, а для інтервалу від 6,3 хв. до 8 хв. — $Z = -2,25$ см. Далі, якщо відомо, що максимально віддалена від осі обертання Z точка виробу, який відливається, має координату $r = 2,5$ см, то із наведених на рис.3 і рис.4 графіків можна визначити тривалість перебування кювети поза нагрівачим пристроєм. Так, для $a = 162,2$ Вт/м²·град (рис. 3) час складає 2,7 хв. (для площини $Z = -3$ см), 3,3 хв. (для $Z = -2,25$ см), 3,75 хв. (для $Z = -1,5$ см) і 3,95 хв. (для $Z = -0,75$ см).

Таким чином, проведений аналіз охолодження форми опоки з врахуванням її фізичних властивостей у залежності від температури та геометрії. На основі проведених числових досліджень стає можливим прогнозування тривалості технологічних операцій, які підвищують якість литих зубних протезів.

1. Дзяк И.И. Реализация высокоточных схем метода конечных элементов для задач нестационарной теплопроводности. // Вестник Львов. ун-та. Сер. мех.-мат, 1982, Вып.19, с.44-51.
2. Литье по выплавляемым моделям (под ред. Я.И. Шленника и В.А.Озерова). - М.: Машиностроение, 1984. - 408с.
3. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод конечных элементов. - Львов: Вища школа, 1976. - 80 с.
4. Справочник физических величин (под ред. И.К.Кикоина) - М.:Атомэнергоиздат, 1966, - 1001с.
5. Douglas G., Dupont Gr., Ewing R.S. Incomplete iteration for time stepping a Galerkin method for a quasilinear parabolic problem. - SIAM J. Num.Anal., 1979, vol.16, No.3, pp.503-522.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.96.