

ISSN 0201-758X.

ISSN 0320-6572.

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЗАДАЧІ ТА МЕТОДИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

СЕРІЯ

МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

В И П У С К

44



1996

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

**Львівський державний університет
імені Івана Франка**

**ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія механіко-математична

Виходить з 1965 р.

ВИПУСК 44

**ЗАДАЧІ
ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Львів
Видавництво «Світ»
1996

У Віснику вміщені статті з математичного моделювання, чисельних методів розв'язання рівнянь математичної фізики і задач оптимізації та програмного забезпечення ПЕОМ.

Для наукових працівників, викладачів і студентів старших курсів.

Бібліогр. у кінці статей.

Редакційна колегія: д-р фіз.-мат. наук, проф. Я.Г.Савула (відп. ред.), канд. фіз.-мат. наук, доц. Ю.М.Щербина (відп. секр.), канд. фіз.-мат. наук, доц. М.Я.Бартіш, д-р фіз.-мат. наук, проф. М.М.Войтович, д-р фіз.-мат. наук, проф. Г.Г.Цегелик, д-р фіз.-мат. наук, проф. Г.А.Шинкаренко.

Відповідальний за випуск доц. Ю.М.Щербина.

Адреса редколегії:
290602 Львів, вул Університетська, 1
Університет, кафедра теорії оптимальних процесів
Тел: 79-47-91

В 1602110000 - 009
225 - 96

Замовне

© Львівський державний
університет, 1996

Я.Г. Савула, В.В. Кревс

Про застосування методу декомпозиції області до задачі теплопровідності для тіла з тонким покриттям

Проблеми математичного моделювання процесу розподілу тепла у середовищах з тонкими включеннями або покриттями розглядались багатьма дослідниками [1,2,4-6]. У даній праці пропонується комбінація методу декомпозиції області (МДО) [3,7] та методу скінченних елементів (МСЕ) [3-5,8] для побудови розв'язку даної задачі з максимальним використанням специфічної структури математичної моделі. Важливою особливістю МДО є зручність реалізації МДО на масивно-паралельних комп'ютерах.

Тіло з тонким покриттям. Розглянемо задачу теплопровідності для тіла з тонким покриттям (рис. 1):

$$\Omega = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in D \subset R^2, -h \leq \alpha_3 \leq h \right\},$$

яке описується криволінійною системою координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

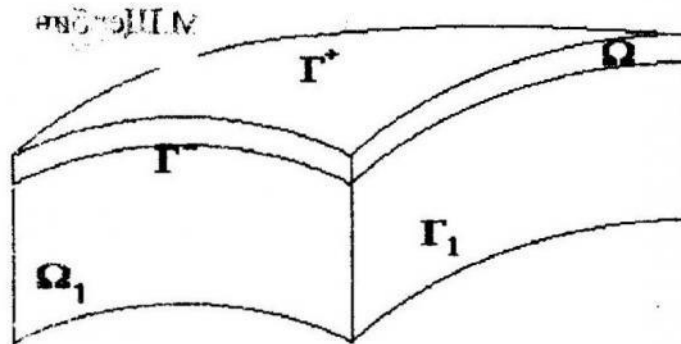


Рис. 1

Стационарний розподіл температури в областях Ω_1 та Ω описується системою диференціальних рівнянь [4,5]

$$\begin{cases} L_1 T_1 = q_1, & (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_1, \\ Lt = \tilde{q}, & (\alpha_1, \alpha_2) \in D, \end{cases} \quad (1.1)$$

де

$$\begin{aligned}
L_1 = & \left[\frac{2h}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\lambda \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{2h}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\lambda \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{2}{3} \frac{h^3}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\lambda \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{h} (k_2 - k_1) \frac{\partial t_2}{\partial \alpha_1} \right) \right] \\
& \left[\frac{2h}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\lambda \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial t_2}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{2h}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\lambda \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial t_2}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{2}{3} \frac{h^2}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\lambda \frac{A_2}{A_1} (k_2 - k_1) \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} \right) \right] \\
& + \left[\frac{2}{3} \frac{h^3}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\lambda \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{h} (k_1 - k_2) \frac{\partial t_2}{\partial \alpha_2} - k_1 k_2 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_2} \right) \right) + \frac{2}{3} \frac{h^3}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\lambda \frac{A_2}{A_1} k_1 k_2 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} \right) \right] \\
& + \left[\frac{2}{3} \frac{h^2}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\lambda \frac{A_1}{A_2} (k_1 - k_2) \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_2} \right) \right] + \frac{2}{3} h \lambda k_1 k_2 t_2
\end{aligned}$$

$$L_1 T_1 = -\nabla(\lambda_1 \nabla T_1), \quad t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} 2hq - (1 + hk_1)(1 + hk_2)q_n^+ - (1 - hk_1)(1 - hk_2)q_n^- \\ -(1 + hk_1)(1 + hk_2)q_n^+ + (1 - hk_1)(1 - hk_2)q_n^- \end{bmatrix},$$

у яких здійснена підстановка

$$q_n^+ = a^+ (t_1 + t_2 - T_c^+) \text{ на } \Gamma^+, \quad (1.2)$$

де a^+ — коефіцієнт теплообміну на Γ^+ ; T_c^+ — температура зовнішнього середовища на Γ^+ .

Система зв'язаних диференціальних рівнянь (1.1) розв'язується за таких граничних умов:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} = a_1 (T_1 - T_c) \text{ на } \Gamma_1; \quad (1.3)$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = a(t - t_c) \text{ на } \Gamma = \partial D, \quad (1.4)$$

де $t_c = [t_1^c, t_2^c]^T$, $t_1^c = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_c d\alpha_3$, $t_2^c = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h T_c \alpha_3 d\alpha_3$; n_1, n —

зовнішні стосовно Ω_1, Ω нормалі до $\Gamma_1, \partial D$; T_c — температура зовнішнього середовища;

а також умов спряження

$$T_1 = t_1 - t_2, \quad q_n^- = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \text{ на } \Gamma^-, \quad (1.5)$$

де n_1 — зовнішня стосовно Ω_1 нормаль до Γ^- .

Метод декомпозиції області. Розглянемо застосування МДО для чисельного аналізу математичної моделі (1.1)-(1.5). Нехай $t^0 \in W_2^1(D) \times W_2^1(D)$ — початкове наближення, $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ — послідовність додатних параметрів релаксації, які забезпечують та прискорюють збіжність. Тоді МДО реалізується ітераційним процесом.

Ітерація k ($k \geq 1$): розв'язуємо задачі

$$\begin{cases} L_1 T_1^{k+1} = q_1 \text{ в } \Omega_1, \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1^{k+1}}{\partial n_1} = a_1 (T_1^{k+1} - T_c) \text{ на } \Gamma_1, \\ T_1^{k+1} = t_1^k - t_2^k \text{ на } \Gamma^-, \\ \begin{cases} L t^{k+1/2} = \tilde{q} \text{ в } D, \\ -\lambda \frac{\partial t^{k+1/2}}{\partial n} = a (t^{k+1/2} - t^c) \text{ на } \partial D, \\ (q_n^+)^{k+1/2} = t_1^{k+1/2} + t_2^{k+1/2} - T_c^+ \text{ на } \Gamma^+, \\ (q_n^-)^{k+1/2} = \lambda_1 \frac{\partial T_1^{k+1}}{\partial n_1} \text{ на } \Gamma^-; \end{cases} \end{cases} \quad (2.1)$$

обчислюємо $t^{k+1} = t^k + \beta_k (t^{k+1/2} - t^k)$ в $\overline{D}$.

Ітераційний процес завершується, якщо виконується умова

$$\|T_1^{k+1} - T_1^k\|_1 + \|t^{k+1} - t^k\|_2 < \varepsilon \left(\|T_1^k\|_1 + \|t^k\|_2 \right), \quad (2.2)$$

де $\|\cdot\|_i$ — норми у відповідних просторах.

У працях [3, 7] показано, що для збіжності МДО достатньо, щоб оператори L_1, L задачі (1.1)-(1.5) були симетричними та додатно визначеними, а області Ω_1, Ω — однозв'язними областями з ліпшицевими границями. Властивості операторів задачі (1.1)-(1.5) характеризуються лемою та теоремою [5].

Лема. Диференціальні оператори за просторовими змінними задачі (1.1)-(1.5) з однорідними граничними умовами є симетричними.

Теорема. Якщо серединна поверхня шару є гладкою поверхнею без особливих точок, $A_i > 0, i = 1, 2$, області Ω_1, Ω — однозв'язними

областями з ліпшицевими границями, а в області $\bar{D}$ виконується нерівність $3 - h^2 k_1 k_2 > 0$, то оператори L_1, L задачі (1.1)-(1.5) є додатно визначеними.

З огляду на це застосування МДО обґрунтоване, і для розв'язання підзадач в Ω_1, Ω можна ефективно використати МСЕ.

Питання вибору параметрів релаксації $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ важливе, оскільки обґрунтований вибір $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ може істотно зменшити кількість ітерацій МДО, що необхідне для досягнення заданої точності. У [3] показано, що оптимальне значення $\beta_k < 1$ та дорівнює

$$\beta_k = 2 / (m + M), \quad (2.3)$$

де $m \leq \frac{\|T_1\|_{E_1}}{\|t\|_{E_2}} + 1 \leq M, \forall g \in L^2(\Gamma^-)$, де $\|\cdot\|_{E_i}, i=1,2$ — енергетичні

норми у відповідних просторах; T_1, t — квазі-гармонійні функції, що є розв'язками таких задач:

$$\begin{cases} L_1 T^1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \\ -\lambda_1 \frac{\partial T^1}{\partial n_1} = a_1 T^1 \text{ на } \Gamma_1, \\ T_1^1 = g \text{ на } \Gamma^-, \end{cases} \quad \begin{cases} Lt = 0 \text{ в } D, \\ -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = at \text{ на } \partial D, \\ (q_n^+) = t_1 + t_2 \text{ на } \Gamma^+, \\ t_1 - t_2 = g \text{ на } \Gamma^-. \end{cases} \quad (2.4)$$

Зважаючи на це, бажано записати ітераційний процес (2.1)-(2.2) так, щоб на кожній ітерації можна було адаптивно обчислювати β_k , що є близькими до оптимального значення. Запропонуємо одну можливу схему МДО з адаптивним вибором параметрів релаксації β_k , яка виявилась досить ефективною порівняно зі схемою МДО з оптимальним значенням параметра релаксації β_k та зі схемою МДО, що запропонована у праці [7]. Нехай β_0 — початкове значення параметра релаксації. Подамо алгоритм у такому вигляді.

Ініціалізація алгоритму: розв'язуємо задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 T_1^1 = q_1 \text{ в } \Omega_1, \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1^1}{\partial n_1} = a_1 (T_1^1 - T_c) \text{ на } \Gamma_1, \\ T_1^1 = t_1^0 - t_2^0 \text{ на } \Gamma^-, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} L t^{1/2} = \tilde{q} \text{ в } D, \\ -\lambda \frac{\partial t^{1/2}}{\partial n} = a (t^{1/2} - t^c) \text{ на } \partial D, \\ (q_n^+)^{1/2} = t_1^{1/2} + t_2^{1/2} - T_c^+ \text{ на } \Gamma^+, \\ (q_n^-)^{1/2} = \lambda_1 \frac{\partial T_1^1}{\partial n_1} \text{ на } \Gamma^- \end{array} \right. \quad (2.5)$$

обчислюємо $t^1 = t^0 + \beta_0 (t^{1/2} - t^0)$, $v^1 = t^1 - t^0$ в $\bar{D}$;

Головний цикл: ітерація k ($k \geq 1$):

розв'язуємо задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 V_1^{k+1} = 0 \text{ в } \Omega_1, \\ -\lambda_1 \frac{\partial V_1^{k+1}}{\partial n_1} = a_1 V_1^{k+1} \text{ на } \Gamma_1, \\ V_1^{k+1} = v_1^k - v_2^k \text{ на } \Gamma^-; \end{array} \right. \quad (2.6)$$

обчислюємо $T_1^{k+1} = T_1^k + V_1^{k+1}$ в $\bar{\Omega}_1$, $d_k = \|V_1^{k+1}\|_{E_1}^2 / \|v^k\|_{E_2}^2 + 1$;

$$\beta_k = \begin{cases} 2/(M_1 + m_1), M_1 = m_1 = d_1, k=1, \\ 2/(M_k + m_k), M_k = \max(M_{k-1}, d_k), m_k = \min(m_{k-1}, d_k), k \geq 2; \end{cases} \quad (2.7)$$

розв'язуємо задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} L v^{k+1/2} = \tilde{q}|_{q=0} \text{ в } D, \\ -\lambda \frac{\partial v^{k+1/2}}{\partial n} = a v^{k+1/2} \text{ на } \partial D, \\ (q_n^+)^{k+1/2} = v_1^{k+1/2} + v_2^{k+1/2} - T_c^+ \text{ на } \Gamma^+ \\ (q_n^-)^{k+1/2} = \lambda_1 \frac{\partial V_1^{k+1}}{\partial n_1} \text{ на } \Gamma^-; \end{array} \right. \quad (2.8)$$

обчислюємо

$$t^{k+1/2} = t^{k-1/2} + v^{k+1/2}, v^{k+1} = \beta_k (t^{k+1/2} - t^k), t^{k+1} = t^k + v^{k+1} \text{ в } \bar{D}, \quad (2.9)$$

Ітераційний процес завершується, якщо виконується умова

$$\|T_1^{k+1} - T_1^k\|_1 + \|t^{k+1} - t^k\|_2 < \varepsilon \left(\|T_1^k\|_1 + \|t^k\|_2 \right), \quad (2.10)$$

де $\|\cdot\|_i$ — норми у відповідних просторах (енергетичні, L^2, L^∞).

Чисельні результати. Порівняємо вибір параметрів релаксації згідно із запропонованою схемою та конструктивною схемою вибору параметрів релаксації $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ [7], які забезпечують прямування β_k до оптимального значення, коли $k \rightarrow \infty$. Як приклад розглянемо задачу про теплопровідність осесиметричного порожнистого циліндра Ω_1 (тіло) з тонким зовнішнім покриттям Ω (тонкий шар). З огляду на умови осової симетрії, достатньо розглянути лише частину поперечного перерізу циліндра, для якої

$$\Omega_1 = \{(r, \varphi) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\},$$

$$D = \{(r, \varphi) : r = 2.1, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\},$$

$$\Omega = \{(r, \varphi) : 2 \leq r \leq 2.2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\},$$

$$\Gamma_1 = \{(r, \varphi) : r = 1, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\},$$

$$\Gamma^- = \{(r, \varphi) : r = 2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\},$$

$$\Gamma^+ = \{(r, \varphi) : r = 2.2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}.$$

Алгоритм (2.5)-(2.10) застосований до модельної задачі:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 T_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \lambda_1 = 1, \\ -\frac{\partial T_1}{\partial n_1} = T_1 - 1 \text{ на } \Gamma_1, \\ T_1 = t_1 - t_2 \text{ на } \Gamma^-, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Lt = \tilde{q}|_{q=0} \text{ в } D, \lambda = 0.1, \\ -0.1 \frac{\partial t}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial D, \\ q_n^+ = t_1 + t_2 - 10 \text{ на } \Gamma^+, \\ q_n^- = \frac{\partial T_1}{\partial n_1} \text{ на } \Gamma^-. \end{array} \right.$$

Аналітичний розв'язок цієї задачі, який легко отримати, можна використати для оцінки точності отриманих чисельних результатів. При чисельному розв'язанні використовувались біквадратичні лагранжеві скінченні елементи. Результати для Ω_1 , що складається з 200 криволінійних чотирикутних елементів та 861 вузлів, а також для Ω , що складається з 20 елементів та 41 вузла відповідно, відображені у табл.1. У цій таблиці наведена кількість ітерацій (ІТ), що потрібна для задоволення (2.10) з $\varepsilon = 10^{-3}$ у різних нормах, а також норми похибок на останній ітерації при різних варіантах вибору β_k . Адаптивні схеми порівнюються з неадаптивною схемою (2.1)-(2.2), в якій використову-

валося значення $\beta_k = 0.1616733$, яке є близьким до оптимального та отримане згідно із запропонованою схемою з $\varepsilon = 10^{-7}$. Як бачимо з табл.1, адаптивні вибори β_k згідно із запропонованою схемою або схемою [3] є ефективними. Порівняння цих двох підходів для вибору β_k можна здійснити за допомогою табл.2, у якій відображена кількість ітерацій, що потрібна для задоволення (2.10) із заданою точністю.

Таблиця 1

Норма	L^∞ — норма		L^2 — норма		Енерг. норма	
	ІТ	похибка	ІТ	похибка	ІТ	похибка
$\beta_k = \text{const} = 0.1616733$	8	.00575	8	.00386	7	.00539
Вибір β_k згідно з (2.7)	9	.00645	9	.00476	8	.00559
Вибір β_k згідно з [3]	10	.00694	9	.00587	7	.00598

Таблиця 2

Відносна похибка	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
$\beta_k = \text{const} = 0.1616733$	7	12	22
Вибір β_k згідно з (2.7)	8	15	26
Вибір β_k згідно з [3]	7	29	53

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности: В 2 ч. М.: Высп. шк. 1982. 327с. 2. Кит Г.С., Кривцун М.Т. Плоские задачи термоупругости для тела с трещинами. К. Наук. думка. 1983. 273с. 3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. 1989. 608с. 4. Савула Я.Г., Дыяк И.И., Дубовик А.В. Применение комбинированной модели для расчёта напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций. //Прикл. механика. 1989. Т.25. №9. 225с. 5. Савула Я.Г., Сипа І.М., Струтинський І.В. Математичні моделі теплопровідності для тіл з тонкими покриттями і включеннями. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип.37. С.39-45. 6. Флейшман Н.П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями. //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип.39. С.30-34. 7. Marini L.D. and Quarteroni A.. An Iterative Procedure for Domain Decomposition Methods: A Finite Element Approach. In First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Eds. R.Glowinski, G.H. Golub, G.A.Meurant, Y.Periaux. SIAM. Philadelphia. 1988. P.129-143. 8. Rek-

torys K. Variational methods in mathematics, science and engineering. Prague. 1980. 589p.

Стаття надійшла до редколегії 12.02.96

УДК 539.3:519.6

Дяконюк Л. М., Савула Я. Г.

Дослідження задачі тепломасоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям.

Математичні моделі тепломасоперенесення у середовищах з тонкими покриттями і включеннями знаходять застосування в різних галузях науки, зокрема, в екології, мікроелектроніці, приладобудуванні тощо. З огляду на це, побудова таких математичних моделей розглядалась багатьма авторами [1,2]. У даній праці запропонована комбінована модель, яка описується диференціальними операторами різної вимірності за просторовими змінними.

1. Математична модель тепломасоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям.

Сформулюємо постановку задачі теплопровідності для неоднорідного тіла, яке складається з масивної частини, що займає область Ω_1 , та тонкого покриття, яке займає область Ω_2^* .

Вважатимемо, що область віднесена до декартової системи координат x_1, x_2, x_3 , а область Ω_2^* — до декартової системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, причому справедливе співвідношення

$$\Omega_2^* = \left\{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3: \alpha_1, \alpha_2 \in \Omega_2; -\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2} \right\},$$

де Ω_2 — деяка двовимірна область з ліпшицевою границею Γ_2 . Товщина h є малою величиною.

Нехай границя області Ω_1 , яка теж вважається ліпшицевою, складається з двох частин $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)}$.

Область Ω_2^* обмежена двома лицьовими площинами $\Omega_2^-\left(\alpha_3 = -\frac{h}{2}\right)$, $\Omega_2^+\left(\alpha_3 = \frac{h}{2}\right)$ та боковою циліндричною поверхнею $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_2$, $-\frac{h}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h}{2}$. Вважатимемо, що частина границі $\Gamma_1^{(2)}$ збігається з площиною Ω_2^- . На зовнішній границі областей Ω_1 і Ω_2^* відбувається теплообмін за Ньютоном.

Процес тепломасоперенесення в Ω_2^* опишемо диференціальним рівнянням (1) [1]:

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} + c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = q, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Зважаючи на мализну товщини шару h , задамо розподіл температури T за змінною α_3 в області Ω_2^* у вигляді лінійного закону:

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \tau) = t(\alpha_1, \alpha_2, \tau) + \frac{2\alpha_3}{h} t_1(\alpha_1, \alpha_2, \tau) \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1) та ортогоналізуючи нев'язку до 1 та α_3 в сенсі інтеграла за змінною α_3 на проміжку $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, отримаємо рівняння:

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial \alpha_1} + \chi_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} = \quad (3)$$

$$= hq_0 - q^+ - q^-,$$

$$-\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \lambda_0 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} + 4 \frac{\lambda_0}{h^2} t_1 + \frac{\chi_0}{3} \frac{\partial t_1}{\partial \tau} = \quad (4)$$

$$= \frac{h}{3} q_1 - (q^+ - q^-),$$

де

$$\begin{aligned}\chi_0 &= h c \rho, & \lambda_0 &= h \lambda, \\ q_0 &= \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} q d\alpha_3, & q_1 &= \frac{6}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} q \alpha_3 d\alpha_3, \\ q^+ &= -\lambda \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha_3}, \text{ при } \alpha_3 = \frac{h}{2}; \\ q^- &= \lambda \frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha_3}, \text{ при } \alpha_3 = -\frac{h}{2}.\end{aligned}$$

До цих рівнянь додамо граничні та початкові умови для функцій t, t_1 , які отримуємо так само, як і рівняння (3), (4) :

$$-\lambda_0 \frac{\partial t}{\partial \nu} = \alpha_0 (t - t^c), \quad (5)$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial t_1}{\partial \nu} = \alpha_0 (t_1 - t_1^c) \quad \text{на } \Gamma;$$

$$\begin{aligned}t &= t^0 & \text{при } \tau &= 0 & \text{в } \Omega_2, \\ t_1 &= t_1^0 & \text{при } \tau &= 0 & \text{в } \Omega_2.\end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$\alpha_0 = \alpha h, \quad t^c = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T_c d\alpha_3,$$

$$t_1^c = \frac{6}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} T_c \alpha_3 d\alpha_3,$$

$$t^0 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} T_0 d\alpha_3, \quad t_1^0 = \frac{6}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} T_0 \alpha_3 d\alpha_3.$$

Процес тепломасоперенесення в області Ω_1 опишемо рівнянням

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_i} + c\rho \frac{\partial T_1}{\partial \tau} = q_1^*, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

На зовнішній границі тіла задано теплообмін за Ньютоном :

$$q^+ = \alpha(t + t_1 - T_c),$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \nu} = \alpha_1(T_1 - T_c), \quad \text{на } \Gamma_1^{(1)}. \quad (8)$$

На границі $\Gamma_1^{(2)}$ необхідно задати такі умови спряження, які виражають рівність температур і теплових потоків :

$$T_1 = t - t_1,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \nu} = q^- \text{ на } \Gamma_1^{(2)} * [0, T] \quad (9)$$

Для повного опису математичної моделі задамо розподіл функції T_1 в початковий момент часу :

$$T_1 = T_1^0 \text{ при } \tau = 0 \text{ в } \Omega_1. \quad (10)$$

Таким чином, математична модель задачі складається зі зв'язаної системи диференціальних рівнянь різної вимірності (3), (4), (7), граничних умов (5), (8), умов спряження (9) та початкових умов (6), (10).

2. Варіаційна постановка задачі.

Розглянемо варіаційну постановку задачі.

Введемо простори :

$$V_1 = \{u_1(x_1, x_2, x_3): u_1 \in W_2^1(\Omega_1), u_1 = 0 \text{ на } \Gamma_1^{(1)}\},$$

$$V_2 = \{u_2(x_1, x_2, x_3): u_2 \in W_2^1(\Omega_1), u_2 = 0 \text{ на } \Gamma_2\},$$

$$V = \left\{ (u_1, u_2, u_3): u_1 \in V_1, u_2 \in V_2, u_3 \in V_2, \right. \\ \left. u_1 = u_2 - u_3 \text{ на } \Gamma_1^{(2)} \right\}.$$

Домноживши рівняння (7), (3), (4) відповідно на

$$u_1 \in V_1, u_2 \in V_2, u_3 \in V_2,$$

і зінтегрувавши частинами, отримаємо варіаційні рівняння.

Отже, нехай задано функції

$$T_1^0 \text{ в } \Omega_1, t^0 \text{ в } \Omega_2, t_1^0 \text{ в } \Omega_2, q_1^* \in L_2(H(\Omega_1); 0, \theta), q^+ \in L_2(H(\Omega_1); 0, \theta).$$

Потрібно знайти

$$T_1 \in (V_1; 0, \theta), \quad t \in (V_2; 0, \theta), \quad t_1 \in (V_2; 0, \theta),$$

такі, що задовольняють рівняння (11):

$$\begin{aligned} m_1(T_1', u_1) + a_1(T_1, u_1) - b_1(T_1, u_1) &= l_1(u_1), \\ m_2(t', u_2) + a_2(t, u_2) - b_2(q^-(T_1), u_2) &= l_2(u_2), \\ m_3(t_1', u_3) + a_3(t_1, u_3) - b_3(q^-(T_1), u_3) &= l_3(u_3), \\ \forall (u_1, u_2, u_3) &\in V. \end{aligned} \quad (11)$$

Тут

$$\begin{aligned} m_1(T_1', u_1) &= \int_{\Omega_1} c_1 \rho_1 \frac{\partial T}{\partial \tau} u_1 d\Omega, \\ m_2(t', u_2) &= \frac{1}{3} \int_{\Omega_2} \chi_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} u_2 d\Omega, \\ m_3(t_1', u_3) &= \frac{1}{3} \int_{\Omega_2} \chi_0 \frac{\partial t_1}{\partial \tau} u_3 d\Omega, \\ a_i(T_1, u_1) &= \int_{\Omega_1} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} d\Omega, \quad i = 1, 2, 3 \\ a_2(t, u_2) &= \int_{\Omega_2} \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} d\Omega, \\ a_3(t_1, u_3) &= \int_{\Omega_2} \left(\frac{1}{3} \lambda_0 \frac{\partial t_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + 4 \frac{\lambda_0}{h^2} t_1 u_3 \right) d\Omega, \quad i = 1, 2, \\ l_1(u_1) &= \int_{\Omega_1} q_1^* u_1 d\Omega, \end{aligned}$$

$$l_2(u_2) = \int_{\Omega_2} (hq_0 - q^+) u_2 d\Omega,$$

$$l_3(u_3) = \int_{\Omega_2} \frac{1}{3} (q_1 - 3q^+) u_3 d\Omega,$$

$$b_1(T_1, u_1) = \int_{\Gamma_1^{(2)}} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \nu} u_1 d\Gamma,$$

$$b_2(T_1, u_2) = \int_{\Omega_2} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \nu} u_2 d\Omega,$$

$$b_3(T_1, u_3) = \int_{\Omega_2} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \nu} u_3 d\Omega \quad .$$

Врахуємо, що розв'язок варіаційної задачі шукаємо на множині функцій, які задовільняють умову

$$u_1 = u_2 - u_3 \quad \text{на} \quad \Gamma_1^{(2)} = \Omega_2.$$

Виключимо граничне значення u_1 у білінійній формі $b_1(T_1, u_1)$ в першому рівнянні (11) і додамо до нього два наступні.

Отримаємо

$$m_1(T_1', u_1) + m_2(t', u_2) + m_3(t_1', u_3) + a_1(T_1', u_1) + a_2(t', u_2) + a_3(t_1', u_3) = l_1(u_1) + l_2(u_2) + l_3(u_3).$$

Звідси, враховуючи, що u_1, u_2, u_3 — довільні функції V , отримаємо

$$\begin{aligned} m_1(T_1', u_1) + a_1(T_1', u_1) &= l_1(u_1), \\ m_2(t', u_2) + a_2(t', u_2) &= l_2(u_2), \\ m_3(t_1', u_3) + a_3(t_1', u_3) &= l_3(u_3). \end{aligned} \tag{12}$$

$$\forall (u_1, u_2, u_3) \in V.$$

3. Напівдискретизована задача.

Виберемо в V_1 та V_2 послідовності скінченновимірних просторів $\{V_1^h\}$ та $\{V_2^h\}$ [3] таких, що

$$\dim V_1^h = N_1(h_1) \rightarrow \infty, \quad h_1 \rightarrow 0,$$

$$\dim V_2^h = N_2(h_2) \rightarrow \infty, \quad h_2 \rightarrow 0,$$

$\bigcup_{h>0} V_i^h$ — щільно вкладені в V_i , тобто для кожної функції

$$\forall v \in V_i, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists h_i > 0, \quad V_i, \text{ що } \|v - v_i^h\|_{V_i} \leq \varepsilon.$$

$$T_1^h(x_1, x_2, x_3, \tau) = \sum_{j=1}^{N_1} T_1^j(\tau) \varphi_{1j}^h(x_1, x_2, x_3),$$

$$t^h(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = \sum_{j=1}^{N_2} t^j(\tau) \varphi_{2j}^h(\alpha_1, \alpha_2), \quad (13)$$

$$t_1^h(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = \sum_{j=1}^{N_2} t_1^j(\tau) \varphi_{2j}^h(\alpha_1, \alpha_2).$$

Запишемо напівдискретизовану задачу:

$$\begin{aligned} m_1(T_1^{h'}, u_1) + a_1(T_1^h, u_1) - b_1(T_1^h, u_1) &= l_1(u_1), \\ m_2(t^{h'}, u_2) + a_2(t^h, u_2) - b_2(q^-(T_1^h), u_2) &= l_2(u_2), \\ m_3(t_1^{h'}, u_3) + a_3(t_1^h, u_3) - b_3(q^-(T_1^h), u_3) &= l_3(u_3). \end{aligned} \quad (14)$$

4. Властивості білінійних форм задачі.

Очевидно, що за нульових граничних умов білінійні форми

$m_1(.,.), m_2(.,.), m_3(.,.), a_1(.,.), a_2(.,.), a_3(.,.)$ — симетричні.

Теорема. Дані білінійні форми є неперервними і V-еліптичними.

Доведення. Властивість неперервності доводиться за допомогою формули Коші-Буньяковського. V-еліптичність впливає з нерівностей Фрідрікса для тривимірного і двовимірного випадків.

5. Енергетичне рівняння.

Підставимо в (14) замість u_1, u_2, u_3 відповідно

T_1^h, t^h, t_1^h і додамо ці рівняння. Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|T_1^h\|_{m_1}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|t^h\|_{m_2}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|t_1^h\|_{m_3}^2 + \|T_1^h\|_{a_1}^2 + \\ + \|t^h\|_{a_2}^2 + \|t_1^h\|_{a_3}^2 = l_1(T_1^h) + l_2(t^h) + l_3(t_1^h). \end{aligned}$$

Використавши нерівність

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad a, b \in R \text{ та}$$

$$\|v\|_{a_i} \geq \beta_i \|v\|_{m_i} \quad \forall \beta_i = \text{const},$$

обчислимо, що

$$\begin{aligned} \|l_i(\cdot)\|_{m_i} &\leq \|q_i\|_{m_i} \|\cdot\|_{m_i} \leq \frac{1}{\beta_i} \|q_i\|_{m_i} \|\cdot\|_{a_i} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|\cdot\|_{a_i}^2 + \frac{1}{2\beta_i} \|q_i\|_{m_i}^2, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$$\text{де} \quad q_2 = h q_0, \quad q_3 = \frac{1}{3} q_1.$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} & \|T_1^h\|_{m_1}^2 + \|t^h\|_{m_2}^2 + \|t_1^h\|_{m_3}^2 + \int_0^\theta \|T_1^h\|_{a_1}^2 d\tau + \int_0^\theta \|t^h\|_{a_2}^2 d\tau + \\ & + \int_0^\theta \|t_1^h\|_{a_3}^2 d\tau \leq \|T_1^{0h}\|_{m_1}^2 + \|t^{0h}\|_{m_2}^2 + \|t_1^{0h}\|_{m_3}^2 + \\ & + \frac{1}{\beta_1^2} \int_0^\theta \|q_1\|_{m_1}^2 d\tau + \frac{1}{\beta_2^2} \int_0^\theta \|q_2\|_{m_2}^2 d\tau + \frac{1}{\beta_3^2} \int_0^\theta \|q_3\|_{m_3}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Нехай H — простір, породжений нормою

$$\|u\|_m^2 = \|u_1\|_{m_1}^2 + \|u_2\|_{m_2}^2 + \|u_3\|_{m_3}^2,$$

а G — простір, породжений нормою

$$\|u\|_a^2 = \|u_1\|_{a_1}^2 + \|u_2\|_{a_2}^2 + \|u_3\|_{a_3}^2.$$

Таким чином, напівдискретні апроксимації Гальоркіна (T_1^h, t^h, t_1^h) утворюють обмежену множину в просторі $L^\infty(H; 0, \theta) \cap L^2(G; 0, \theta)$. Це свідчить про стійкість напівдискретних апроксимацій. Крім цього, використовуючи останню нерівність, можна довести теорему.

Теорема. Нехай задані фіксовані значення параметрів дискретизації $h_i > 0$ $i \in \{1, 2\}$ — базис простору апроксимацій V_{hi} .

Тоді напівдискретизована варіаційна задача допускає єдиний розв'язок:

$$(T_1^h, t^h, t_1^h) \in L^\infty(H; 0, \theta) \cap L^2(G; 0, \theta).$$

1. Кит Г. С., Кривіцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. К., 1983.. 2. Підстригач Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл. Доп. АН України 1963. 3. Шинкаренко Г. А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К., 1991.

Стаття надійшла до редколегії 15. 02. 96.

Н.П. Флейшман, Ч.Н. Койфман

Математичне моделювання гнучких з'єднувальних елементів

Вплив ребер жорсткості на деформацію пластинок та оболонок досліджували багато авторів, як наприклад [1,4-6,8,9]. У більшості праць прийнята умова неперервності переміщень та кутів поворотів тонкостінної конструкції при переході через лінію ребра, тому ці ребра (накладки) виконують роль підсилювального елемента. На практиці, однак, трапляються випадки, коли товщина з'єднувального елемента набагато менша за товщину тих частин конструкції, які він з'єднує. Наявність гнучкого з'єднувального елемента, який виконує роль своєрідного шарніра, зумовлює те, що під дією поперечного навантаження конструкція працює не тільки на згин, але й на розтяг. Нижче побудована математична модель такого з'єднання.

1. Розглянемо тонкостінну конструкцію, яка складається з двох частин "1" та "2". Ці частини з'єднані за допомогою тонкої гнучкої ізотропної пластинки малої ширини $2\delta = \text{const}$, яка має форму криволінійної смуги. Уздовж серединної осі смуги спрямуємо вісь α_2 , а лінії α_1 спрямуємо по нормалях до кривої $\alpha_1 = 0$. Деформації гнучкої смуги описуються системою диференціальних рівнянь геометрично нелінійної теорії гнучких пластинок [2,3]. Аналогічно до [3] запишемо їх у векторній формі :

$$\frac{\partial \vec{Z}}{\partial \alpha_1} = \vec{G}(\alpha_1, \alpha_2, \frac{\partial^k \vec{Z}}{(\partial \alpha_2)^k}), \quad k = \overline{0,4}, \quad (1)$$

де

$$\vec{Z}^T = \{Z_i\}^T = \{N_1, \hat{S}_1, \hat{Q}_1, M_1, u_1, u_2, w, \theta_1\}^T, \quad (i = \overline{1,8}). \quad (2)$$

Тут N_1 – нормальна сила; $\hat{S}_1$ та $\hat{Q}_1$ – узагальнені зсувне та перерізує зусилля; M_1 – згинаючий момент; u_1, u_2, w – компоненти вектора переміщення; θ_1 – кут повороту нормалі.

Для гнучкої пластинки сталої товщини досить громіздкі вирази елементів нелінійної вектор-функції $\vec{G} = \{g_i\}$ наведені, зокрема, в

монографії [3]. При осесиметричній деформації ізотропної гнучкої круглої кільцевої смужки в полярних координатах (r, φ) маємо, зокрема, $(N_1 = N_r, \hat{Q}_1 = Q_r, M_1 = M_r, u_1 = u, \theta_1 = \theta, w = w, \hat{S}_1 = u_2 = 0)$:

$$\begin{aligned} g_1 &= -(1-\nu)N_r/r + (1-\nu^2)uD_N/r^2, \quad g_7 = -\theta \\ g_3 &= -q(r) - Q_r/r + (1-\nu^2)D_N u \theta / r^2 + N_r M_r / D_M \\ g_4 &= Q_r - (1-\nu)M_r/r + (1-\nu^2)D_M \theta / r^2 \\ g_5 &= N_r/D_N - \nu u/r - \theta^2/2, \quad g_8 = M_r/D_M - \nu \theta / r \end{aligned} \quad (3)$$

де $D_N = Eh/(1-\nu^2)$; $D_M = Eh^3/12(1-\nu^2)$; E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу смуги; q_r – інтенсивність поперечного навантаження ($\rho - \delta \leq r \leq \rho + \delta$); $h = \text{const}$ – товщина.

На краях $\alpha_1 = \pm \delta$ гнучкої смуги задаються взагалі по вісім інтегральних умов її злучення із сусідніми частинами конструкції “1” та “2”:

$$\vec{Z}(\delta, \alpha_2) = \vec{Z}_2^+, \quad \vec{Z}(-\delta, \alpha_2) = \vec{Z}_1^-. \quad (4)$$

Вектори $\vec{Z}_2^+$ та $\vec{Z}_1^-$ аналогічні вектору шуканих функцій $\vec{Z}$ (2) і визначають відповідно контактні зусилля, згинальні моменти, переміщення та кут повороту нормалі в точках ліній спряження смуги з частинами конструкції, які вона з’єднує.

2. Для виведення математичної моделі злучення тонкостінних елементів конструкції за допомогою вузької гнучкої смуги дискретизуємо її область вздовж осей α_1 , на яких вибираємо по три точки $\alpha_1 = 0$ та $\alpha = \pm \delta$. У точках $\alpha_1 = 0$ задовольняємо рівняння (1), у точках $\alpha_1 = \pm \delta$ — крайові умови (4). Похідну за α_1 в (1) при $\alpha_1 = 0$ заміняємо її симетричним різницеvim аналогом з точністю $O(\delta^2)$ і отримуємо

$$\vec{Z}(\delta, \alpha_2) - \vec{Z}(-\delta, \alpha_2) = 2\vec{G}(0, \alpha_2) \frac{\partial^* \vec{Z}(0, \alpha_2)}{\partial \alpha_2^k} \cdot \delta \quad \text{при } \alpha_1 = 0. \quad (5)$$

Така апроксимація похідної визначає квадратичну залежність вектора $\vec{Z}$ від α_1 вздовж ширини смуги, тому права частина рівності (5) лінійно залежить від α_1 . Отже, маємо

$$\vec{G}(0, \alpha_2, \frac{\partial^* \vec{Z}(0, \alpha_2)}{\partial \alpha_2^k}) = \frac{1}{2}(\vec{G}^+ + \vec{G}^-). \quad (6)$$

Верхні індекси "+" та "-" означають, що вектор-функція $\vec{G}$ береться в точках $\alpha_1 = \delta$ та $\alpha_1 = -\delta$ відповідно.

Підставляючи (6) та (4) в (5), виводимо шукану математичну модель, тобто узагальнені умови злучення частин конструкції за допомогою гнучкої смуги сталої ширини:

$$\vec{Z}_2^+ - \vec{Z}_1^- = (\vec{G}^+ + \vec{G}^-) \cdot \delta. \quad (7)$$

Умови (7) визначають стрибки векторів $\vec{Z}$ при переході з однієї частини конструкції до іншої через з'єднувальний гнучкий елемент. Вони дають змогу усунути з розгляду область смуги і лише опосередковано брати до уваги вплив її фізико-механічних та геометричних параметрів, які входять у функції g_i ($i = 1, 8$).

Очевидно, що при $\delta=0$ (смуги немає) з (7) отримуємо умови ідеального контакту. Неважко перевірити, що при $E=\infty$ (абсолютно жорстка смуга), як і слід було чекати, при довільному δ маємо $\theta^+ = \theta^- = 0, w^+ = w^-, u_1^+ = u_2^+ = 0, u_1^- = u_2^- = 0$. Якщо ж формально прийняти $D_M=0$, отримуємо умови для випадку злучення за допомогою ідеального шарніра ($M_1^+ = M_1^- = 0$).

Якщо гнучка смуга з'єднує лінійно пружні частини конструкції, їх напружено-деформівний стан, очевидно, вже не залежить лінійно від навантаження.

3. Приклад. Осесиметричний згин круглої лінійно-пружної ізотропної пластинки з концентричною гнучкою смугою.

Пластинка радіуса R складається з двох частин: центральної частини "1" ($0 \leq r \leq \rho - \delta$) та кільцевої частини "2" ($\rho + \delta \leq r \leq R$). Гнучка смуга займає область $\rho - \delta \leq r \leq \rho + \delta$. Відповідні товщини та пружні константи позначаємо через h_i, E_i, ν_i ($i=1,2$). У цьому випадку в полярних координатах (r, φ) маємо $\hat{Q}_\varphi = 0, u_\varphi = 0$,

$$\vec{Z}^T = \{Z_i^T\} = \{N_r, Q_r, M_r, u_r, w, \theta\}^T \quad (i = \overline{1,6}) \quad (8)$$

Прогини та радіальні переміщення пластинок під дією поперечного навантаження $q(r)$ шукаємо у вигляді [7]:

$$\begin{aligned} w_1 &= w_{01} + C_1 + C_2 r^2, u_{1r} = 2r(1 - \nu)B_1 / E_1, \\ w_2 &= w_{02} + A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 r^2 \ln r, \end{aligned} \quad (9)$$

$$u_{2r} = [2(1 - \nu_2)B_2 - (1 + \nu_2)B_3 / r^2]r / E_2,$$

де w_{01}, w_{02} --- відомі часткові розв'язки рівняння Софі-Жермен; A_i , ($i = 1, 4$); B_1, B_2, B_3, C_1, C_2 --- шукані коефіцієнти, для визначення яких служать шість узагальнених умов злучення (4) та три крайові умови на контурі $r=R$. Зокрема, якщо пластинка жорстко защемлена на границі, маємо

$$\frac{\partial w_2}{\partial r} = u_{2r} = w_2 = 0. \quad (10)$$

Через функції (9) за відомими формулами [7,2] визначаємо всі елементи вектора $\vec{Z}$ (8). Підставляючи (9) в умови (7) та (10), отримуємо нелінійну систему дев'яти алгебраїчних рівнянь, з якої визначаються всі коефіцієнти розв'язку (9).

Зокрема, при $E_1=E_2=E$, $\nu_1=\nu_2=\nu=0,3$, $\rho=0,45R$, $\delta=0,1R$, $h=0,2h_1$, $h_1=h_2$, $q=16Eh_2^4 q^*/3(1-\nu^2)R^4=\text{const}$, деякі результати обчислень наведені в таблиці для трьох випадків: при $\alpha=2(1-\nu^2)R^2/E_2 h_2^2$ та $q^*=2$.

Ці результати узгоджуються з відомими даними розрахунків гнучких пластинок [2]. Вони свідчать про те, що наявність гнучкої з'єднувальної смуги істотно впливає на максимальні прогини та напруження в пластинці.

Таблиця

Випадок	$w_1(0)/h_2$	$\alpha\sigma_{r,\max}(0)$	$\alpha\sigma_{r,\max}(1)$
Смуга відсутня	2,00	5,72	16,00
Смуга розглядається за лінійною теорією	2,14	2,41	18,24
Смуга гнучка	1,65	3,77	27,81

1. А м и р о И. Я., З а р у ц к и й В. А. Методы расчета оболочек. Т.2. Теория ребристых оболочек. К.: Наук. думка, 1980. 2. В о л ь м и р А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: ГИТТЛ, 1956. 3. Г р и г о р е н к о Я. М., М у к о е д А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К.: Выща пк., 1983. 4. М а р т ы н о в и ч Т. Л., Ю р и н е ц В. Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. Львов: Выща пк., 1984. 5. С а в и н Г. Н., Ф л е й ш м а н Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К.: Наук. думка, 1964. 6. С а в и н Г. Н., Ф л е й ш м а н Н. П. Пластинки с криволинейными ребрами жесткости // Механика твердого тела: Тр. 2 Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Обзорные доклады, М., Наука, 1966, Вып.3. С.319-342. 7. Т и м о ш е н к о С. П., В о й н о в с к и й - К р и - г е р С. Пластинки и оболочки. М.: ГИФМЛ, 1963. 8. Ф л е й ш м а н Н. П. Обобщен-

ные краевые задачи для пластин с криволинейными ребрами // Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. Bucarest. 1971. Vol. 16. №2. P. 245-254. 9. Savin G. N., Fleishman N. P. Rib-Reinforced Plates and Shells. Jerusalem : Israel Program of Scientific Translations, 1967.

Стаття надійшла до редколегії 05.09.95

УДК 539.3

Н. П. Флейшман, Н. В. Иванова

Використання методу довільних кривих у дослідженні задач статичної теорії пластин

Для розрахунку широкого класу тонких пластинок неканонічної форми пропонується використати чисельно-аналітичний метод довільних кривих, який є узагальненням методу прямих і, на відміну від чисельних методів, дає змогу точно описати форму границі і точніше задовольнити основні рівняння та граничні умови.

1. Розглядаємо задачу про узагальнено плоский напружений стан однорідної ізотропної пластинки у формі довільного криволінійного чотирикутника :

$$D = \{(x, y) : g_1(x) \leq y \leq g_2(x), f_1(y) \leq x \leq f_2(y)\}.$$

Одночасно з декартовою системою (x, y) розглядаємо криволінійну неортогональну систему координат (ξ, η) , яка пов'язана з декартовою формулами переходу [2]:

$$x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta), \quad (1)$$

за допомогою яких криволінійний чотирикутник D ін'єктивно відображається на одиничний квадрат площини (ξ, η) .

Співвідношення Коші у криволінійній неортогональній системі координат мають вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial \eta} - \Gamma_{22}^1 u_1 - \Gamma_{22}^2 u_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2,$$

де u_i — компоненти вектора переміщень у системі (ξ, η) ; ε_{ij} — компоненти коваріантного тензора деформацій; Γ_{jk}^i — символи Кристоффеля другого роду [1].

Компоненти σ^{ij} контраваріантного тензора напружень задовольняють рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial (r \sigma^{sq})}{\partial \xi} + r \Gamma_{mn}^q \sigma^{mn} + \rho r F^q = 0, \quad (m, n, s, q = 1, 2), \quad (3)$$

де $r = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$; $\rho r F^q$ — компоненти об'ємного навантаження пластинки [1].

Співвідношення закону Гука в криволінійній неортогональній системі координат мають вигляд

$$\varepsilon_{sk} = \frac{1}{2\mu} \left[g_{sm} g_{kn} - \frac{\nu}{1+\nu} g_{sk} g_{mn} \right] \sigma^{mn}, \quad (s, k = 1, 2), \quad (4)$$

де g_{mn} — коваріантні компоненти метричного тензора в системі (ξ, η) ; μ — модуль зсуву матеріалу; ν — коефіцієнт Пуасона. За індексами m і n ведемо підсумовування.

Підставляючи (2) в (4) та додаючи два рівняння (3), отримуємо замкнену систему п'яти лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку стосовно п'яти функцій $u_1, u_2, \sigma^{11}, \sigma^{12}, \sigma^{22}$:

$$\tilde{A} \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \xi} + \tilde{B} \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \eta} + \tilde{C} \bar{z}^* + \bar{q}^* = 0, \quad (5)$$

де $\bar{z}^* = \{u_1, u_2, \sigma^{11}, \sigma^{12}, \sigma^{22}\}^T$; $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ — квадратні матриці, елементи яких залежать від геометрії пластинки та її пружних сталей.

Виражаючи з другого рівняння системи (5) функцію σ^{22} та підставляючи отриманий вираз в інші рівняння, одержуємо систему чотирьох диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \xi} = B \frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta} + D \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \eta^2} + C \bar{z} + \bar{q}, \quad (6)$$

де $\bar{z} = \{z_j\} = \{u_1, u_2, \sigma^{11}, \sigma^{12}\}^T$; B, C, D — нові відомі квадратні матриці розміру 4×4 . У матриці D не дорівнює нулю лише компонента $d_{42} = -\frac{E}{g_{22}^2}$. У матриці B ненульовими компонентами є:

$$b_{12} = b_{43} = \frac{g_{12}^2 - vr^2}{g_{22}^2}; \quad b_{22} = b_{42} = 2 \frac{g_{12}}{g_{22}};$$

$$b_{32} = -b_{41} = -\frac{\Gamma_{22}^1}{g_{22}^2};$$

$$b_{21} = b_{34} = -1; \quad b_{44} = \frac{E}{g_{22}^2} \left(\frac{2}{g_{22}} \cdot \frac{\partial g_{22}}{\partial \eta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta} \right).$$

Відмінними від нуля компонентами матриці C є:

$$c_{11} = \Gamma_{11}^1 - \frac{g_{12}^2 - vr^2}{g_{22}^2} \Gamma_{22}^1; \quad c_{12} = \Gamma_{11}^2 - \frac{g_{12}^2 - vr^2}{g_{22}^2} \Gamma_{22}^2;$$

$$c_{13} = g_{11}^2 - \frac{(g_{12}^2 - vr^2)^2}{g_{22}^2};$$

$$c_{14} = 2g_{11}g_{12} - 2 \frac{g_{12}(g_{12}^2 - vr^2)}{g_{22}};$$

$$c_{21} = 2\Gamma_{12}^1 - 2 \frac{g_{12}}{g_{22}} \Gamma_{22}^1; \quad c_{22} = 2\Gamma_{12}^2 - 2 \frac{g_{12}}{g_{22}} \Gamma_{22}^2;$$

$$c_{23} = 2g_{11}g_{12} - 2 \frac{g_{12}(g_{12}^2 - vr^2)}{g_{22}}; \quad c_{24} = 2(1 + \nu)r^2;$$

$$c_{31} = E \frac{(\Gamma_{22}^1)^2}{g_{22}^2}; \quad c_{32} = E \frac{\Gamma_{22}^1 \Gamma_{22}^2}{g_{22}^2};$$

$$c_{33} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \Gamma_{11}^1 \right) + \frac{\Gamma_{22}^1}{g_{22}^2} (g_{12}^2 - vr^2);$$

$$c_{34} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + 2\Gamma_{11}^1 \right) + 2 \frac{g_{12}}{g_{22}} \Gamma_{22}^1;$$

$$\begin{aligned}
c_{41} &= E \frac{\Gamma_{22}^1}{g_{22}^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \Gamma_{22}^2 - \frac{2}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \eta} \right) + \frac{E}{g_{22}^2} \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial \eta}; \\
c_{42} &= E \frac{\Gamma_{22}^2}{g_{22}^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \Gamma_{22}^2 - \frac{2}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \eta} \right) + \frac{E}{g_{22}^2} \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial \eta}; \\
c_{43} &= \frac{1}{g_{22}^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \Gamma_{22}^2 - \frac{2}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \eta} \right) - \Gamma_{11}^2 + \frac{1}{g_{22}^2} \frac{\partial (g_{12}^2 - \nu r^2)}{\partial \eta}; \\
c_{44} &= 2 \frac{g_{12}}{g_{22}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \Gamma_{22}^2 - \frac{2}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + 2\Gamma_{12}^2 \right) + \\
&\quad + \frac{2}{g_{22}^2} \frac{\partial (g_{12}g_{22})}{\partial \eta}.
\end{aligned}$$

До системи (6) додаються по дві граничні умови на кожній стороні квадрата, які отримуються з відповідних граничних умов на границі області D при заміні змінних (1). Таким чином, отримана крайова задача для системи рівнянь (6), яка розв'язується методом прямих із застосуванням різницевих аналогів другого порядку точності. Остаточно виведена система $4N$ звичайних лінійних диференціальних рівнянь (ЗДР) стосовно $4N+8$ невідомих функцій (7) (оскільки до рівнянь входять функції на законтурних лініях $W_{01}, W_{02}, W_{03}, W_{04}, W_{N+1,1}, W_{N+1,2}, W_{N+1,3}, W_{N+1,4}$):

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} = A(\xi, \eta_k) \bar{W} + \bar{f}, \quad (k=1, \dots, N). \quad (7)$$

з граничними умовами при $\xi=0$ та $\xi=1$:

$$\varphi \bar{W}(0) = \bar{\alpha}, \quad \psi \bar{W}(1) = \bar{\beta}. \quad (8)$$

Тут $\bar{W} = \{W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}, \dots, W_{NN}\}$, W_{ij} — елемент вектора на “ i ”-й прямій; φ, ψ — відомі прямокутні матриці $(2N \times 4N)$; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ — відомі вектори $(2N \times 1)$. При цьому крайові умови на лініях $\eta=0$ та $\eta=1$ використовуються для виключення невідомих функцій на законтурних прямих.

Методом суперпозиції двоточкова крайова задача зводиться до задачі Коші, яка розв'язується чисельно методом Рунге-Кутта.

Остаточно визначені компоненти (переміщень та напружень) вектора $\overline{W}$, а також напруження σ^{22} в точках кривих $\eta = \text{const}$ пластинки.

2. Якщо пластинка має форму криволінійного $2M$ -кутника, її область елементарно розбивається на $(M-1)$ криволінійних чотирикутників, кожен з яких відображається на відповідний одиничний квадрат площини (ξ, η) . Таким чином отримуємо ланцюжок таких квадратів, на спільних границях яких записуються умови спряження, тобто умови неперервності фізичних компонент u_1 , u_2 та контактних напружень. Остаточно, тобто після заміни континуальної крайової задачі її скінченно-різницеvim аналогом, замість двоточної крайової задачі для системи ЗДР отримуємо багатоточкову крайову задачу, яка також зводиться до задачі Коші методом суперпозиції.

1. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с. 2. Флейшман Н.П., Койфман Ч.Н. Метод довільних кривих в теорії теплопровідності пластинок змінної товщини//Вісн. ЛДГУ. Сер. мех.-мат. Вип. 43. 1995. С. 112-114.

Стаття надійшла до редколегії 06.02.96.

УДК 519.6:517.925

Г.А.Шинкаренко

Однокрокові рекурентні схеми інтегрування варіаційних задач для гіперболічних рівнянь*

Різнорангові рекурентні схеми інтегрування в часі варіаційних задач, які визначають узагальнені розв'язки початково-крайових задач для рівнянь гіперболічного типу, наведені у працях [1,2,5-9]. Мета цієї праці — побудувати однокрокову схему підвищеної точності інтегрування згаданих задач з використанням кубічних апроксимацій Ерміта та певних умов ортогональності нев'язки на кожному кроці інтегрування. На відміну від праці [3], тут здійснюється специфічний

© Шинкаренко Г.А., 1996

* Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант № APU 051113.

вибір вузлових значень полінома Ерміта: значення розв'язку і його першої похідної у стартовий момент кожного проміжку інтегрування доповнюється значенням другої похідної. Цей вибір дає змогу ефективно реалізувати процес покрокового інтегрування, який за кількістю операцій не поступається перед схемою Ньюмарка.

Дослідження стійкості запропонованих схем виконане шляхом побудови відповідних апіорних енергетичних оцінок.

1. Постановка задачі. Позначимо через H і V гільбертові простори з нормами $\|\cdot\|_H$ та $\|\cdot\|_V$ відповідно; при цьому припускаємо, що V щільно і неперервно вкладений у H .

Розглянемо еволюційну варіаційну задачу:

$$\begin{aligned} \text{задано } u_0 \in V, v_0 \in H, f \in L^2(0, T; H); \\ \text{знайти } u \in L^2(0, T; V) \text{ такий, що} \\ m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) = m(f(t), v) \quad \forall t \in (0, T], \\ m(u'(0) - v_0, v) = 0, \quad c(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\text{Тут } t \in (0, T], \quad 0 < T < \infty; \quad u' := \frac{\partial u}{\partial t}; \quad u'' := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

білінійні форми

$$m(.,.): H \times H \rightarrow R, \quad a(.,.): V \times V \rightarrow R, \quad c(.,.): V \times V \rightarrow R \quad (1.2)$$

симетричні, неперервні та H -, V - і V -еліптичні відповідно.

Подібні до (1.1) еволюційні варіаційні задачі виникають, зокрема, в проблемах еластодинаміки матеріалів з короткочасною пам'яттю.

2. Кусково-кубічна апроксимація Ерміта. Проміжок часу $[0, T]$ покриємо рівномірною (хоча це і не обов'язково) сіткою із вузлів $t_j = j\Delta t, j = 0, 1, \dots, N$, таким чином, що $N\Delta t = T$.

На кожному із одержаних проміжків $[t_j, t_{j+1}]$ розв'язок $u(t)$ варіаційної задачі (1.1) будемо апроксимувати кубічним поліномом $u_{\Delta t}(t)$ вигляду

$$\begin{aligned} u_{\Delta t}(t) := & \{1 - \xi^3(t)\}u^j + \{1 - \xi^2(t)\}\xi(t)v^j + \\ & + \frac{1}{2}\{1 - \xi(t)\}\xi^2(t)w^j + \xi^3(t)u^{j+1}, \\ \xi(t) := & \frac{t - t_j}{\Delta t} \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}] \end{aligned} \quad (2.1)$$

з поки що невідомими елементами u^j, v^j, w^j та u^{j+1} із простору V . Зауважимо, що змістовну інтерпретацію останніх надає такий факт:

підстановка вузлових значень $u(t_j), u'(t_j), u''(t_j)$ та $u(t_{j+1})$ замість u^j, v^j, w^j та u^{j+1} відповідно перетворює (2.1) в інтерполяційний поліном Ерміта для функції $u(t)$ на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$.

Вважатимемо, що

$$v^{j+1} := u'_{\Delta t}(t_{j+1}), \quad w^{j+1} := u''_{\Delta t}(t_{j+1}) \quad (2.2)$$

і введемо такі позначення:

$$\begin{aligned} q^{j+\alpha} &:= (1-\alpha)q^j + \alpha q^{j+1} \\ q^{j+1/2} &:= \frac{1}{\Delta t} (q^{j+1} - q^j) \quad \alpha \in [0,1] \end{aligned} \quad (2.3)$$

які після нескладних перетворень дають змогу надати поліному (2.1) вигляду

$$\begin{aligned} u_{\Delta t}(t) = u_{\Delta t}(t_j + \xi(t)\Delta t) &= \left\{ u^j + \xi(t)\Delta t v^j + \frac{1}{2} [\xi(t)\Delta t]^2 w^j \right\} + \\ &+ \frac{1}{3!} [\xi(t)\Delta t]^3 w^{j+1} \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Орієнтація. Повернувшись до задачі (1.1), зазначимо, що підставивши апроксимацію (2.4) у її початкові умови, одержимо рівняння

$$\begin{aligned} c(u^0 - u_0, v) &= 0 \quad \forall v \in V, \\ m(v^0 - v_0, v) &= 0 \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (3.1)$$

які однозначно визначають початкові значення вектора зміщень u^0 та швидкостей v^0 . Тепер при $j=0$ можна визначити значення прискорень w^0 із рівняння стану:

$$m(w^j, v) = m(f(t_j), v) - a(v^j, v) - c(u^j, v) \quad \forall v \in V. \quad (3.2)$$

Підставляння таким чином знайденої (без будь-яких похибок апроксимації!) трійки $\psi^j = (u^j, v^j, w^j)$ у праву частину полінома (2.4) при $j=0$ показує, що перший рядок у виразі (2.4) подає собою молодші члени розвинення у ряд Тейлора значення точного розв'язку $u(t_j + \Delta t \xi(t))$ задачі (1.1) в околі точки $t = t_j$. Таким чином, основне завдання проектування чисельної схеми інтегрування задачі (1.1) з використанням апроксимацій (2.1) полягає в тому, щоб

визначити невідоме значення $w^{j+1/2} \in V$ у
такий спосіб, щоб останній член
правої частини полінома (2.4) збігався із
черговим членом розвинення точного
розв'язку $u(t)$ задачі (1.1)

(3.3)

в ряд Тейлора в околі точки $t = t_j + \Delta t \xi(t)$.

Наприкінці зауважимо, що з огляду на тільки що наведену інтерпретацію невідомих коефіцієнтів кусково-визначеної апроксимації Ерміта (2.4), можна сподіватись на відшукування наближеного розв'язку варіаційної задачі (1.1) з похибкою порядку $O(\Delta t^4)$ (за наявності відповідного запасу гладкості у точного розв'язку цієї задачі).

4. Проекційне рівняння. Як наступний крок до побудови чисельної схеми розв'язування задачі (1.1) замінімо задану функцію $f(t)$ неперервним кусково-лінійним інтерполяційним поліномом:

$$f_{\Delta t}(t) := \{1 - \xi(t)\} f^j + \xi(t) f^{j+1} \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}],$$

$$f^m := f(t_m), \quad m = j, j+1$$

(4.1)

Тепер візьмемо довільну функцію $\eta = \eta(t)$, таку що

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \eta(t) dt = 1,$$

і, використовуючи апроксимації (2.4) та (4.1.), складемо проекційне рівняння:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \{m(u''_{\Delta t}, v) + a(u'_{\Delta t}, v) + c(u_{\Delta t}, v) - m(f_{\Delta t}, v)\} \eta dt = 0,$$

$$j = 0, 1, \dots, \quad \forall v \in V.$$

(4.2)

Якщо ввести позначення

$$\gamma := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi \eta dt, \quad \beta := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi^2 \eta dt, \quad \theta := \int_{t_j}^{t_{j+1}} \xi^3 \eta dt,$$

(4.3)

то рівнянню (4.2) можна надати вигляду

$$m(w^{j+\gamma}, v) + a(v^j + \Delta t \gamma w^{j+\gamma} + \frac{1}{2} \Delta t^2 (\beta - 2\gamma^2) w^{j+1/2}, v) +$$

$$+ c(u^j + \Delta t \gamma w^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 \beta w^{j+\gamma} + \frac{1}{6} \Delta t^3 (\theta - 3\beta\gamma) w^{j+1/2}, v) =$$

$$= m(f^{j+\gamma}, v) \quad \forall v \in V, j = 0, 1, \dots,$$

(4.4)

або з урахуванням (3.2)

$$\begin{aligned}
& m(w^{j+\gamma}, v) + \Delta t \left\{ a(\gamma w^{j+\gamma} + \frac{1}{2} \Delta t (\beta - 2\gamma^2) w^{j+1/2}, v) + \right. \\
& \left. + c(\frac{1}{2} \Delta t \beta w^{j+\gamma} + \frac{1}{6} \Delta t^2 (\theta - 3\beta\gamma) w^{j+1/2}, v) \right\} = \\
& = m(w^j, v) + \Delta t \gamma \left\{ m(f^{j+1/2}, v) - c(v^j, v) \right\} \quad \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Цікаво, що проекційне рівняння (4.5) містить лише вузлові значення похідних наближеного розв'язку $u_{\Delta t}(t)$ задачі (1.1).

Значення параметрів γ, β та θ рівняння (4.5) можна вибирати з тих чи інших міркувань. Розглянемо тут лише два зручні варіанти.

4.1. Однопараметричне проекційне рівняння.

$$\text{Вибір} \quad \beta := 2\gamma^2, \quad \theta := 3\beta\gamma = 6\gamma^3 \tag{4.6}$$

анулює деякі доданки в рівнянні (4.5) і спрощує його вигляд:

$$\begin{aligned}
& m(w^{j+\gamma}, v) + \Delta t \gamma \left\{ a(w^{j+\gamma}, v) + \Delta t \gamma c(w^{j+\gamma}, v) \right\} = \\
& = m(w^j, v) + \Delta t \gamma \left\{ m(f^{j+1/2}, v) - c(v^j, v) \right\} \quad \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

З огляду на теорему Лакса-Мільграма-Вишика варіаційне рівняння (4.7) однозначно розв'язується стосовно $w^{j+\gamma} \in V$ для будь-яких

$$\gamma > 0 \tag{4.8}$$

(при $\gamma = 0$ рівняння (4.7) перетворюється на тотожність).

Нарешті, після знаходження $w^{j+\gamma}$ із рівняння

$$w^{j+\gamma} = w^j + \Delta t w^{j+1/2} \tag{4.9}$$

визначаємо $w^{j+1/2}$, будуючи у такий спосіб розв'язок задачі (3.3).

4.2. Двопараметричне проекційне рівняння. Нехай $\gamma > 0$.

Тоді з огляду на (4.9) проекційне рівняння (4.5) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
& m(w^{j+1/2}, v) + \Delta t \beta_* a(w^{j+1/2}, v) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \theta_* c(w^{j+1/2}, v) = \\
& = m(f^{j+1/2}, v) - a(w^j, v) - c(v^j + \beta_* \Delta t w^j, v) \quad \forall v \in V, j = 0, 1, \dots,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

де

$$\beta_* := (2\gamma)^{-1} \beta, \quad \theta_* := (3\gamma)^{-1} \theta. \tag{4.11}$$

Варіаційне рівняння (4.10) однозначно розв'язується стосовно $w^{j+1/2}$ для будь-яких

$$\beta_* \geq 0, \quad \gamma_* \geq 0. \quad (4.12)$$

5. Однокрокові рекурентні схеми. Підводячи підсумки параграфів 3, 4, сформулюємо рекурентну схему інтегрування в часі еволюційної варіаційної задачі (1.1):

$$\begin{aligned} &\text{задано трійку } \psi^0 := \{u^0, v^0, w^0\} \in V^3 \\ &\text{і значення параметрів } \Delta t \text{ та } \beta, \theta \geq 0; \\ &\text{знайти трійку } \psi^{j+1} := \{u^{j+1}, v^{j+1}, w^{j+1}\} \in V^3 \text{ таку, що} \\ &m(w^{j+1/2}, v) + \Delta t \left\{ \beta a(w^{j+1/2}, v) + \frac{1}{2} \Delta t \theta c(w^{j+1/2}, v) \right\} = \\ &= m(f^{j+1/2}, v) - a(w^j, v) - c(v^j + \beta \Delta t w^j, v) \quad \forall v \in V, \\ &u^{j+1} := u^j + \Delta t v^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 w^j + \frac{1}{6} \Delta t^3 w^{j+1/2}, \\ &v^{j+1} := v^j + \Delta t w^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 w^{j+1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, \\ &m(w^{j+1}, v) = m(f^{j+1}, v) - a(v^{j+1}, v) - c(u^{j+1}, v), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Запропонована однокрокова рекурентна схема (5.1) точно враховує початкові умови варіаційної задачі (1.1), задовольняє варіаційне рівняння цієї задачі у стартові моменти часу кожного проміжку інтегрування $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. Додамо до цього, що схема (5.1) дає змогу виконувати інтегрування задачі (1.1), змінюючи в разі потреби величину кроку Δt у процесі рекурентних обчислень.

Із часткових випадків схеми (5.1) заслуговує на увагу побудований на основі однопараметричного проекційного рівняння (4.7):

$$\begin{aligned} &\text{задано трійку } \psi^0 := \{u^0, v^0, w^0\} \in V^3 \\ &\text{та значення параметрів } \Delta t \text{ та } \gamma \geq 0; \\ &\text{знайти трійку } \psi^{j+1} := \{u^{j+1}, v^{j+1}, w^{j+1}\} \in V^3 \text{ таку, що} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m(w^{j+\gamma}, v) + \Delta t \gamma \{a(w^{j+\gamma}, v) + \Delta t c(w^{j+\gamma}, v)\} = \\
& = m(w^j, v) + \Delta t \gamma \left\{ m(f^{j+1/2}, v) - c(v^j, v) \right\} \quad \forall v \in V, \\
& u^{j+1} := u^j + \Delta t v^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 w^j + \frac{1}{6} \Delta t^3 w^{j+1/2}, \\
& v^{j+1} := v^j + \Delta t w^j + \frac{1}{2} \Delta t^2 w^{j+1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, \\
& m(w^{j+1}, v) = m(f^{j+1}, v) - a(v^{j+1}, v) - c(u^{j+1}, v) \quad \forall v \in V.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

6. Структура алгебричних рівнянь рекурентних схем. Наближені розв'язки варіаційних рівнянь, які входять до рекурентних схем (5.1) та (5.2), можна знайти, наприклад, методом Гальоркіна. Розглянемо структуру алгебричних рівнянь, які виникають внаслідок такої дискретизації. Скажімо, якщо зафіксувати деякий базис $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ скінченновимірного підпростору V_h , $\dim V_h = N$, із простору V , то рівняння Гальоркіна, які отримуються з перших варіаційних рівнянь схем (5.1) та (5.2), матимуть вигляд

$$\left\{ \mathbf{M} + \Delta t \beta \mathbf{A} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \theta \mathbf{C} \right\} \mathbf{w}^{j+1/2} = \mathbf{M} \mathbf{f}^{j+1/2} - \mathbf{C} \mathbf{v}^j - \{ \mathbf{A} + \Delta t \beta \mathbf{C} \} \mathbf{w}^j, \tag{6.1}$$

$j = 0, 1, \dots$

та

$$\left\{ \mathbf{M} + \Delta t \gamma \mathbf{A} + (\Delta t \gamma)^2 \mathbf{C} \right\} \mathbf{w}^{j+\gamma} = \mathbf{M} \left\{ \mathbf{w}^j + \Delta t \gamma \mathbf{f}^{j+1/2} \right\} - \Delta t \gamma \mathbf{C} \mathbf{v}^j, \quad j = 0, 1, \dots \tag{6.2}$$

відповідно.

Тут символами $\mathbf{v}^m$, $\mathbf{w}^m$ та $\mathbf{f}^m$ позначені вектори коефіцієнтів розвинень $u'_{\Delta t}(t_m)$, $u''_{\Delta t}(t_m)$ та $f_{\Delta t}(t_m)$ за базисом простору V_h ; матриці $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$ і $\mathbf{C}$ обчислюються згідно з правилами:

$$\mathbf{M} := \left\{ m(\varphi_i, \varphi_j) \right\}_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{A} := \left\{ a(\varphi_i, \varphi_j) \right\}_{i,j=1}^N, \quad \mathbf{C} := \left\{ c(\varphi_i, \varphi_j) \right\}_{i,j=1}^N. \tag{6.3}$$

Зазначимо, що внаслідок властивостей білінійних форм (1.2)

матриці $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$ та $\mathbf{C}$ із (6.3) симетричні і додатно визначені. $\tag{6.4}$

Тому, якщо виконані умови (4.12) та (4.8), матриці систем алгебричних рівнянь (6.1) та (6.2) симетричні і додатно визначені; завдяки цьому їхні розв'язки успішно знаходяться як прямими методами (скажімо, методом Холецкого), так і ітераційними.

Порівняльний аналіз трудомісткості обчислень процесу розв'язування систем (6.1) та (6.2) свідчить, що за всіх інших однакових умов система (6.2) потребує не лише меншої кількості арифметичних операцій, але й меншого об'єму ресурсів пам'яті комп'ютера. Особливого виграшу можна досягнути, якщо матриця M має (а це досить таки типова ситуація в практиці методу скінченних елементів) діагональну структуру.

Водночас у разі потреби інтегрування варіаційної задачі зі змінною довжиною кроку Δt структура матриці системи (6.1) на відміну від системи (6.2) дає змогу уникнути трудомісткого переформування матриці при переході від величини кроку Δt до кроку Δt_1 . Дійсно, якщо обчислення з кроком Δt виконувались зі значеннями параметрів β та γ , то при переході на крок Δt_1 матриця системи (6.2) залишається незмінною, якщо нові значення параметрів β_1 та γ_1 вибрані у такий спосіб, що

$$\Delta t \beta = \Delta t_1 \beta_1 \quad \Delta t^2 \gamma = \Delta t_1^2 \gamma_1. \quad (6.5)$$

Міркування стосовно різних обчислювальних аспектів, які пов'язані з процесом рекурентного розв'язування рівнянь типу (6.1) чи (6.2), містить праця [5].

7. Стійкість рекурентних схем. З огляду на властивості білінійних форм (1.2) введемо такі норми:

$$\begin{aligned} |u| &:= m^{1/2}(u, u), & \|u\| &:= c^{1/2}(u, u), \\ \|u\| &:= a^{1/2}(u, u) & \forall u \in V. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Як наслідок апроксимації Ерміта (2.4) зазначимо, що

$$w^{j+1/2} := w^{j+1/2}. \quad (7.2)$$

Використовуючи цей факт, перепишемо проєкційне рівняння схеми (5.1) у вигляді

$$\begin{aligned} m(w^{j+1/2}, v) + a(w^{j+1/2} + \Delta t(\beta - \frac{1}{2})w^{j+1/2}, v) + \\ + c(v^{j+1/2} + \Delta t(\beta - \frac{1}{2})w^{j+1/2} + \frac{1}{2}\Delta t^2(\theta - \beta)w^{j+1/2}, v) = \\ = m(f^{j+1/2}, v) \quad \forall v \in V, j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (7.3)$$

Приймаючи в цьому рівнянні $v := v^{j+1/2} := w^{j+1/2}$, після нескладних перетворень одержуємо енергетичне рівняння:

$$\begin{aligned}
& |w^{m+1}|^2 + \Delta t \left\{ \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \|w^{m+1}\|^2 + \frac{1}{2} \Delta t (\theta - \beta) \|w^{m+1}\|^2 \right\} + \\
& + \|v^{m+1}\|^2 + 2\Delta t \left\{ \sum_{j=0}^m \|w^{j+1/2}\|^2 + \Delta t \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \sum_{j=0}^m \|w^{j+1/2}\|^2 \right\} = \\
& = |w^0|^2 + \|v^0\|^2 + \Delta t \left\{ \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \|w^0\|^2 + \frac{1}{2} \Delta t (\theta - \beta) \|w^0\|^2 \right\} + \\
& + 2\Delta t \sum_{j=0}^m m(f^{j+1/2}, w^{j+1/2}), \quad m = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Застосовуючи до останнього рівняння нерівність

$$m(f^{j+1/2}, w^{j+1/2}) \leq \frac{1}{2} \left\{ C |f^{j+1/2}|^2 + \|w^{j+1/2}\|^2 \right\} \tag{7.5}$$

зі сталою $C > 0$, значення якої не залежить від $w^{j+1/2}$ та $f^{j+1/2}$, приходимо до такої апріорної оцінки:

$$\begin{aligned}
& |w^{m+1}|^2 + \Delta t \left\{ \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \|w^{m+1}\|^2 + \frac{1}{2} \Delta t (\theta - \beta) \|w^{m+1}\|^2 \right\} + \\
& + \|v^{m+1}\|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^m \left\{ \|w^{j+1/2}\|^2 + \frac{1}{2} \Delta t \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \|w^{j+1/2}\|^2 \right\} \leq \\
& \leq |w^0|^2 + \|v^0\|^2 + \Delta t \left\{ \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \|w^0\|^2 + \frac{1}{2} \Delta t (\theta - \beta) \|w^0\|^2 \right\} + \\
& + \Delta t C \sum_{j=0}^m m \|f^{j+1/2}\|^2, \quad m = 0, 1, \dots
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Одержані результати підсумовує така теорема.

Теорема про стійкість рекурентних схем.

Нехай розв'язок $u(t)$ задачі (1.1) такий, що $u'(0), u''(0) \in V$ і дискретизована в часі варіаційна задача (1.1) розв'язується за допомогою однокрокової рекурентної схеми (5.1) або (5.2). Тоді кожна з цих схем дає змогу єдиним чином визначити трійку $\psi^m := \{u^m, v^m, w^m\}$, $m=1, 2, \dots, i$ при цьому справедливі такі твердження:

(i) Рекурентна схема (5.1) безумовно (стосовно кроку інтегрування Δt) стійка в сенсі норми

$$\left\{ \|v^m\|^2 + |w^m|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \|w^{j+1/2}\|^2 \right\}^{1/2},$$

якщо її параметри β і θ задовольняють нерівності

$$\theta \geq \beta \geq \frac{1}{2}; \quad (7.7)$$

(ii) Однопараметрична схема (5.2) безумовно стійка для будь-яких

$$\gamma \geq \frac{1}{2}. \quad (7.8)$$

8. Висновки й узагальнення. У даній праці побудовані однокрокові рекурентні схеми (5.1) та (5.2) інтегрування еволюційної задачі (1.1). Ці схеми точно враховують початкові умови задачі, задовольняють її варіаційне рівняння у стартові моменти часу кожного кроку інтегрування і дають змогу змінювати його величину в процесі обчислень. Визначені умови стійкості запропонованих схем у відповідних енергетичних нормах. Ужита тут методологія є узагальненням підходу до побудови та дослідження рекурентних схем еволюційних варіаційних задач, який розвинений автором у працях [4-6].

1. Бате К.-Ю., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с. 2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с. 3. Москальков М.Н. Схемы метода конечных элементов повышенной точности для решения нестационарных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 1980. Т.16. N 7. С. 1283-1292. 4. Шинкаренко Г.А. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьезоэлектричества. II. Дискретизация и разрешимость нестационарных задач // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30. N 2. С.317-326. 5. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991. 88 с. 6. Шинкаренко Г.А. Про одну модифікацію схеми Ньюмарка // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1989. Вип. 31. С.46-52. 7. Geradin M., Rixen D. Mechanical vibrations: Theory and application to Structural Dynamics. Chichester, N.-Y. etc: Wiley, 1994. 412 p. 8. Hughes T.J.R. The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis. Englewood Cliffs, N.-J.: Prentice Hall, 1987. 803 p. 9. Park K.S. Transient analysis methods in computational dynamics // Finite elements: Theory and applications / Ed. D.L.Dwoeys D.L. et. al. N.Y. etc.: Springer, 1988. P.240-267.

Стаття надійшла до редколегії 08. 02. 96.

Г.А. Шинкаренко, О.Г. Шинкаренко

Чисельне дослідження варіаційних задач міграції пасивних домішок*

Прогнозування наслідків перенесення та дифузії певної субстанції (тепла, вологи, поживних речовин, забруднювальних домішок тощо) в рухомому середовищі є важливою передумовою у вирішенні різноманітних проблем охорони довкілля та сучасного господарювання [1,3,6,8]. Поряд із очевидною актуальністю можливих застосувань відшукування просторово-часового розподілу концентрації субстанції, що нас цікавить, потребує кваліфікованого використання сучасних числових методів та їх комп'ютерної реалізації [2,7,9,11,13] (див. огляд з цієї тематики [14]).

У даній статті продовжується дослідження праць [4,5] з таких питань, як оцінка впливу стисливості (нестисливості) середовища на коректність задачі міграції та можливості практичного використання запропонованих проекційно-сіткових схем [4,5] шляхом розв'язування модельних задач з домінуючим конвективним перенесенням.

1. Постановка задачі. Виділимо в рухомому суцільному середовищі обмежену зв'язну область Ω точок $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ евклідового простору R^n . Нехай межа Γ області Ω неперервна за Ліпшицем. Позначимо через $\nu = \{\nu_i\}_{i=1}^n$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ , $\nu_i = \cos(\nu, x_i)$.

Припустимо, що рух частинок цього середовища описується відомим вектором швидкості $w = \{w_i(x, t)\}_{i=1}^n$, де t — змінна часу $0 < t \leq T < +\infty$.

Сформулюємо тепер початково-крайову задачу про перенесення (дифузії) пасивної субстанції в такому середовищі:

© Шинкаренко Г.А., Шинкаренко О.Г., 1996

* Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант № APU 051113.

знайти концентрацію домішки $\phi = \phi(x, t)$ та вектор її повного

потoku $q = \{q_i(x, t)\}_{i=1}^n$ такі, що

$$\begin{aligned} \phi' + \operatorname{div} q + (\sigma - \operatorname{div} w)\phi &= f \\ q_i - \phi w_i + \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} &= 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T] \\ \phi &= 0, \quad (x, t) \in \Gamma_\phi \times (0, T], \quad \operatorname{mes}(\Gamma_\phi) > 0, \\ \sum_{i=1}^n (q_i - \phi w_i) \nu_i &= \alpha(\phi - \phi_c), \quad (x, t) \in \Gamma_q \times (0, T], \quad \Gamma_q = \Gamma \setminus \Gamma_\phi, \\ \phi|_{t=0} &= \phi_0, \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

Тут $\mu = \{\mu_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ — матриця заданих коефіцієнтів турбулентності, що має властивості симетрії та додатної визначеності:

$$\begin{cases} \mu_{ij}(x) = \mu_{ji}(x) \\ \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \mu_0 = \text{const}, \xi \in R; \end{cases}$$

$\sigma = \sigma(x) \geq 0$ — коефіцієнт біохімічного розпаду субстанції;
 $\alpha = \alpha(x) \geq 0$ — коефіцієнт взаємодії з контактуючим середовищем;
 $f = f(x, t)$ та $\phi_c = \phi_c(x, t)$ — інтенсивності джерел субстанції, розподілених в області Ω та на межі Γ відповідно;

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi &:= \left\{ x \in \Gamma \mid \sum_{i=1}^n w_i(x, t) \nu_i \leq 0 \right\}, \\ \phi' &:= \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \operatorname{div} w := \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Зауваження 1.1. Нехай $L := \operatorname{diam} \Omega$, тоді, виконавши заміну змінних за правилом $z_i := \frac{x_i}{L}$, надамо вектору повного потоку q такого вигляду:

$$q_i := \|w\| \left\{ \phi \frac{w_i}{\|w\|} - \frac{1}{Pe} \frac{1}{\|\mu\|} \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial z_j} \right\}, \quad (1.2)$$

де $\|w\|$ і $\|\mu\|$ деякі норми вектора w і матриці μ відповідно;

$Pe := \frac{\|w\| L}{\|\mu\|}$ — число Пекле, що характеризує міру впливу конвекції та

дифузії на процес міграції субстанції. Зокрема, у випадку $Pe \rightarrow \infty$ формула (1.2) сигналізує, що рівняння параболічного типу задачі (1.1) вироджується в рівняння гіперболічного типу першого порядку. Тому малі збурення (породжені, наприклад, апроксимацією початкових і крайових умов тощо) можуть необмежено поширюватись без помітного згасання. Отже, при великих числах Пекле розв'язування задачі (1.1) ставить підвищені вимоги до чисельних схем.

2. Варіаційна постановка задачі. Введемо простори

$$H := L^2(\Omega), \quad W := H(\operatorname{div}; \Omega), \quad V := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0, x \in \Gamma_q\} \text{ і}$$

сформулюємо відповідну (1.1) варіаційну задачу:

задано $\phi_0 \in H$, $w \in L^\infty(0, T; W)$, $l \in L^2(0, T; V')$;

знайти $\phi \in L^2(0, T; V)$ таку, що

$$\begin{cases} m(\phi'(t), \phi) + b(w(t); \phi(t), \phi) + a(\phi(t), \phi) = \langle l(t), \phi \rangle & \forall \phi \in V \\ m(\phi(0) - \phi_0, \phi) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Тут

$$\left\{ \begin{aligned} m(\phi, \phi) &:= \int_{\Omega} \phi \phi \, dx, \\ b(w; \phi, \phi) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \phi \phi \operatorname{div} w \right\} dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \phi \phi \sum_{i=1}^n w_i v_i \, d\gamma, \\ a(\phi, \phi) &:= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \mu_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \sigma \phi \phi \right\} dx + \int_{\Gamma_q} \alpha \phi \phi \, d\gamma, \\ \langle l, \phi \rangle &:= \int_{\Omega} f \phi \, dx + \int_{\Gamma_q} \alpha \phi_c \phi \, d\gamma. \end{aligned} \right. \quad (2.2)$$

Зауваження 2.1. Якщо додатково припустити, що міграція субстанції відбувається у нестисливому середовищі, то задача (2.1) збігається з задачею (2.2) з праці [4].

Теорема 2.1 (про коректність варіаційної задачі):

Нехай дані задачі (1.1) такі, що

$$b(w; \phi, \phi) \geq 0 \quad \forall \phi, \phi \in V. \quad (2.3)$$

Тоді варіаційна задача (2.1) має єдиний розв'язок ϕ , причому

$$\phi \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad \phi' \in L^2(0, T; V')$$

і правильною є априорна оцінка

$$m(\phi(t), \phi(t)) + \int_0^t \{a(\phi, \phi) + b(w(\tau); \phi, \phi)\} d\tau \leq m(\phi_0, \phi_0) + \int_0^t \|l(\tau)\|_{V'}^2 d\tau \quad \forall t \in (0, T]$$

Доведення. У разі виконання припущення (2.3) правильним є доведення теореми 4.1 з праці [4].

3. Проекційно-сіткова схема. Для розв'язування варіаційної задачі (2.1) застосуємо напівдискретизацію Гальоркіна за просторовими змінними й однокрокову рекурентну процедуру інтегрування в часі [10]; в результаті отримаємо схему:

задано параметри $h, \Delta t, \gamma = \text{const} > 0$ і $\phi^0 \in R^N$;

знайти вектор $\phi^{j+1} \in R^N$ такий, що

$$\begin{cases} \{M + \Delta t \gamma (B(t_{j+\frac{1}{2}}) + A)\} \phi^{j+\gamma} = \Delta t \gamma L(t_{j+\frac{1}{2}}) + M \phi^j \\ \phi^{j+1} := \phi^{j+1} + \gamma^{-1}(\phi^{j+\gamma} - \phi^j), \quad j = 0, 1, \dots, K \end{cases} \quad (3.1)$$

Побудова (3.1) передбачає, що процедура Гальоркіна використовує базис $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ підпростору $V_h \subset V$, $\dim V_h = N$, та інтегрування в часі виконується з кроком Δt , $\Delta t K = T$. Тоді наближений розв'язок задачі (2.1) визначається формулою

$$\phi_{h\Delta t}(x, t) := \sum_{k=1}^N \left\{ \phi_k^j + \frac{t-t_j}{\Delta t} \phi_k^{j+1} \right\} \phi_k(x), \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (3.2)$$

$$\forall x \in \Omega \quad j = 0, 1, \dots, K$$

4. Чисельні приклади. Для чисельної реалізації розв'язку задачі (2.1) розроблено програмний комплекс для персональних комп'ютерів мовою C++. Передбачена можливість розв'язування стаціонарних і нестаціонарних задач з використанням методу скінченних елементів. Обчислення виконується на ізопараметричних білінійних та біквадратичних чотирикутних скінченних елементах. Програма дає змогу повністю використовувати розширену пам'ять комп'ютера, а вільне місце на жорсткому диску розглядається як

віртуальна пам'ять, що забезпечує розв'язування задачі на великих сітках.

Робота програми перевірена на конкретних задачах. Розв'язувались двовимірні стаціонарні та нестаціонарні задачі з домінуючими конвективними членами.

4.1. Стаціонарна задача. В L-подібній області $\Omega = (0,3) \times (0,2) \setminus (0,1) \times (0,1)$ розв'язувалась стаціонарна крайова задача перенесення (дифузії) [12], для якої $\sigma = 0$, $\mu_y = 10^{-3} \delta_y$, $w = [1,0]^T$. На границі області задана однорідна крайова умова типу Діріхле. Для цих значень параметрів $Pe \approx 1000$. Для знаходження розв'язку методом скінченних елементів використовувались біквадратичні чотирикутні елементи з 9 вузлами.

На рис. 1, 2 подані результати виконаних обчислень. У випадку, зображеному на рис. 1, розбиття області складається з 80 елементів з 361 вузлом. "Локальне" число Пекле на елементі $Pe_e \approx 250$. Добре видно осциляції розв'язку в тих частинах області Ω , де суттєвою є зміна $grad \phi$. В іншому випадку (рис. 2), розбиття області складається з 320 елементів з 1361 вузлом. "Локальне" число Пекле на елементі $Pe_e \approx 125$. Можемо простежити, як зростає якість обчислень зі зменшенням "локального" числа Пекле.

4.2. Нестаціонарна задача. У прямокутнику $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ розв'язувалась початково-крайова задача (1.1), яка описує рух по колу початкового викиду субстанції. У цьому прикладі $\sigma = 0$, $\mu_y = 10^{-3} \delta_y$, $w = w(t) = [2 \sin 2\pi t, -2 \cos 2\pi t]^T$; $\phi_0(x)$ — функція з компактним носієм, яка характеризує початковий розподіл субстанції і не дорівнює нулю лише в області $D = (-5/6, -1/3) \times (-1/6, 1/6)$. Таким чином, за одиничний відрізок часу середовище робить повний оберт навколо точки $(0,0)$ за рухом годинникової стрілки. На рис. 3 зображено результати обчислень, проведених на 900 біквадратичних елементах з 3721 вузлом. Для інтегрування в часі використовувалась схема (3.1) з параметрами $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 1/30$: а — розподіл у початковий момент часу, б — після 5 кроків, в — після 20 кроків.

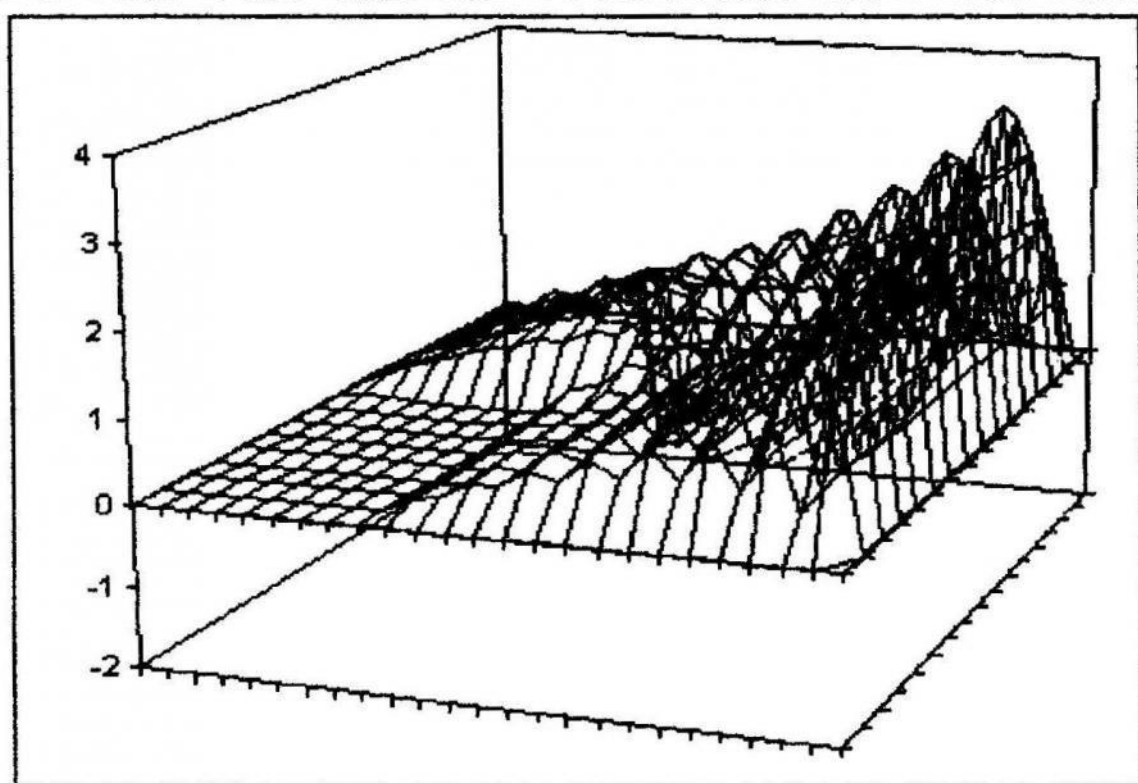


Рис. 1

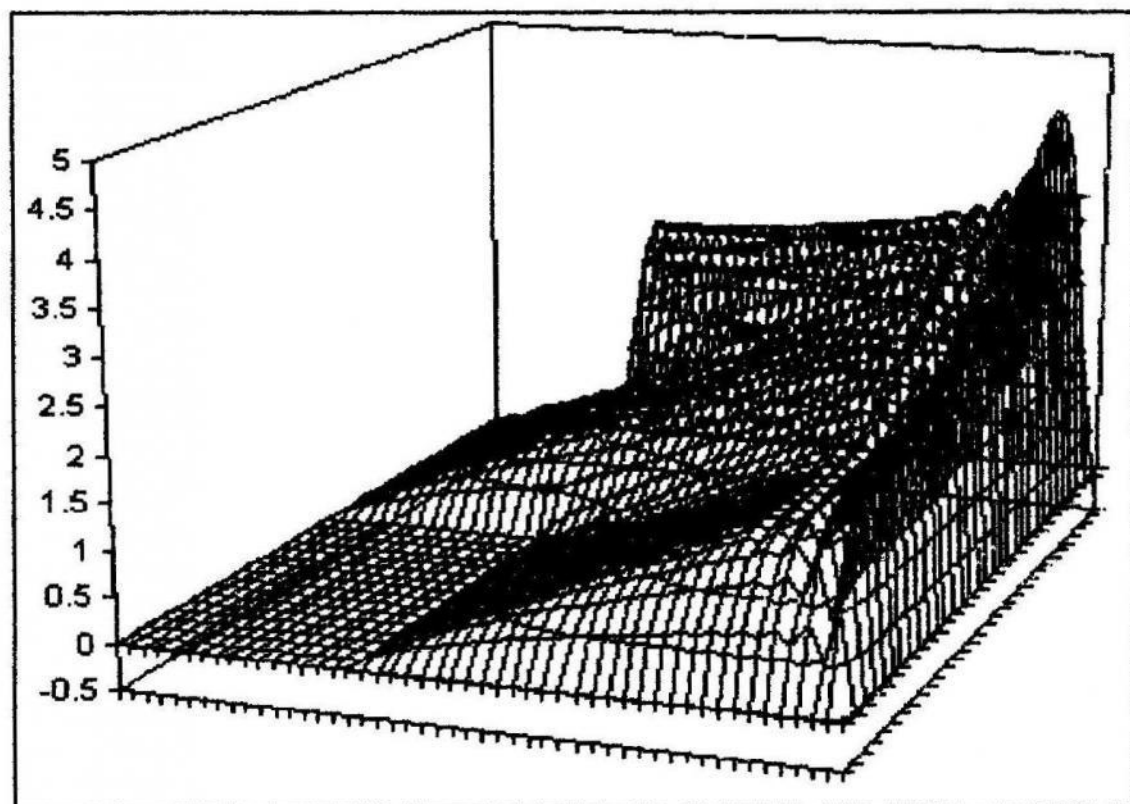


Рис. 2

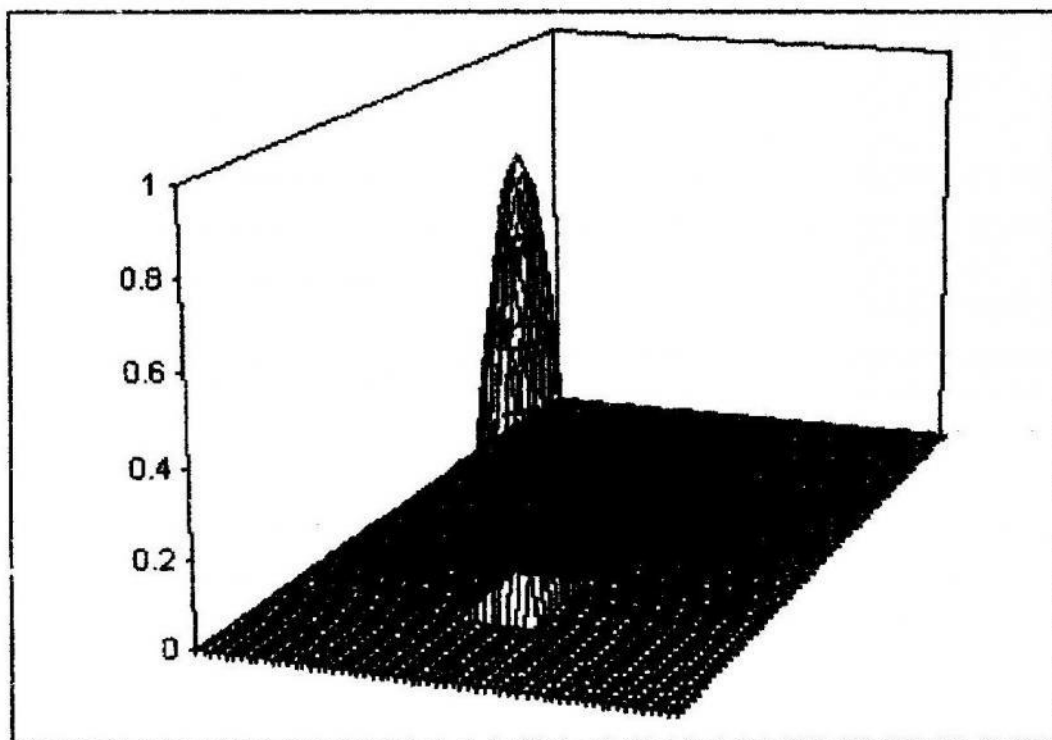


Рис. 3, а

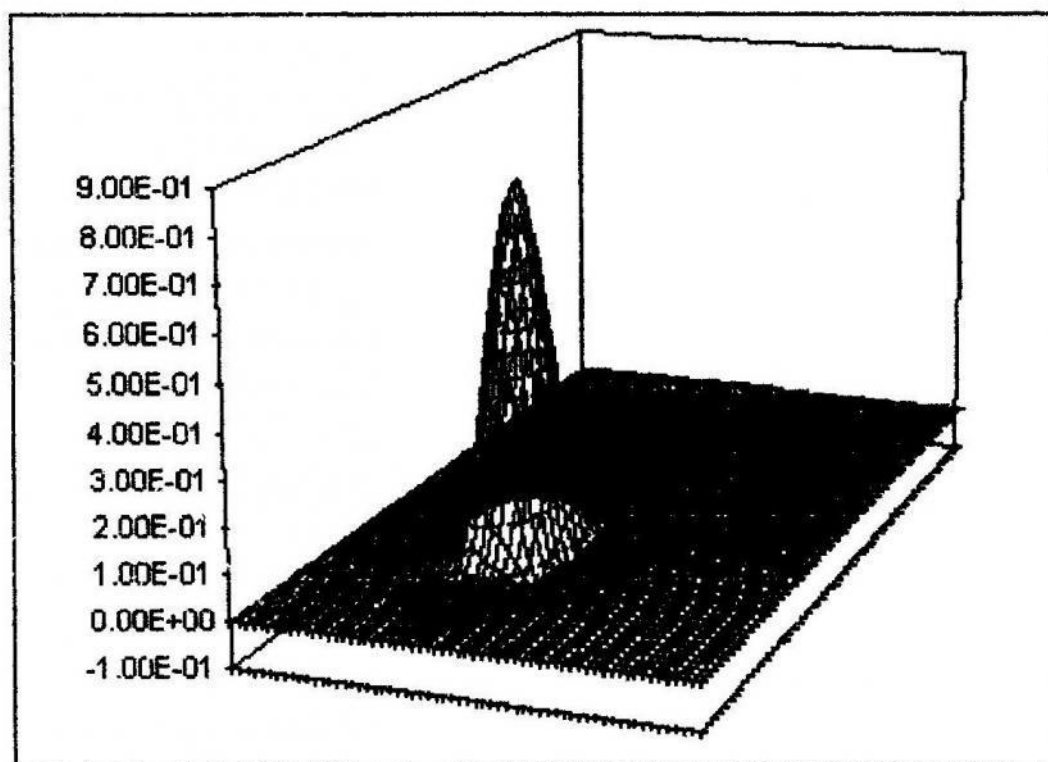


Рис. 3, б

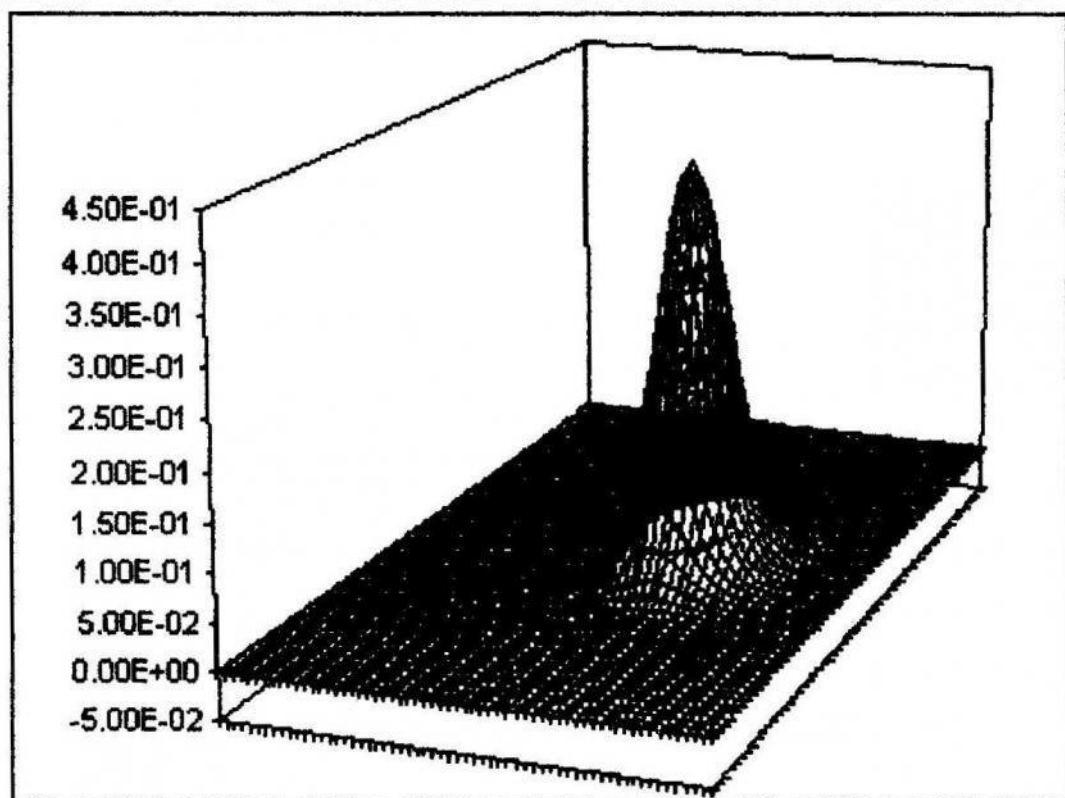


Рис. 3, в

1. Владимиров А.М., Ляхин Ю.И., Матвеев Л.Т., Орлов В.Г. Охрана окружающей среды. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 424 с.
2. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. К.: Наук. думка, 1995. 262 с.
3. Защита атмосферы от промышленных загрязнений. Справ. в 2 ч./Под ред. Кальверта С., Инглунда Г.М. М.: Металлургия, 1988. Ч.2. 712 с.
4. Зубов В.М., Терлецька С.Ю., Шинкаренко Г.А. Розв'язуваність та апроксимація узагальнених розв'язків початково-крайових задач міграції атмосферних домішок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 41. С. 62-70.
5. Зубов В.М., Шинкаренко Г.А. Розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач переносу та дифузії домішок у нестисливій атмосфері // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1992. Вип. 37. С. 55-60.
6. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование миграции подземных вод. М.: Недра, 1986. 208 с.
7. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
8. Сиротенко О.Д. Математическое моделирование водно-теплого режима и продуктивности агроэкосистем. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 168 с.
9. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2 т. М.: Мир, 1991. Т.17 504 с.
10. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К.: НМК ВО, 1991. 88 с.
11. Bermudes A. Numerical modelling of water pollution problems // Environment, economics and their mathematical models / Ed. Diaz J.-I., Lions J.-L.. Paris: Masson, 1994. P. 1-18.
12. Glowinski R. Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. N.Y.: Springer, 1984.

493p. 13. Hughes T.J.R., Wing K.L., Brooks A. Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation//J. Comput. Phys. 1979. Vol.30. N1. P. 1-60, 14. Pironneau O. The Finite Element Method for Hyperbolic Systems//Finite Element: Theory and Application/Ed. Dwoyer D.L. et al. N.Y. etc.: Springer, 1988. P. 67-93.

Стаття надійшла до редколегії 11.01.96.

УДК 539.214

Р. І. Кісіль, І. С. Муха

Двовимірні схеми методу скінченних елементів для дослідження пружнопластичного деформування тонкостінних гнучких тіл

Нехай тверде тіло займає об'єм V в R^3 та обмежене поверхнею S . Припустимо, що тіло віднесене до деякої системи криволінійних координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ і

$$V = \{\bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in v\}.$$

Розглядатимемо процес деформування твердого, трансверсально-ізотропного, однорідного тіла під дією силових навантажень. Припустимо, що всі зовнішні та внутрішні сили є консервативними. Крім цього, вважатимемо, що деформації тіла є помірно малими, тобто такими, при яких приріст віртуальних робіт внутрішніх сил може бути поданий у вигляді

$$\delta W_B = \int_V \Sigma : \delta \varepsilon(U) dV,$$

де Σ — симетричний тензор напружень Піоли-Кірхгофа;

$\varepsilon(U) = E(U) + \frac{1}{2} \Omega(U, U)$ — симетричний тензор деформацій Гріна;

$E(U) = \frac{1}{2}(\nabla U^T + \nabla U)$ — тензор лінійних (малих) деформацій;

∇U — тензор дисторсії: $[\nabla U]_{ij} = U_{j,i}$; $\Omega(U, U)$ — деякий симетричний білінійний оператор.

Останнє припущення справедливе у випадку, коли в тілі присутні малі переміщення точок при середніх кутах повороту їхніх околів. Такі гіпотези адекватно відображають процеси помірної деформування тонкостінних гнучких тіл.

Будемо припускати, що процес деформування тіла відбувається досить повільно, отже, цей процес можна розглядати як ряд послідовних рівноважних станів. Це означає, що модель деформування тіла може бути записана у квазістатичній постановці.

Будемо вважати, що в тілі в момент часу τ_m присутні початкові переміщення U_m та напруження Σ_m , і вони перебувають у рівновазі з масовими силами Q_m і поверхневими напруженнями $\tilde{\Sigma}_{v\,m}$ на частині поверхні S_Σ . На частині поверхні S_u переміщення точок задані і дорівнюють $\tilde{U}$. Припустимо, що за час $\Delta\tau_m = \tau_{m+1} - \tau_m$ на тіло подіяли додаткові масові сили ΔQ_m і поверхневі напруження $\Delta\tilde{\Sigma}_{v\,m}$, а точки поверхні S_u здійснили додаткові переміщення $\Delta\tilde{U}_m$. Під дією цих факторів тіло змінило свою деформовану конфігурацію. Якщо вважати, що стан тіла в момент часу τ_m є зафіксований і не отримує варіації, то тоді

$$\int_V (\Sigma_m + \Delta\Sigma_m) : \delta\Delta\varepsilon_m \, dV = \int_V (Q_m + \Delta Q_m) \cdot \delta\Delta U_m \, dV + \int_{S_\Sigma} (\tilde{\Sigma}_{v\,m} + \Delta\tilde{\Sigma}_{v\,m}) \cdot \delta\Delta U_m \, dS, \quad (1)$$

де $\Delta\Sigma_m$, $\Delta\varepsilon_m$ і ΔU_m — прирости, отримані відповідними величинами за час $\Delta\tau_m$. Розв'язок варіаційного рівняння (1) будемо шукати ітераційним методом. Припустимо, що нам відомий деякий наближений розв'язок $\Delta U_m^{(i)}$, $\Delta\varepsilon_m^{(i)}$, $\Delta\Sigma_m^{(i)}$. Подамо точний розв'язок у вигляді

$$\Delta U_m = \Delta U_m^{(i)} + dU_m^{(i)}, \quad \Delta U_m^{(i)}|_{S_u} = \Delta\tilde{U}_m, \quad dU_m^{(i)}|_{S_u} = 0, \\ \Delta\Sigma_m = \Delta\Sigma_m^{(i)} + d\Sigma_m^{(i)}. \quad (2)$$

Припустимо, що величини $dU_m^{(i)}$ і $d\Sigma_m^{(i)}$ є величинами вищого порядку мализни порівняно з відповідними Δ — величинами.

Будемо вважати, що існує зв'язок між безмежно малими приростами напружень і безмежно малими приростами деформацій у вигляді

$$d\Sigma_m^{(i)} = R_{\Sigma\varepsilon}(U_m, \Delta U_m^{(i)}, \Sigma_m, \Delta\Sigma_m^{(i)}) : d\varepsilon_m^{(i)} + R_{\Sigma 0}(U_m, \Delta U_m^{(i)}, \Sigma_m, \Delta\Sigma_m^{(i)}), \quad (3)$$

де $R_{\Sigma\varepsilon}$ — деякий симетричний додатно-визначений тензор четвертого рангу; $R_{\Sigma 0}$ — тензор другого рангу. Співвідношення (3) справедливе у випадку пружнопластичного деформування твердого тіла [2].

Підставляючи (2) і (3) в (1) і нехтуючи членами порядку $(dU_m^{(i)})^3$ і $(dU_m^{(i)})^4$, отримуємо варіаційне рівняння для визначення $dU_m^{(i)}$:

$$\delta L_m(U_m, \Delta U_m^{(i)}, \Sigma_m, \Delta\Sigma_m^{(i)}, dU_m^{(i)}) = 0, \quad dU_m^{(i)}|_{S_u} = 0, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} L_m(U, \Delta U, \Sigma, \Delta\Sigma, dU) = & \frac{1}{2} \int_V (\Sigma + \Delta\Sigma + R_{\Sigma 0}) : \Omega(dU, dU) dV + \\ & + \int_V (\Sigma + \Delta\Sigma + R_{\Sigma 0}) : [E(dU) + \Omega(U + \Delta U, dU)] dV - \\ & - \int_V (Q_m + \Delta Q_m) \cdot dU dV - \int_{S_\Sigma} (\tilde{\Sigma}_{v m} + \Delta\tilde{\Sigma}_{v m}) \cdot dU dS \end{aligned}$$

Варіаційне рівняння (4) є задачею про мінімум квадратичного функціоналу і може бути розв'язане за допомогою МСЕ. Проте побудова чисельних схем такого типу наптовхується на значні труднощі, пов'язані з необхідністю багаторазового розв'язування задачі (4), котра сама по собі є досить складною і ресурсомісткою. Тому у даній праці запропонований комбінований підхід до розв'язання цієї проблеми. Він ґрунтується на тому, що аналіз полів напружень і пластичних деформацій, які виникають в тілі під час квазістатичного деформування, здійснюється в рамках просторових співвідношень деформування. Згідно з цими ж співвідношеннями будуються тензори $R_{\Sigma\varepsilon}$ і $R_{\Sigma 0}$, які входять у співвідношення (3). Однак для розв'язування варіаційної задачі (4) здійснюється редукція до двовимірного простору з використанням гіпотез теорії оболонок, а також гіпотези щодо розподілу напружень по товщині тіла. За розв'язками, отриманими у рамках двовимірної задачі, відновлюється просторове поле деформацій, а за ним і поле напружень, виходячи зі співвідношень просторової теорії.

Для отримання редукованої задачі припустимо, що характерний розмір тіла вздовж напрямку α_3 рівний h і значно менший, ніж два інших, тобто

$$V = \{ \bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, -h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2 \}.$$

Приймемо такі гіпотези.

По-перше, припустимо, що в тілі наявний узагальнений плоский напружений стан, тобто $\Sigma_{33} = 0$.

По-друге, приймемо гіпотези Тимошенка для деформування нормалі, згідно з якими

$$U_s(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_s(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_s(\alpha_1, \alpha_2), \quad s = 1, 2,$$

$$U_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = u_3(\alpha_1, \alpha_2).$$

Обтиском оболонки будемо нехтувати, що не протирічить основним припущенням теорії середнього згину оболонок.

Виділяючи в інтегралах по об'єму V інтеграл по α_3 у межах від $-h/2$ до $h/2$ та усереднюючи статичні величини, отримуємо редуковану варіаційну постановку лінеаризованої задачі:

$$\delta l_m(u_m, \Delta u_m^{(i)}, \sigma_m, \Delta \sigma_m^{(i)}, du_m^{(i)}) = 0, \quad du_m^{(i)}|_{S_u} = 0. \quad (5)$$

У праці [1] наведений розгорнутий вираз l_m для випадку геометрично нелінійного пружного деформування. У випадку непружного деформування функціонал l_m будується аналогічно. Однак при цьому використовується гіпотеза про те, що розподіл напружень по товщині тіла є кусково-лінійним.

Для розв'язування редукованої задачі (5) побудована чисельна схема методу скінченних елементів на основі ізопараметричних апроксимацій другого порядку. Зазначимо, що у випадку геометрично нелінійної пружної задачі така схема відрізняється від схеми МСЕ для розв'язання лінійної пружної задачі тільки тим, що для розв'язування першої необхідно багатократно розв'язувати другу. Проте у випадку, коли тіло деформується непружно, схема ускладнюється тим, що у кожному вузлі скінченноелементної сітки слід обчислювати значення напружень в деякій множині точок по товщині. Дослідження показали, що для отримання адекватної картини деформування цих точок має бути більше, ніж 10, а у випадку декількох пластичних зон — ще більше. Обчислені значення напружень потрібно зберігати у всіх точках і накопичувати при переході до наступного кроку квазістатичного навантаження.

Описана методика використовувалась для чисельного розв'язання задачі пружнопластичного деформування трійникового з'єднання трубопроводів (рис. 1). Задачу розв'язували при таких значеннях геометричних та фізичних величин: $L_1 = 1.7\text{м}$, $L_2 = 1.7\text{м}$, товщина труб $h_1 = h_2 = 0.05\text{м}$, $R_1 = 0.5\text{м}$, $R_2 = 1.0\text{м}$; модуль Юнга $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, межа текучості $\sigma_T = 218 \text{ МПа}$. Конструкцію навантажували внутрішнім тиском інтенсивності $p_n = 6 \text{ МПа}$. На рис. 2 зображені залишкові пластичні деформації по товщині тіла в найбільш напружених точках А та В. Лінія 1 відповідає кільцевим деформаціям у точці А, а лінія 2 — осьовим. Лінії 3 та 4 відображають аналогічні залишкові деформації у точці В.

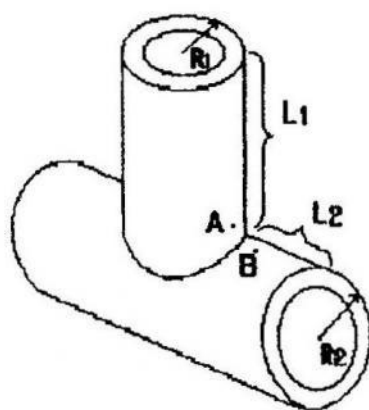


Рис.1

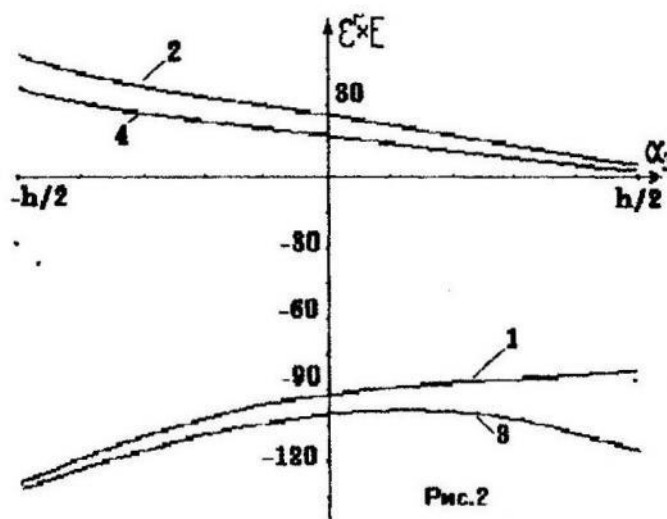


Рис.2

Дослідження описаної методики на розглянутій задачі показало її переваги, які полягають у тому, що достатньо адекватну картину напружено-деформованого стану можна отримати при значній економії обчислювальних ресурсів.

1. Муха І.С., Савула Я.Г. Нелінійна модель пружного деформування тонкостінних гнучких тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. Вип. 41, С.82-91.
2. Simo J.C., Taylor R.L. Consistent tangent operators for rateindependent elastoplasticity // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1985. Vol.48. P.101-118.

Стаття надійшла до редколегії 24.01.96

І.І.Дияк, В.М.Макар

Дослідження просторової динамічної задачі теорії пружності для неоднорідних анізотропних тіл*

У даній праці на основі моделі осесиметричної просторової лінійної теорії пружності з урахуванням анізотропії пружного матеріалу пропонується чисельний підхід до розв'язання динамічної задачі, який ґрунтується на дискретизації вихідної задачі за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів (МСЕ) по просторових координатах і використанні методу розкладу за власними формами для інтегрування в часі [1].

У циліндричній системі координат розглядається осесиметричне кусково-однорідне анізотропне тіло, що займає обмежену область $\Omega \subset R^3$ з неперервною за Ліпшицем границею. Тоді, як відомо [4], визначення динамічної реакції такого тіла полягає у знаходженні вектора переміщень $u = (u_r, u_z, u_\varphi)^T$, що задовольняє рівняння динамічної рівноваги, кінематичні та статичні граничні умови на границі області $\Gamma = \partial\Omega$ і початкові умови, що накладені на переміщення та швидкості. При цьому виконуються геометричні лінійні співвідношення Коші та фізичні співвідношення узагальненого закону Гука, які в матричній формі можна відповідно записати у вигляді

$$\varepsilon = Bu \quad (1)$$

$$\sigma = D\varepsilon \quad (2)$$

де $\sigma = \{\sigma_{rr}, \sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{z\varphi}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}\}^T$, $\varepsilon = \{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{z\varphi}, \varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{rz}\}^T$;

B - матриця диференціальних операторів, вигляд якої наведений у праці [2]; матриця пружних констант D у випадках ортотропного, транзотропного та ізотропного матеріалу має таку структуру:

© Дияк І.І., Макар В.М., 1996

* Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISEEP), гранти № APU051042, № PSU061060

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & 0 & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Причому для ізотропного матеріалу

$d_{11} = d_{22} = d_{33} = \lambda + 2\mu$, $d_{12} = d_{13} = d_{23} = \lambda$, $d_{44} = d_{55} = d_{66} = \mu$,
де λ, μ — коефіцієнти Ламе;

для ортотропного

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad d_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \quad d_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ d_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad d_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad d_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta}, \\ d_{44} &= 2G_{23}\Delta, \quad d_{55} = 2G_{13}\Delta, \quad d_{66} = 2G_{12}\Delta, \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 E_3}, \end{aligned}$$

для транстропного

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{E' - E(\nu')^2}{E(E')^2 \Delta}, \quad d_{22} = \frac{E' - E(\nu')^2}{E(E')^2 \Delta}, \quad d_{33} = \frac{1 - \nu^2}{E^2 \Delta}, \\ d_{12} &= \frac{\nu E' + E(\nu')^2}{E(E')^2 \Delta}, \quad d_{13} = \frac{\nu'(1 + \nu)}{EE' \Delta}, \quad d_{23} = \frac{\nu'(1 + \nu)}{EE' \Delta}, \\ d_{44} &= 2G'\Delta, \quad d_{55} = 2G'\Delta, \quad d_{66} = 2G\Delta, \\ \Delta &= \frac{E'(1 - \nu^2) - 2E(\nu')^2(1 + \nu)}{(EE')^2}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \end{aligned}$$

де $E_1, E_2, E_3, E, E', \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}, \nu, \nu', G_{12}, G_{13}, G_{23}, G'$ — так звані технічні константи [3].

З метою застосування МСЕ для чисельного розв'язання поставленої задачі слід перейти до варіаційної постановки. Для цього вихідні рівняння руху домножуємо на довільну вектор-функцію V , що належить простору

$$Q_A = \left\{ V = (v_r, v_z, v_\varphi)^T : v_i = g_i \text{ на } \Gamma_u, v_i \in W_2^1(\Omega), i = r, z, \varphi \right\}$$

де Γ_u — частина границі області Ω на якій задані кінематичні граничні умови. Інтегруючи за частинами з використанням формули Гріна і беручи до уваги статичні граничні умови, отримуємо систему варіаційних рівнянь:

$$\begin{aligned} a_{11}(u_r, v) + a_{12}(u_z, v) + a_{13}(u_\varphi, v) + m(\ddot{u}_r, v) &= b_r(v), \\ a_{21}(u_r, v) + a_{22}(u_z, v) + a_{23}(u_\varphi, v) + m(\ddot{u}_z, v) &= b_z(v), \\ a_{31}(u_r, v) + a_{32}(u_z, v) + a_{33}(u_\varphi, v) + m(\ddot{u}_\varphi, v) &= b_\varphi(v), \end{aligned} \quad (4)$$

де скалярні добутки мають вигляд

$$\begin{aligned} a_{11}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{11} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + d_{33} \frac{w}{r} \frac{v}{r} + d_{13} \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + d_{13} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{v}{r} \right) d\Omega + \\ &\quad + \iiint_{\Omega} \left(d_{44} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + d_{55} \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) d\Omega \\ a_{12}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{44} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial z} + d_{23} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{v}{r} + d_{12} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial r} \right) d\Omega, \\ a_{13}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{13} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} + d_{55} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right] + d_{33} \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} v \right) d\Omega, \\ a_{22}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{44} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + d_{22} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + d_{66} \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) d\Omega, \\ a_{23}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{66} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + d_{23} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega, \\ a_{33}(w, v) &= \iiint_{\Omega} \left(d_{55} \left[\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right] + d_{66} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega + \\ &\quad + \iiint_{\Omega} d_{33} \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\Omega, \end{aligned}$$

$$a_{21}(w, v) = a_{12}(v, w), a_{31}(w, v) = a_{13}(v, w), a_{32}(w, v) = a_{23}(v, w).$$

Чисельну процедуру розв'язування варіаційних рівнянь будемо з використанням напіваналітичного МСЕ з розкладом за тригонометричними функціями по кутовій координаті. Нехай Q_{hm} скінченновимірний підпростір з Q_A і функції

$N_1(r, z), \psi_1(\varphi), \dots, N_n(r, z), \psi_n(\varphi)$ утворюють базу Q_{hm} . Тоді шукані переміщення мають вигляд

$$u_h(r, z, \varphi, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_i(r, z) \psi_j(\varphi) u^{ij}(t) \quad (5)$$

Тут за $\psi_j(\varphi)$, $j = 1, \dots, m$ обирається система тригонометричних функцій, зокрема, для апроксимації $u_r, u_z - \{1, \cos j\varphi, \sin j\varphi\}$, для $u_\varphi - \{1, \sin j\varphi, \cos j\varphi\}$; $N_i(r, z)$ — лінійні або квадратичні фінітні функції МСЕ на криволінійних чотирикутниках сирендипового типу. Підставляючи (5) у (4) і послідовно приймаючи $v = N_i \psi_j$, з урахуванням ортогональності системи тригонометричних функцій на проміжку $[0, 2\pi]$ отримуємо для j -ї гармоніки систему звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку, яка в матричній формі виглядає так:

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{U}}_j(t) + \mathbf{K}_j \mathbf{U}_j(t) = \mathbf{R}_j(t) \quad (6)$$

з початковими умовами

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \dot{\mathbf{U}}_0, \quad (7)$$

де коефіцієнти матриць мас і жорсткості мають вигляд:

$$\mathbf{M}_{st} = \begin{pmatrix} m(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & 0 & 0 \\ 0 & m(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & 0 \\ 0 & 0 & m(N_i \psi_j, N_k \psi_l) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{st} = \begin{pmatrix} a_{11}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{12}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{13}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) \\ a_{21}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{22}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{23}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) \\ a_{31}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{32}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) & a_{33}(N_i \psi_j, N_k \psi_l) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_s = (b_r(N_k \psi_l), b_z(N_k \psi_l), b_\varphi(N_k \psi_l))^T \quad s = i \times k, \quad t = j \times l.$$

Інтегрування системи (6) по часовій координаті здійснюється за допомогою методу розкладу за власними формами [1]. Згідно з цим методом система (6) за допомогою перетворення $\mathbf{U}_j(t) = \Phi_j \mathbf{X}_j(t)$

зводиться до розв'язання $\tilde{k}$ окремих рівнянь:

$$\ddot{\mathbf{x}}_j^i(t) + (\omega_j^i)^2 \mathbf{x}_j^i(t) = (\varphi_j^i)^T \mathbf{R}_j(t), \quad i = 1, \tilde{k} \quad (8)$$

з початковими умовами:

$$\mathbf{x}_j^i|_{t=0} = (\varphi_j^i)^T \mathbf{M}_j \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}_j^i|_{t=0} = (\varphi_j^i)^T \mathbf{M}_j \dot{\mathbf{U}}_0 \quad (9)$$

Тут $\Phi_j = \{\varphi_j^1, \varphi_j^2, \dots, \varphi_j^{\tilde{k}}\}$ — матриця, стовпцями якої є власні вектори, отримані із задачі на власні значення:

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{U}}_j(t) + \mathbf{K}_j \mathbf{U}_j(t) = \mathbf{0} \quad (10)$$

де ω_j^i - кругова частота для j -ї гармоніки; $\tilde{k}$ — кількість перших власних пар задачі (10). Задачу на власні значення (10) розв'язуємо за допомогою методу ітерацій у підпросторі [1]. У загальному випадку розв'язок кожного рівняння (8) отримуємо за допомогою інтеграла Дюгамеля:

$$\mathbf{x}_j^i(t) = \frac{1}{\omega_j^i} \int (\varphi_j^i)^T \mathbf{R}_j(\tau) \sin \omega_j^i(t - \tau) d\tau + \alpha_j^i \sin \omega_j^i t + \beta_j^i \cos \omega_j^i t \quad (11)$$

де коефіцієнти α_j^i, β_j^i визначаються з початкових умов (9). Переміщення вузлових точок отримуємо суперпозицією реакції системи за всіма власними формами. Загальну реакцію системи визначаємо шляхом підсумовування переміщень за всіма гармоніками. Далі напруження у вузлових точках знаходимо на основі формул (1) та (2).

Наведений алгоритм реалізований у вигляді комплексу Сі- та Фортран-програм. Він функціонує у межах операційної системи MS-DOS та операційної оболонки Windows на IBM-сумісних ПК і характеризується високим ступенем автоматизації підготовки вхідної та вихідної інформації. Ефективність та надійність створеного програмного забезпечення підтверджується тестовими розрахунками. Зокрема, розглядалася задача про визначення динамічної реакції круглої жорстко защемленої пластинки на дію змінного у часі нормального навантаження. Геометричні та фізичні характеристики пластинки: товщина $h = 0.1$ м, радіус $R = 1.0$ м, модуль Юнга $E = 1.0$ Н/м², густина $\rho = 1.0$ к/м³ коефіцієнт Пуасона $\nu = 0.3$. В таблиці приведені значення перших шість частот осесиметричних вільних коливань пластинки, отриманих за допомогою вищеописаного алгоритму (третій стовпець) і за теорією оболонок типу Тимошенка [5] (другий стовпець). На рис. 1 зображено графіки перших чотирьох форм власних коливань пластинки.

Таблиця

ω_i i	аналіт. розв. Кірхгофа	чисел. розв. по Тимошенку	чисел. розв. теор. пружн.
1	0.049202	0.047893	0.0481786
2	0.191545	0.175869	0.1773226
3	0.429147	0.365104	0.3691509
4	0.761852	0.595655	0.6040335
5	-	0.639281	0.6405618
6	1.18963	0.853137	0.8676872

Для вказаної пластинки розв'язувалися задачі динаміки під дією нормальних осесиметричних навантажень виду:

$$P_1(\tau) = 1, \quad 0 \leq \tau \leq \infty,$$

$$P_2(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ 0, & \tau_0 \leq \tau \leq \infty \end{cases}$$

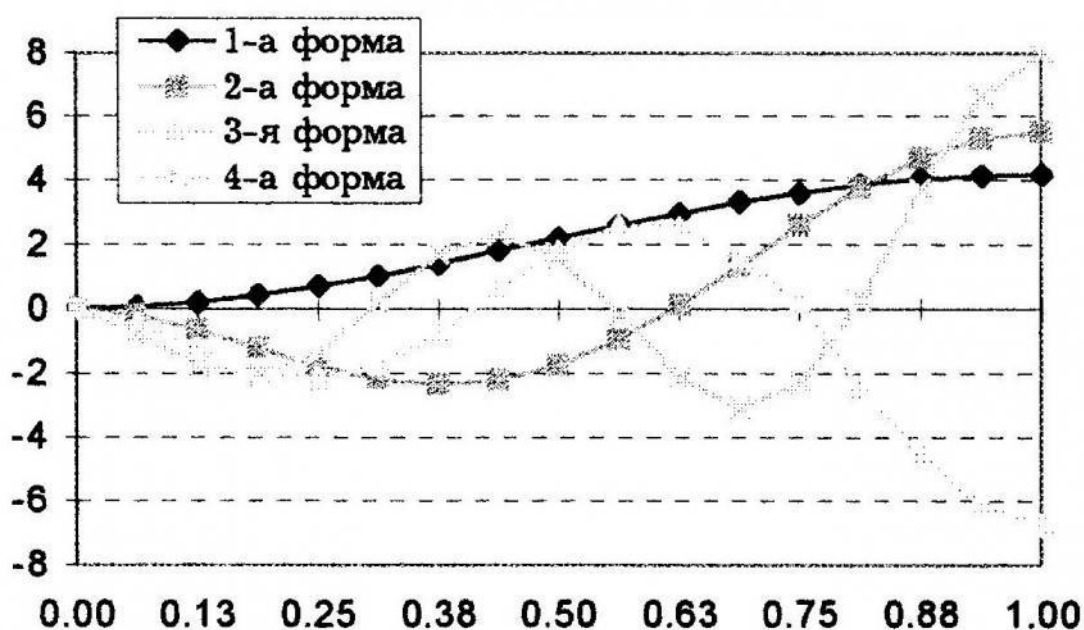


Рис. 1. Графіки форм власних коливань

Розв'язки обох динамічних задач порівнювалися з розв'язками тих же задач, отриманим по методиці описаній у праці [5], в якій використовувалися рівняння математичної моделі теорії оболонок типу Тимошенка. На рис. 2 зображено графіки залежності прогинів u_z в

центрі серединної поверхні пластинки від часу. Крива 1 відповідає розв'язку динамічної задачі при навантаженні $P_1(\tau)$, а крива 2 — при навантаженні $P_2(\tau)$ і $\tau_0 = 4$ с.

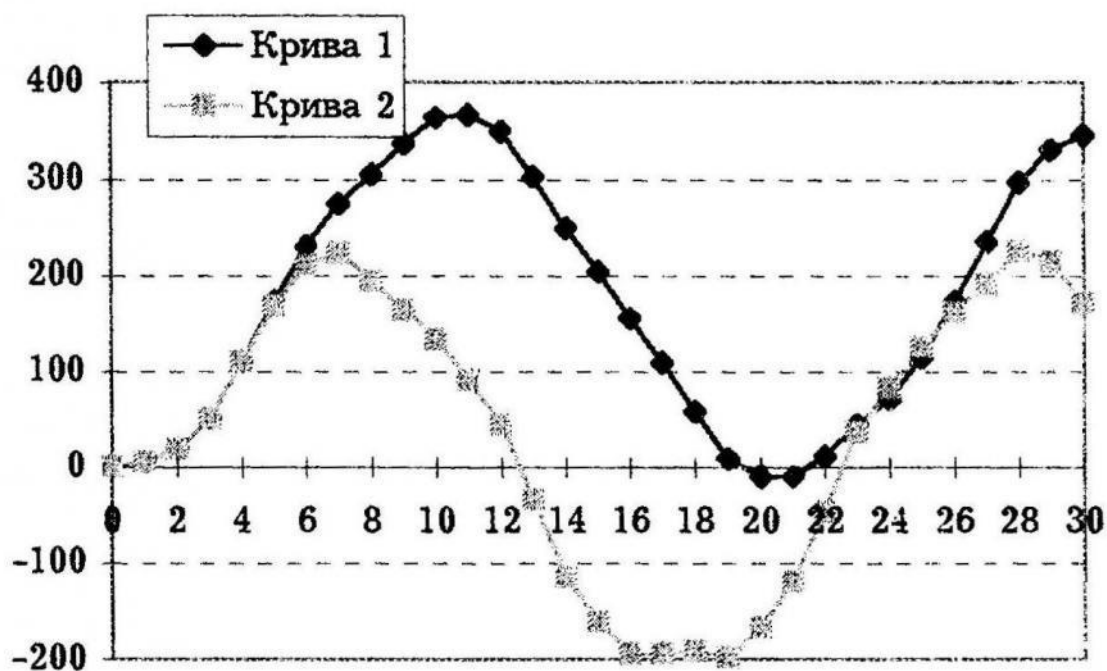


Рис. 2. Графіки залежності прогинів від часу



Рис. 3. Графіки залежності напружень від часу

Рис. 3 містить аналогічні результати для напружень σ_{π} . Розв'язки отримані на сітці з 32 скінченних елементів (16 елементів по радіусу і 2 по висоті) і при $\tilde{k} = 4$. Відповідні результати, отримані у праці [5], на рис. 2 і 3 не зображені, оскільки в масштабах даних рисунків графіки важко розрізнити.

1. Бате К., Вилсон Е., Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.:Стройиздат, 1982. 447с. 2. Григоренко А. Я., Дыяк И.И. Решение пространственных задач о свободных колебаниях осесимметричных тел.// Прикл. механика. Т.30. Вып. 5. С.19-24. 3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.:Наука, 1977. 416 с. 4. Новацкий В. Теория упругости. М.:Мир, 1975. 872 с. 5. Копитко М. Ф.Решение задач динамики оболочек сложной геометрии методом конечных элементов: Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Львів, 1987.

Стаття надійшла до редколегії 21.02.96

УДК 517.958:519.6

Н.П.Головач, І.І.Дияк

Прямий метод граничних елементів чисельного розв'язування задачі термопружності*

1. Постановка задачі. Розглядається незв'язна двовимірна задача квазістатичної термопружності для ізотропного пружного середовища, яке займає область Ω із ліпшицевою границею Γ .

Термопружний стан тіла описується вектором переміщень $u = (u_1, u_2)$, що задовольняє рівняння рівноваги Ляме [1,5]:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \beta T_{,i} \quad \text{в } \Omega \times (0, t], \quad (1)$$

та температурою $T(x_1, x_2, t)$, що визначається з (2) [1,5]:

$$\Delta T = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial \tau} + W \quad \text{в } \Omega \times (0, t]. \quad (2)$$

При цьому виконуються співвідношення Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - \beta T \delta_{ij} \quad \text{в } \Omega \times (0, t] \quad (3)$$

© Головач Н.П., Дияк І.І., 1996

* Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISEEP), гранти № PSU061028 та № APU051042.

та геометричні співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{в } \Omega \times (0, t], \quad (4)$$

де λ, μ — сталі Ляме; X_1, X_2 — компоненти вектора масових сил; $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ — компоненти відповідно тензора деформацій та напружень; δ_{ij} — символ Кронекера; $\beta = \alpha_t(3\lambda + 2\mu)$; α_t — лінійний коефіцієнт температурного розширення; k — коефіцієнт теплопровідності; W — густина внутрішніх джерел тепла.

Тут і надалі мається на увазі підсумовування від 1 до 2 за індексами, що повторюються, а також $(\dots)_{,i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\dots)$, Δ — оператор Лапласа.

Нехай на межі $\Gamma = \partial\Omega$ задаються граничні умови загального вигляду

$$\begin{cases} u_i v_i = \bar{u}_v & u_i \tau_i = \bar{u}_\tau & \text{на } \Gamma_1, \\ \sigma_{ij} v_i v_j = \bar{p}_v & \sigma_{ij} v_i \tau_j = \bar{p}_\tau & \text{на } \Gamma_2, \\ v_i = \bar{u}_v^2 & \sigma_{ij} v_i \tau_j = \bar{p}_\tau^2 & \text{на } \Gamma_3, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{де } \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \text{ і} \\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 = \emptyset; \end{matrix} \quad (5)$$

$$\begin{cases} T = \bar{T} & \text{на } \Gamma'_1, \\ T_{,i} v_i = \bar{q} & \text{на } \Gamma'_2, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{де } \Gamma = \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2, \\ \Gamma'_1 \cap \Gamma'_2 = \emptyset. \end{matrix}$$

Тут v_i, τ_i — напрямні косинуси зовнішньої нормалі $\bar{v}$ і дотичної $\bar{\tau}$ на границі Γ .

Вважається заданою також початкова умова вигляду

$$T(x_1, x_2, 0) = T_0 \quad \text{в } \Omega. \quad (6)$$

2. Основні інтегральні співвідношення. Для границі області записуються граничні інтегральні рівняння прямого методу граничних елементів (ПМГЕ), які формулюються на основі відомої теореми взаємності Бетті [1,3]:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} F_{ij}^*(x, \xi)u_j(x)d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma} G_{ij}^*(x, \xi)p_j(x)d\Gamma(x) + \\ + \int_{\Omega} X_j(z)G_{ij}^*(z, \xi)d\Omega(z) &+ \beta \int_{\Omega} G_{jk,k}^*(z, \xi)T(z, \tau)d\Omega(z) \quad \text{для } \tau = t \end{aligned} \quad (7)$$

та

$$\begin{aligned}
& c(\xi)T(\xi, t) + k \int_0^t \int_{\Gamma} T(x, \tau) q^*(\xi, x, t, \tau) d\Gamma(x) d\tau = \\
& = k \int_0^t \int_{\Gamma} q(x, \tau) T^*(\xi, x, t, \tau) d\Gamma(x) d\tau + \int_{\Omega} (T_0 + W) T^*(\xi, x, t, 0) d\Omega(x)
\end{aligned} \quad (8)$$

Тут $G_{ij}^*(x, \xi)$, $T^*(\xi, x, t, \tau)$ — фундаментальні розв'язки відповідно системи диференціальних рівнянь (1) та рівняння (2); $q^*(\xi, x, t, \tau) = \frac{\partial T^*(\xi, x, t, \tau)}{\partial n}$; $F_{ij}^* = \sigma_{ijk}^* n_k$, де σ_{ijk}^* — напруження, зумовлені переміщенням G_{ij}^* ; коефіцієнти $c(\xi)$, $c_{ij}(\xi)$ залежать тільки від локальної геометрії межі $\partial\Omega$. Відомо, що у випадку гладкої границі $c_{ij}(\xi) = 0.5\delta_{ij}$. Якщо ж точка ξ є вершиною кута, то використовуємо підхід подвоєння вузлів [1].

3. Схема побудови чисельного розв'язку. Щоб розв'язати (7) і (8) і знайти невідомі граничні величини, інтегральні рівняння апроксимуємо системами лінійних алгебричних рівнянь. Для цього дискретизуємо і границю області $\partial\Omega$, і проміжок часу $(0, t]$, а також області Ω для обчислення останніх доданків у формулах (7), (8).

У межах кожного граничного елемента передбачається, що всі відомі та невідомі граничні значення функцій u_i, p_i, T, q змінюються певним наперед заданим чином. Ми використовуємо поліноміальну апроксимацію (лінійну, квадратичну за просторовими змінними $x = (x_1, x_2)$ та кусково-постійну за часом). При цьому порядок апроксимації просторових змінних та порядок апроксимації шуканих функцій можуть не збігатися.

Обираючи вузли граничних елементів за точки колокації та записуючи в кожному із них рівняння (9) [2]:

$$\begin{aligned}
& c_i T_F^i + k \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left(\int_{\Gamma_j} \phi^T \int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} q^* \psi d\tau d\Gamma \right) T^n = \\
& = k \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left(\int_{\Gamma_j} \phi^T \int_{\tau_{f-1}}^{\tau_f} T^* \psi d\tau d\Gamma \right) q^n + \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_l} T^*(T_0 + W) d\Omega,
\end{aligned} \quad (9)$$

одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь. Для отримання такої ж глобальної системи рівнянь для інтегрального співвідношення

(7) використовуємо процедуру Бубнова - Гальоркіна із нев'язкою вигляду [3]

$$\begin{aligned}
 r_i(\xi) = & \sum_{l=0}^{N_j^n-1} \sum_{j=1}^2 \left[c_{ij}(\xi) \varphi^{ln}(\xi) + \int_{\Gamma_n} F_{ij}^*(x, \xi) \varphi^{ln}(x) d\Gamma(x) \right] u_j^{ln} + \\
 & + \sum_{\substack{m=1 \\ (m \neq n)}}^N \sum_{l=0}^{N_j^m-1} \sum_{j=1}^2 \left[\int_{\Gamma_n} F_{ij}^*(x, \xi) \varphi^{lm}(x) d\Gamma(x) \right] u_j^{lm} - \\
 & - \sum_{m=1}^N \sum_{l=0}^{N_j^m-1} \sum_{j=1}^2 \left[\int_{\Gamma_n} G_{ij}^*(x, \xi) \varphi^{lm}(x) d\Gamma(x) \right] p_j^{lm} - \\
 & - \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_l} X_i G_{ij}^*(z, \xi) d\Omega(z) - \\
 & - \beta \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_l} G_{jk,k}^*(z, \xi) T(z, \tau) d\Omega(z), \quad \xi \in \Gamma_n, \quad \tau = \tau_F.
 \end{aligned} \tag{10}$$

В обох випадках (після врахування заданих граничних умов (5)) систему рівнянь можна записати у матричній формі:

$$Ay = b, \tag{11}$$

де A — цілковито заповнена несиметрична матриця. Для обчислення елементів матриці використовуються квадратурні формули Гаусса. Відомо, що у підінтегральних функціях у разі збігу аргументів мають місце особливості типу $1/r$ та $\ln r$. Такі інтеграли обчислюються за спеціальними методиками виділення сингулярностей [6].

При розв'язуванні задачі термопружності із застосуванням ПМГЕ не вдається повністю звести задачу до розв'язання граничного інтегрального рівняння, так само, як і в рівнянні теплопровідності при ненульовій початковій температурі або за наявності масових сил у задачі теорії пружності. Об'ємні інтеграли можна обчислити за відомою із методу скінченних елементів схемою, зобразивши область у вигляді об'єднання скінченних трикутних або чотирикутних елементів та використавши задані значення у вузлах апроксимації. Відомі також схеми, які полягають у зведенні інтегралів по області до інтегралів по границі [4]. Їх побудову продемонструємо на прикладі об'ємного інтеграла вигляду

$$\int_{\Omega} X_j(z) G_{ij}^*(z, \xi) d\Omega(z) \quad (12)$$

із рівняння (7).

Згідно з одним із цих підходів компоненти вектора масових сил подаємо у вигляді лінійної комбінації відомих координатних функцій f^s :

$$X_j = \sum_{s=1}^S f^s \alpha_j^s, \quad (13)$$

де $f^s = f(\xi_s, x)$ — функція між точкою ξ_s і точкою x (наприклад, $f^s = r(\xi_s, x)$); α_j^s — невідомі коефіцієнти, зв'язані з кожною f^s .

Тоді отримуємо, застосовуючи (13):

$$\int_{\Omega} X_j G_{ij}^* d\Omega = \sum_{s=1}^S \left\{ \alpha_j^s \left[c_{ij} \hat{u}_j + \int_{\Gamma} F_{ij}^* \hat{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ij}^* \hat{p}_j d\Omega \right] \right\}. \quad (14)$$

Тут $\hat{u}_j$ — частковий розв'язок рівняння (1) із правою частиною f^s ; $\hat{p}_j$ — зусилля, що йому відповідають.

Інший метод перетворення об'ємного інтеграла у граничний ґрунтується на тотожності Гріна. Оскільки інтеграл по області має вигляд (12), функції G_{ij}^1 необхідно взяти такими, щоб виконувалась рівність $\Delta G_{ij}^1 = G_{ij}^*$.

Тоді

$$\int_{\Omega} X_j G_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} X_j (\Delta G_{ij}^1) d\Omega = \int_{\Gamma} \left\{ X_j \frac{\partial G_{ij}^1}{\partial n} - G_{ij}^1 \frac{\partial X_j}{\partial n} \right\} d\Gamma + \int_{\Omega} G_{ij}^1 \Delta X_j d\Omega \quad (15)$$

Вводимо функцію X_j^1

$$X_j^1 = \Delta X_j. \quad (16)$$

Тоді об'ємний інтеграл у правій частині рівняння (15) записуємо як

$$\int_{\Omega} X_j^1 G_{ij}^1 d\Omega = \int_{\Omega} X_j^1 (\Delta G_{ij}^2) d\Omega = \int_{\Gamma} \left\{ X_j^1 \frac{\partial G_{ij}^2}{\partial n} - G_{ij}^2 \frac{\partial X_j^1}{\partial n} \right\} d\Gamma + \int_{\Omega} G_{ij}^2 \Delta X_j^1 d\Omega \quad (17)$$

і т.д.

Вище викладену процедуру описуємо рекурсивними формулами:

$$\begin{aligned} X_{ij}^{s+1} &= \Delta X_{ij}^s \\ \Delta G_{ij}^{s+1} &= G_{ij}^s \end{aligned} \quad \text{для } s = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Об'ємний інтеграл (12) зображаємо як

$$\int_{\Omega} X_j G_{ij}^* d\Omega = \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left\{ X_j^s \frac{\partial G_{ij}^{s+1}}{\partial n} - G_{ij}^{s+1} \frac{\partial X_j^s}{\partial n} \right\} d\Gamma. \quad (19)$$

Програмна реалізація на основі такого підходу здійснена мовою C++ для ПЕОМ.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494с. 2. Головач Н. П., Дияк І. І. Чисельне дослідження задачі теплопровідності прямим методом граничних елементів. // Вісн.Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. Вип.39. С.46-52. 3. Савула Я. Г., Дияк І. І., Паук Н.М. Гранично-скінченно-елементний аналіз комбінованих моделей двовимірної задачі теорії пружності. // Доп. НАН. 1995. № 5. С.49-52. 4. Brebbia C. A. On Two Different Methods for Transforming Domain Integrals to the Boundary // Advances in BEM. 1989. Vol. 1 Com. & Fun.. P.59-74. 5. Sládek V, Sládek J. Computation of thermal stresses in quasi-static non-stationary thermoelasticity using boundary elements. // International journal for numerical methods in engineering. 1989. Vol. 28. 1989, P. 1131-1144. 6. Pereira P., Guiggiani M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method. // Comput. and Struct. 1989. Vol. 33. №1. P.269-279.

Стаття надійшла до редколегії 14.02.96р

УДК 518:517.948

Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін

До питання розв'язності інтегрального рівняння осесиметричної задачі електростатики

Розглянемо задачу розрахунку осесиметричного електростатичного поля, створеного зарядженим провідником у формі деякої циліндричної поверхні. Остання утворюється обертанням навколо осі OZ незамкненої кривої Γ , інформація про яку подається на декартовій півплощині zr ($r \geq 0$) за допомогою параметричних рівнянь:

$$\Gamma = \{(z, r) \in \mathbf{R}^2: z = z(t), r = r(t), t \in \bar{\Delta}, r > 0, z(t), r(t) \in \mathbf{C}^2(\bar{\Delta})\}.$$

Тут $\Delta = (\alpha, \beta)$ — інтервал дійсної осі $\mathbf{R}^1$, причому $|\beta - \alpha| = \kappa \leq 1$.

Відомо [1], що поставлена задача зводиться до такого одновимірного інтегрального рівняння (ІР) першого роду:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) r(t) K(t, x) M(t) dt = U_0, \quad (1)$$

де U_0 — граничне значення потенціалу на поверхні; $\varphi(t)$ — шукана густина розподілу зарядів уздовж Γ ;

$$T(t, x) = \{[r(t) + r(x)]^2 + [z(t) - z(x)]^2\}^{1/2}, \quad x \in \Delta;$$

$$M(t) = \{[r'(t)]^2 + [z'(t)]^2\}^{1/2} > 0, \quad t \in \bar{\Delta};$$

$$K(t, x) = P(t, x) - Q(t, x) \ln \eta \equiv \sum_{l=0}^4 a_l \eta^l - \ln \eta \sum_{l=0}^4 b_l \eta^l,$$

причому

$$\eta = T^{-2}(t, x) \{[r(t) - r(x)]^2 + [z(t) - z(x)]^2\}.$$

В аналізі задачі (1) важливо з'ясувати тип ІР. Це допомагає вирішити питання розв'язності, що у свою чергу диктує вибір алгоритму наближеного розв'язання (1) та визначає характер апроксимацій шуканої густини $\varphi(t)$. Неважко переконатися в тому, що (1) зводиться до сингулярного ІР першого роду з логарифмічною особливістю в ядрі:

$$(L + N)\varphi \equiv \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \left[\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|t - x|} + N(t, x) \right] dt = U(x), \quad (2)$$

де $U(x) = U_0 B^{-1}(x)$, причому $B(x) = \pi b_0 M(x)$, а

$$N(t, x) = B^{-1}(x) \left\{ [B(x) - 2Q(t, x)A(t, x)] \ln |t - x| + \right. \\ \left. + A(t, x) \left[P(t, x) + Q(t, x) \ln \left(\eta^{-1}(t - x)^2 \right) \right] \right\},$$

$$A(t, x) = r(t) M(t) T^{-1}(t, x).$$

Зауважимо, що $N(t, x)$ — неперервна функція обох аргументів, оскільки

$$\lim_{t \rightarrow x} \pi N(t, x) = (2b_0)^{-1} a_0 + \ln [2r(x) M^{-1}(x)].$$

Не зменшуючи загальності, розглянемо частковий випадок (1), коли

$$\Gamma = \{(z, r) \in \mathbf{R}^2: z(t) \equiv t, r(t) \equiv 1, t \in \bar{\Delta}\}.$$

Тоді в термінах рівнянь (1), (2)

$$\begin{aligned} T(t, x) &= [4 + (t - x)^2]^{1/2}; \\ \eta &= (t - x)^2 T^{-2}(t, x); \\ U(x) &= U_0 (\pi b_0)^{-1}; \\ N(t, x) &= (\pi b_0)^{-1} \{ [b_0 - \Phi(t, x)] \ln |t - x| + D(t, x) \}, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) &= 2Q(t, x)T^{-1}(t, x), \\ D(t, x) &= T^{-1}(t, x)[P(t, x) + 2Q(t, x)\ln T(t, x)]. \end{aligned}$$

Досліджувати розв'язність IP (2) можна в різних функціональних просторах, але у всіх випадках потрібно враховувати сингулярну поведінку шуканого розв'язку в околі кінців розімкненої кривої Γ . У зв'язку з цим розглянемо кілька просторів. Нехай

$$\begin{aligned} H(\bar{\Delta}) &= \{\varphi(t) \in C(\bar{\Delta}): |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^\mu; \\ t_1, t_2 &\in \bar{\Delta}, t_1 \neq t_2; C > 0; 0 < \mu \leq 1\}. \end{aligned}$$

Якщо на множині функцій $H(\bar{\Delta})$ визначити норму

$$\|\varphi\|_{H(\bar{\Delta})} = \|\varphi\|_{C(\bar{\Delta})} + h(\varphi),$$

де

$$h(\varphi) = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in \bar{\Delta} \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu},$$

то одержаний нормований простір називають простором Гельдера. Можна показати, що $H(\bar{\Delta})$ — банахів. У випадку, коли значення параметра μ є суттєвим, використовують позначення $H_\mu(\bar{\Delta})$ — простір Гельдера з показником μ .

Розглянемо також множину функцій

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\Delta) &= \{\varphi(t): \varphi(t) = \varphi^*(t)/R(t), t \in \Delta, \\ R(t) &= [(t - \alpha)(\beta - t)]^{1/2}, \varphi^*(t) \in H(\bar{\Delta})\}, \end{aligned}$$

яка разом із нормою $\|\varphi\|_{H(\Delta)} = \|\varphi^*\|_{H(\bar{\Delta})}$ називається ваговим, або

модифікованим, простором Гельдера. І нарешті, нехай

$$\tilde{H}^1(\Delta) = \{\varphi(t): \varphi'(t) = \varphi^*(t) / R(t), t \in \Delta;$$

$$\varphi^*(t) \in H(\bar{\Delta}), \varphi^*(\alpha) = \varphi^*(\beta) = 0\}$$

з нормою $\|\varphi\|_{\tilde{H}^1(\Delta)} = \|\varphi\|_* + \|\varphi^*\|_{C(\bar{\Delta})} + h(\varphi^*)$, де $\|\varphi\|_* = \|\varphi\|_{C(\bar{\Delta})}$ тоді

й лише тоді, коли $\varphi(t) \in C(\bar{\Delta})$.

Будемо розглядати розв'язок IP (2) у просторі $\tilde{H}(\Delta)$. Справедливою є така теорема.

Теорема 1. Оператор $L^{-1}: \tilde{H}^1(\Delta) \rightarrow \tilde{H}(\Delta)$ існує й обмежений ($\kappa \neq 4$).

Доведення. Для доведення першого твердження розглянемо операторне рівняння

$$L\varphi \equiv -\frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(t) \ln|t-x| dt = G(x), \quad x \in \Delta.$$

У праці [2] показано, що розв'язок цього рівняння існує при будь-якій правій частині з $\tilde{H}^1(\Delta)$, отже, оператор L^{-1} існує.

Доведемо, що L^{-1} обмежений. Оператор L^{-1} діє за формулою

$$(L^{-1}G)(t) = -\frac{1}{\pi R(t)} \int_a^{\beta} \frac{R(x)G'(x)}{x-t} dx + \frac{C}{R(t)},$$

де

$$C = \ln^{-1}\left(\frac{4}{\kappa}\right) \left\{ G(x) - \frac{1}{\pi^2} \int_a^{\beta} \ln|x-t| \frac{dt}{R(t)} \int_a^{\beta} \frac{R(\tau)G'(\tau)}{\tau-t} d\tau \right\}.$$

Потрібно довести, що $\|L^{-1}G\|_{\tilde{H}(\Delta)} \leq K\|G\|_{\tilde{H}^1(\Delta)}$. Зазначимо, що $G(x) \in \tilde{H}^1(\Delta)$ тоді й тільки тоді, коли $G'(x) \in \tilde{H}(\Delta)$. Останнє означає, що $G'(x)$ можна подати у вигляді $G^*(x)/R(x)$, причому $G^*(x) \in H(\bar{\Delta})$, а $G^*(\alpha) = G^*(\beta) = 0$. Тому

$$\|G\|_{\tilde{H}^1(\Delta)} = \|G\|_{C(\bar{\Delta})} + \|G^*\|_{C(\bar{\Delta})} + h(G^*).$$

Для оцінки $\|L^{-1}G\|_{\tilde{H}(\Delta)}$ досить розглянути лише доданок $C/R(t)$, причому $h(C) = 0$. Перший доданок оцінюють аналогічним чином. Отже,

$$\left\| \frac{C}{R(t)} \right\|_{\tilde{H}(\Delta)} = \|C\|_{H(\bar{\Delta})} = \|C\|_{C(\bar{\Delta})} = \max_{x \in \Delta} |C(x)|.$$

Тому

$$\begin{aligned} |C(x)| &\leq C_1 \left\{ \|G\|_{C(\bar{\Delta})} + \frac{1}{\pi C_1} \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(\tau)G'(\tau)}{\tau-t} d\tau \right\|_{C(\bar{\Delta})} \right\} = \\ &= C_1 \|G\|_{C(\bar{\Delta})} + \frac{1}{\pi} \max_t \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(\tau)G'(\tau)}{\tau-t} d\tau \right|, \end{aligned}$$

де $C_1 = \left| \ln^{-1} \left(\frac{4}{\kappa} \right) \right|$.

Як легко побачити,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(\tau)G'(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{[R(\tau)G'(\tau) - R(t)G'(t)]\tau-t|^{\mu}}{(\tau-t)|\tau-t|^{\mu}} d\tau + R(t)G'(t) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\tau}{\tau-t}.$$

Тому

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{R(\tau)G'(\tau)}{\tau-t} d\tau \right| \leq h(G^*) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}} + C_2 \|G^*\|_{C(\bar{\Delta})}.$$

Тут $C_2 = \left| \ln \left(\frac{\beta-\bar{t}}{\bar{t}-\alpha} \right) \right|$, а $\bar{t}$ — точка, в якій функція $|G^*(t)|$ дося-

гає свого максимального значення на $\bar{\Delta}$:

$$|G^*(\bar{t})| = \max_{t \in \bar{\Delta}} |G^*(t)| = \|G^*\|_{C(\bar{\Delta})}.$$

При цьому $\bar{t} \neq \alpha$, $\bar{t} \neq \beta$, оскільки $G^*(\alpha) = G^*(\beta) = 0$, $G^*(t) \neq 0$ і

$$R(t)G'(t) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\tau}{\tau-t} = G^*(t) \ln \left(\frac{\beta-t}{t-\alpha} \right) \rightarrow 0$$

у випадку, коли $t \rightarrow \alpha$ або $t \rightarrow \beta$.

Таким чином,

$$|C(x)| \leq C_1 \|G\|_{C(\bar{\Delta})} + \frac{1}{\pi} C_2 \|G^*\|_{C(\bar{\Delta})} + \frac{1}{\pi} C_3 h(G^*) \leq C_4 \|G\|_{\tilde{H}^1(\Delta)},$$

де

$$C_3 = \max_{t \in \Delta} \int_{\alpha}^{\beta} |\tau - t|^{\mu-1} d\tau,$$

а $C_4 = \max \left\{ C_1, \frac{1}{\pi} C_2, \frac{1}{\pi} C_3 \right\}$, що й завершує доведення теореми.

Повернемося до IP (2), коли функція $N(t, x)$ подається у вигляді (3). Справедлива також така теорема.

Теорема 2. Оператор $N: \tilde{H}(\Delta) \rightarrow \tilde{H}^1(\Delta)$ цілком неперервний.

Доведення. Внаслідок достатньої гладкості функції $D(t, x)$ (див. (3)) потрібно довести повну неперервність лише оператора

$$\tilde{N}\varphi \equiv (\pi b_0)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} [b_0 - \Phi(t, x)] \ln|t - x| \varphi(t) dt.$$

Покажемо, що оператор $\tilde{N}: \tilde{H}(\Delta) \rightarrow \tilde{H}^1(\Delta)$ відображає кожну обмежену множину функцій із $\tilde{H}(\Delta)$ у компактну (в сенсі метрики простору $\tilde{H}^1(\Delta)$). Справді, нехай

$$M = \left\{ \varphi(t) \in \tilde{H}(\Delta): \|\varphi\|_{\tilde{H}(\Delta)} = \|\varphi^*\|_{C(\bar{\Delta})} + h(\varphi^*) \leq C = \text{const} \right\}.$$

З означення норми простору $H(\bar{\Delta})$ випливає, що функції $\varphi^*(t) \in M$ рівномірно обмежені та одностайно неперервні:

$$\begin{aligned} |\varphi^*(t_1) - \varphi^*(t_2)| &= \frac{|\varphi^*(t_1) - \varphi^*(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\mu}} |t_1 - t_2|^{\mu} \leq \\ &\leq h(\varphi^*) |t_1 - t_2|^{\mu} \leq C |t_1 - t_2|^{\mu}. \end{aligned}$$

Отже, за теоремою Арцела [4], з M можна виділити рівномірно збіжну послідовність $\{\varphi_n^*\}$. Нехай її границя (в сенсі простору $C(\bar{\Delta})$) є φ^* . Приймемо, що $\psi_n = \tilde{N}\varphi_n$, $\psi = \tilde{N}\varphi$, де $\varphi_n(t) = \varphi_n^*(t) / R(t)$,

$\varphi(t) = \varphi^*(t) / R(t)$. Наше твердження буде доведене, якщо покажемо, що ψ_n прямує до ψ у метриці $\tilde{H}^1(\Delta)$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n\|_{\tilde{H}^1(\Delta)} = 0,$$

де $\omega_n = \psi - \psi_n$. Однак це безпосередньо випливає з того, що, по-перше,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \Delta} |\omega_n(x)| = 0,$$

оскільки

$$\begin{aligned} \omega_n(x) &= (\pi b_0)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} R^{-1}(t) [b_0 - \Phi(t, x)] \ln|t - x| \rho_n(t) dt = \\ &= (\pi b_0)^{-1} [b_0 - \Phi(\bar{t}, x)] \ln|\bar{t} - x| \rho_n(\bar{t}) \int_{\alpha}^{\beta} R^{-1}(t) dt = \\ &= b_0^{-1} [b_0 - \Phi(\bar{t}, x)] \ln|\bar{t} - x| \rho_n(\bar{t}), \end{aligned}$$

звідки $|\omega_n(x)| \leq b_0^{-1} K \|\rho_n\|_{C(\bar{\Delta})}$, де

$$K = \max_{x \in \Delta} |[b_0 - \Phi(\bar{t}, x)] \ln|\bar{t} - x||,$$

$\rho_n = \varphi^* - \varphi_n^*$, а $\bar{t} \in \bar{\Delta}$ — деяка точка, передбачена теоремою про середнє значення. По-друге,

$$\begin{aligned} \omega'_n(x) &= -(\pi b_0)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi'_x(t, x) \ln|t - x| R^{-1}(t) \rho_n(t) dt + \\ &+ (\pi b_0)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} R^{-1}(t) [\Phi(t, x) - b_0] \rho_n(t) (t - x)^{-1} dt \equiv Q_n^{(1)}(x) + Q_n^{(2)}(x) \end{aligned}$$

Тут, маючи на увазі, що $Q_n^{(i)}(x) = R(x) Q_n^{(i)}(x) R^{-1}(x)$, ($i = 1, 2$), залишається показати, що

$$\|Q_n^{(i)}\|_{\tilde{H}(\Delta)} = \|R Q_n^{(i)}\|_{C(\bar{\Delta})} + h(R Q_n^{(i)}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Враховуючи попереднє, прямування до нуля величини $\|R Q_n^{(i)}\|_{C(\bar{\Delta})}$ є очевидним. Легко бачити також, що

$$R(x)Q_n^{(1)}(x) = b_0^{-1} \ln(4/\kappa) R(x) \Phi'_x(\bar{t}, x) \rho_n(\bar{t}),$$

де $\bar{t} \in \bar{\Delta}$ — деяка точка, передбачена теоремою про середнє. Тому на підставі достатньої гладкості функції $\Phi'_x(\bar{t}, x)$, того, що $R(x) \in H(\bar{\Delta})$, а також беручи до уваги відому властивість добутку функцій із класів Гельдера [3], одержуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(RQ_n^{(1)}) = 0.$$

Нарешті, використовуючи позначення $S(t, x) = R(x)[\Phi(t, x) - b_0](t - x)^{-1}$, де $[\Phi(t, x) - b_0](t - x)^{-1} \in H(\bar{\Delta})$ (див. [4]), можна записати нерівність

$$\begin{aligned} & \frac{|R(x_1)Q_n^{(2)}(x_1) - R(x_2)Q_n^{(2)}(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} \leq \\ & \leq (\pi b_0)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|S(t, x_1) - S(t, x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu} \frac{|\rho_n(t)|}{R(t)} dt \leq b_0^{-1} h(S)(\bar{t}) \|\rho_n\|_{C(\bar{\Delta})}, \end{aligned}$$

звідки випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(RQ_n^{(2)}) = 0.$$

Отже, теорема доведена.

Зважаючи на зазначене вище, легко навести рівняння (2) у такому еквівалентному вигляді:

$$(I + L^{-1}N)\varphi = L^{-1}U,$$

причому $L^{-1}N \in \sigma(\tilde{H}(\Delta))$ як добуток обмеженого та цілком неперервного. Звідси за теоремою Нікольського [4] оператор $I + L^{-1}N$ — фредгольмів. Отже, питання про розв'язність (2) вирішується в межах теорії Фредгольма.

1. Гарасим Я. С., Остудін Б. А. Розробка математичного та програмного забезпечення для розрахунку осесиметричних електростатичних полів на базі персональних комп'ютерів//Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип. 41. С. 27-35. 2. Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. М.: Изд-во МГУ, 1989. 184с. 3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные

интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с. 4. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495с.

Стаття надійшла до редколегії 26.02.96

УДК 518:517.948

Л.Л.Роман

Чисельне розв'язування задач пружності для круглих пластин

Для розв'язування класу задач про напружено-деформований стан круглих пластин змінної товщини h під дією нормальних осесиметричних навантажень застосовуємо методи, побудовані у праці [2].

Запишемо у векторній формі розв'язкову систему рівнянь [1]:

$$\frac{dN}{dx} = f(x, N), \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} N &= \{N_i\} = \{N_r, u, Q_r, M_r, w, v_r\}, \\ f(x, N) &= (f_1(x, N), \dots, f_6(x, N)), \quad x_0 \leq x \leq 1, \\ f_1(x, N) &= -\frac{1-\nu}{x} N_r + \frac{h}{x^2} u, \\ f_2(x, N) &= \frac{1-\nu^2}{x} N_r - \frac{\nu}{x} u - \frac{1}{2} v_r^2, \\ f_3(x, N) &= -\frac{1}{x} Q_r - \frac{h}{x^2} u v_r - \frac{4}{h^3} N_r M_r + q_g, \\ f_4(x, N) &= -Q_r - \frac{1-\nu}{x} M_r + \frac{(1-\nu^2)h^3}{4x^2} v_r, \\ f_5(x, N) &= -v_r, \quad f_6(x, N) = \frac{4}{h^3} M_r - \frac{\nu}{x} v_r. \end{aligned}$$

Тут $N_r, N_\theta, Q_r, M_r, M_\theta$ — безрозмірні зусилля і моменти; u, w — радіальне і нормальне переміщення.

Крайові умови в загальному випадку мають вигляд

$$B_1 N(x_0) = b_1, \quad B_2 N(1) = b_2, \quad (2)$$

де B_1, B_2, b_1, b_2 — задані прямокутні матриці і вектори відповідно.

Дослідимо задачу знаходження мінімального прогину $W(x)$:

$$\min_{x_0 \leq x \leq 1} W(x) \quad (3)$$

кільцевої пластини завтовшки $h(x)$ під дією рівномірно розподіленого навантаження при обмеженні на рівень зусиль:

$$N_r^2 + N_\theta^2 \leq \gamma. \quad (4)$$

Крайові умови (2) в цьому випадку записуємо у вигляді

$$\text{при } x = x_0, \quad u(x) = W(x) = v(x) = 0, \quad (5)$$

$$\text{при } x = 1, \quad N_r(x) = M_r(x) = Q_r(x) = 0.$$

Для розв'язування задачі (3), (1), (4), (5) застосуємо методику [2] зведення такого типу задач до спеціально побудованої задачі нелінійного програмування. Введемо позначення:

$$N_r(x_0) = z_0^1, \quad Q_r(x_0) = z_0^2, \quad M_r(x_0) = z_0^3,$$

$$z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3), \quad \eta(x) = N_r^2(x) + N_\theta^2(x) - \gamma,$$

$$N(0) = (z_0^1, 0, z_0^2, z_0^3, 0, 0),$$

де $z(x, z_0)$ — розв'язок задачі Коші для системи рівнянь (1) за умови:

$$N(x_0) = N_0. \quad (6)$$

Підставивши при $x = 1$ розв'язок задачі Коші (1), (6) $z(x, z_0)$ в крайові умови (2), побудуємо

$$q(z_0) = (N_r(z(1, z_0)), M_r(z(1, z_0)), Q_r(z(1, z_0)))^T.$$

У результаті знаходження розв'язку задачі (3), (1), (4), (5) зведлося до розв'язування задачі:

$$\begin{aligned} & \min_{x_0 \leq x \leq 1} W(x), \\ & q(z_0) = 0, \quad \eta(x) \leq 0, \\ & \frac{dN}{dx} = f(x, N), \quad N(x_0) = N_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Задачу (7) розв'язуватимемо за такою схемою:

- 1) задамо значення $z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3)$;
- 2) обчислимо $z(x, z_0)$, розв'язавши задачу (1), (6), а також $q(z_0)$, $\eta(x)$;
- 3) побудуємо модифіковану функцію Лагранжа:

$$H(x, z_0, \mu, \lambda) = W(z(x, z_0)) + \sum_{i=1}^3 \varphi(q_i(z_0), \mu_i) + \phi(\eta(x), \lambda), \quad (8)$$

де функції φ і ϕ вибираємо так, щоб можна було розв'язати систему:

$$\varphi_q(q(z_0), \mu_i) = \mu_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \phi_\eta(\eta(x), \lambda) = \lambda; \quad (9)$$

Для мінімізації функції (8) застосуємо метод Ньютона досліджений у [2].

При чисельному розв'язуванні задачі приймали:

$$h(x) = h_0(1 - 0.666x), \quad h_0 = 1, \quad x_0 = 0.5,$$

$$q_\gamma = q_0 = 5, 10, 15, \dots, 30, \quad v = 0.3, \quad \gamma = 0.3, 0.5,$$

$$\varphi(q_i, \mu_i) = q_i \mu_i + \frac{1}{2} q_i^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos \mu_i\right),$$

$$\phi(\eta(x), \lambda) = \frac{1}{4\tau} [(\lambda + \tau\eta(x))^4 - 4\tau\eta(x)\lambda^3] + \frac{\lambda}{\tau} \begin{cases} \tau\eta(x), & \eta(x) \geq 0, \\ \arctg \tau\eta(x), & \eta(x) < 0. \end{cases}$$

Одержані при цьому чисельні значення узгоджуються з точністю 10^{-4} - 10^{-5} з результатами [1].

І.Григоренко Я.М., Мухоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К., 1983. 286 с. 2. Роман Л.Л. "Про застосування методу Ньютона для розв'язування задач операторного програмування//Питання оптимізації обчислень.: Тези доп. К., 1993. С.144-145.

Стаття надійшла до редколегії 17.01.96

УДК 519.21

Р.Т.Мисак

Стаціонарне рівняння Ріккати для визначення оптимального оператора-регуляризатора

Нехай математична модель деякої системи S задається рівнянням

$$\bar{y}(t) = \int_G x(t, s) \bar{c}(s) ds + \bar{\varepsilon}(t), \quad (1)$$

де $\bar{y}(t)$ — вектор-функція спостережень; $x(t, s)$ — відома функція двох змінних; $\bar{c}(t)$ — невідома вектор-функція, яку необхідно оцінити за спостереженнями $\bar{y}(t)$; $\bar{\varepsilon}(t)$ — випадкова функція похибок, яка задовольняє умови

$$M\bar{\varepsilon}(t) = 0; \quad M\bar{\varepsilon}(t)\bar{\varepsilon}'(t) = R. \quad (2)$$

Припустимо, що функції $\bar{y}(t)$, $\bar{c}(t)$, $\bar{e}(t) \in L_2(G, \mu)$, де $L_2(G, \mu)$ — простір функцій з інтегруванням на G квадратом і заданою на ньому мірою μ . Простір $L_2(G, \mu)$, який надалі ми будемо позначатимемо L_2 , є гільбертовим простором [4]. Скалярний добуток в L_2 визначається формулою

$$(f, g) = \int_G f(x)g(x)dx.$$

Норма в L_2 визначається формулою

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_G f^2(x)dx}.$$

Нехай невідома вектор-функція $\bar{c}(s)$ задовольняє умову

$$\|\bar{c}(s)\| = (\bar{c}(s), \bar{c}(s)) = \int_G \bar{c}'(s)\bar{c}(s)ds \leq 1. \quad (3)$$

В операторній формі рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\bar{y} = X\bar{c} + \bar{e}, \quad (4)$$

де X — оператор, що діє на просторі L_2 .

Неважко показати, що оцінка $\hat{\bar{c}}(s)$ невідомої функції $\bar{c}(s)$, отримана методом найменших квадратів, є розв'язком інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду:

$$\int_G x(s, t)\bar{y}(t)dt = \iint_G x(s, t)x(t, \tilde{s})\hat{\bar{c}}(\tilde{s})dsdt, \quad (5)$$

де $K(s, \tilde{s}) = \int_G x(s, t)x(t, \tilde{s})dt$ — ядро оператора.

Рівняння (5) в операторній формі має вигляд

$$X^*\bar{y} = X^*X\hat{\bar{c}},$$

де X^* — оператор, спряжений до оператора X

Звідси у випадку існування оберненого оператора $(X^*X)^{-1}$ оцінка $\hat{\bar{c}}$ визначається як

$$\hat{\bar{c}} = (X^*X)^{-1}X^*\bar{y}.$$

Однак відомо, що рівняння Фредгольма 1-го роду належить до класу так званих некоректних рівнянь [5]. Тому є сенс розглядати регуляризовані оцінки, які введемо таким чином [1,2]

$$\tilde{\bar{c}} = (X^*X + A)^{-1}X^*\bar{y}, \quad (6)$$

де A — деякий додатно визначений самоспряжений оператор, визначений на L_2 і такий, що існує неперервний оператор $(X^*X + A)^{-1}$.

Причому нас цікавитиме лише такий оператор-регуляризатор A , що мінімізує вираз $M\|\bar{c} - \tilde{c}\|^2$.

Позначимо через L множину додатно визначених самоспряжених операторів, визначених на L_2 . Тоді справедлива є така теорема

Теорема 1. Нехай виконуються умови (2) і (3), тоді

$$\inf_{A \in L} \sup_{\bar{c} \in L_2: (\bar{c}, \bar{c}) \leq 1} M\|\bar{c} - \tilde{c}\|^2 = \lambda_1(\hat{A}(\hat{A} + X^*X)^{-2}\hat{A}) + \text{Sp}((\hat{A} + X^*X)^{-1}X^*RX(\hat{A} + X^*X)^{-1}), \quad (7)$$

де λ_1 — максимальне власне число оператора $\hat{A}(\hat{A} + X^*X)^{-2}\hat{A}$.

Якщо λ_1 однократне при всіх розв'язках $\hat{A}$, тоді розв'язок рівняння (7) є розв'язком спектрального стаціонарного операторного рівняння Ріккати:

$$\hat{A}V\hat{A} - \hat{A}W - W^*\hat{A} - Q = 0, \quad (8)$$

де

$$Q = X^*XX^*RX + X^*RXX^*X;$$

$$V = \bar{e}_1\bar{e}_1'X^*X + X^*X\bar{e}_1\bar{e}_1';$$

$$W = X^*RX - \bar{e}_1\bar{e}_1'(X^*X)^2;$$

$\bar{e}_1$ — власний вектор, що відповідає власному числу λ_1 .

Доведення. Очевидно, що

$$M\|\bar{c} - \tilde{c}\|^2 = M\|\bar{c} - (A + X^*X)^{-1}X^*\bar{y}\|^2 = \|((A + X^*X)^{-1}X^*X - I)\bar{c}\|^2 + \text{Sp}((A + X^*X)^{-1}X^*RX(A + X^*X)^{-1}),$$

де I — одиничний оператор.

Беручи до уваги співвідношення Релея, отримаємо

$$\sup_{\bar{c}: (\bar{c}, \bar{c}) \leq 1} M\|\bar{c} - \tilde{c}\|^2 = \lambda_1(((A + X^*X)^{-1} - I)^*((A + X^*X)^{-1} - I)) + \text{Sp}(\hat{A} + X^*X)^{-2}X^*RX = \lambda_1(A(A + X^*X)^{-2}A) + \text{Sp}(A + X^*X)^{-2} * X^*RX.$$

Цей вираз характеризує похибку регуляризованої оцінки. Знайдемо тепер такий оператор-регуляризатор, щоб похибка була мінімальною. Для цього скористаємось необхідними умовами екстремуму та формулою для збурень власних чисел [2] і візьмемо похідну за напрямком:

$$(\partial/\partial t)(\lambda_1((\hat{A} + t\Theta)(\hat{A} + t\Theta + X^*X)^{-2}(\hat{A} + t\Theta)) + \text{Sp}((\hat{A} + t\Theta + X^*X)^{-1}X^*RX(\hat{A} + t\Theta + X^*X)^{-1}))_{t=0} = 0,$$

де Θ — деякий довільний оператор з множини L , $0 \leq t < \infty$.

Враховуючи довільність оператора Θ , отримуємо

$$\hat{A} \bar{e}_1 \bar{e}_1' (\hat{A} + X^* X)^2 - \hat{A} \bar{e}_1 \bar{e}_1' \hat{A} (\hat{A} + X^* X) + (\hat{A} + X^* X)^2 \bar{e}_1 \bar{e}_1' \hat{A} - (\hat{A} + X^* X) \hat{A} \bar{e}_1 \bar{e}_1' \hat{A} - (\hat{A} + X^* X) X^* R X - X^* R X (\hat{A} + X^* X) = 0.$$

Звідси маємо операторне стаціонарне рівняння Ріккати для визначення шуканого оператора-регуляризатора:

$$\hat{A} (\bar{e}_1 \bar{e}_1' X^* X + X^* X \bar{e}_1 \bar{e}_1') \hat{A} - \hat{A} (X^* R X - \bar{e}_1 \bar{e}_1' (X^* X)^2) - (X^* R X - \bar{e}_1 \bar{e}_1' * (X^* X)^2) \hat{A} - X^* X X^* R X - X^* R X X^* X = 0.$$

Отже, теорема 1 доведена.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (2), (3) і стосовно оператора R відомо лише, що $R \in L$ та $SpR \leq \beta I$. Тоді

$$\inf_{A \in L} \sup_{\bar{e} \in L_2: (\bar{e}, \bar{e}) \leq 1; SpR \leq \beta} M \|\bar{e} - \tilde{e}\|^2 = \lambda_1 (\hat{A} (\hat{A} + X^* X)^{-2} \hat{A}) + \beta \mu_1 (X (\hat{A} + X^* X)^{-2} X^*), \quad (9)$$

де μ_1 — максимальне власне число оператора $X (\hat{A} + X^* X)^{-2} X^*$.

Якщо власні числа λ_1, μ_1 однократні для всіх розв'язків рівняння (9), тоді його розв'язок є розв'язком спектрального стаціонарного операторного рівняння Ріккати:

$$\hat{A} V \hat{A} - \hat{A} W - W^* \hat{A} - \beta Q = 0,$$

де

$$Q = X^* X X^* \bar{u}_1 \bar{u}_1' X + X^* \bar{u}_1 \bar{u}_1' X X^* X;$$

$$V = \bar{e}_1 \bar{e}_1' X^* X + X^* X \bar{e}_1 \bar{e}_1';$$

$$W = \beta X^* \bar{u}_1 \bar{u}_1' X - \bar{e}_1 \bar{e}_1' (X^* X)^2;$$

$\bar{e}_1, \bar{u}_1$ — власні вектори, що відповідають власним числам

λ_1, μ_1 відповідно.

Доведення. Враховуючи співвідношення Релея [4], легко показати, що виконується співвідношення

$$\sup_{SpR \leq \beta} Sp((A + X^* X)^{-1} X^* R X (A + X^* X)^{-1}) = \beta \mu_1 (X (A + X^* X)^{-2} X^*).$$

Тоді подальше доведення аналогічне доведенню теореми 1.

1. Гирко В.Л., Онша Ю.М., Мысак Р.Т. Уравнение Риккати для матрицы-регуляризатора в методе наименьших квадратов // Вычисл. и прикл. математика. 1988. Вып.64. С.135-137. 2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.:Мир. 1972. 3. Мысак Р.Т. Спектральное уравне-

ние для оптимальной матрицы-регуляризатора в методе наименьших квадратов // Специальная радиоэлектроника. М., 1993. Вып. 1-3. С. 50-52. 4. Рид М., Саймон Б. Методы современной матфизики. Т1. Функциональный анализ. М.: Мир. 1977. 358 с. 5 Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решений некорректных уравнений. М.: Наука, 1986.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.1996

УДК 519.6

Б.М.Голуб

Функції наповнення у глобальній оптимізації

У даній статті розглянуті деякі аспекти побудови функцій наповнення, що використовуються [1,2] в тунельних методах пошуку глобального мінімуму ліпшицевої функції $f(x)$ на компактній множині $X \subset R^n$, де R^n — n -вимірний евклідів простір.

1. Означення. Нехай $x_* \in X$ — довільна точка строгого мінімуму функції $f(x)$. Позначимо

$$A(x_*) = \{x \in X : f(x) > f(x_*)\},$$

$$B(x_*) = \{x \in X : f(x) \leq f(x_*)\} \setminus \{x_*\},$$

$$B_\varepsilon(x_*) = \{x \in X : f(x) \leq f(x_*) - \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$H(y) = \{h \in R^n : y + \alpha h \in X, \alpha > 0\}, \quad y \in X.$$

Якщо L — константа Ліпшиця для функції $f(x)$, то для довільних $x \in X$, $h \in R^n$ та $\alpha > 0$ таких, що $x + \alpha h \in X$, виконується нерівність $|f(x + \alpha h) - f(x)| \leq \alpha L \|h\|$. Звідси випливає існування скінченної похідної функції $f(x)$ за напрямком h у довільній точці $x \in X$:

$$|f'(x; h)| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|f(x + \alpha h) - f(x)|}{\alpha} \leq L \|h\|.$$

Лема 1. Для того, щоб точка y була екстремальною для функції $f(x)$, необхідно і достатньо виконання нерівності $f'(y; h_1) \cdot f'(y; h_2) \geq 0$ для довільних $h_1, h_2 \in H(y)$.

Доведення леми безпосередньо випливає з означень екстремальної точки та похідної за напрямком.

Назвемо точку $y \in X$ стаціонарною для функції $f(x)$, якщо для довільного $h \in H(y)$ виконується нерівність

$$f'(y; h) \cdot f'(y; -h) \geq 0.$$

Легко бачити, що екстремальними можуть бути лише стаціонарні точки.

Назвемо точку $y \in \text{int } X$ квазістаціонарною для функції $f(x)$, якщо $f'(y; x_* - y) \cdot f'(y; y - x_*) \geq 0$.

Позначимо $Y(f) = \bar{X}(f) \setminus \{x_*\}$, де $\bar{X}(f)$ — множина квазістаціонарних точок функції $f(x)$.

Функцію $F(x)$ будемо називати наповнювальною для $f(x)$ в точці x_* , якщо

- 1) $F(x)$ неперервна на $X \setminus B_\varepsilon(x_*)$;
- 2) $Y(F) \subset B(x_*)$;
- 3) $Y(F) \neq \emptyset$ при $B_\varepsilon(x_*) \neq \emptyset$;
- 4) x_* — точка екстремуму для функції $F(x)$ на множині X .

В означенні функції наповнення точка x_* є параметром. Для спрощення подальших формул залежність від x_* в означеннях функцій та множин явно вказувати не будемо.

2. Побудова функцій наповнення. Позначимо через $T(f)$ множину функцій наповнення для функції $f(x)$.

Теорема 1. Нехай $F(x) \in T(f)$. Якщо $j(a)$ — строго монотонна неперервно диференційовна функція, визначена на множині значень функції $F(x)$, то $\varphi(F(x)) \in T(f)$.

Доведення. Позначимо $\Phi(x) = \varphi(F(x))$.

Очевидно, що $\Phi(x)$ означена і неперервна на $X \setminus B_\varepsilon(x_*)$.

Розглянемо похідну функції $\Phi(x)$ за напрямком $h \in H(x)$ в точках $x \in X \setminus B_\varepsilon(x_*)$:

$$\begin{aligned} \Phi'(x; h) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [\Phi(x + \alpha h) - \Phi(x)] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\varphi(F(x + \alpha h)) - \varphi(F(x))}{F(x + \alpha h) - F(x)} \frac{F(x + \alpha h) - F(x)}{\alpha} \end{aligned}$$

або

$$\Phi'(x; h) = \frac{\partial \varphi(F(x))}{\partial F(x)} F'(x; h). \quad (1)$$

З цієї рівності отримаємо

$$\Phi'(x;h) \cdot \Phi'(x;-h) = \left[\frac{\partial \varphi(F(x))}{\partial F(x)} \right]^2 F'(x;h) \cdot F'(x;-h). \quad (2)$$

З означення функції $\varphi(\alpha)$ випливає, що $\partial \varphi(F(x))/\partial F(x) \neq 0$. Тому з (2) отримаємо: $Y(F) = Y(\Phi) \subset B(x_*)$.

Оскільки x_* — екстремальна точка для функції $F(x)$, то $F'(x_*, h_1) \cdot F'(x_*, h_2) \geq 0$ для довільних $h_1, h_2 \in H(x_*)$. Тоді з (1) отримаємо: $\Phi'(x_*, h_1) \cdot \Phi'(x_*, h_2) \geq 0$. Звідси за лемою 1 випливає екстремальність точки x_* для функції $\Phi(x)$, що завершує доведення теореми.

Означимо множини:

$$\bar{B}_\varepsilon(x_*) = \{x \in B_\varepsilon(x_*) : x + \alpha(x_* - x) \notin B_\varepsilon(x_*), 0 < \alpha \leq 1\},$$

$$T_+(f) = \{F(x) \in T(f) : x_* = \arg \max F(x),$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\bar{x} + \alpha(x_* - \bar{x})) = \infty \quad \forall \bar{x} \in \bar{B}_\varepsilon(x_*)\},$$

$$T_-(f) = \{F(x) \in T(f) : x_* = \arg \min F(x),$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\bar{x} + \alpha(x_* - \bar{x})) = -\infty \quad \forall \bar{x} \in \bar{B}_\varepsilon(x_*)\}.$$

Очевидно, що $-F(x) \in T_-(f)$, якщо $F(x) \in T_+(f)$.

Теорема 2. Якщо $F_1(x), F_2(x) \in T_+(f)$, то для $a > 0, b > 0$

$$F(x) = aF_1(x) + bF_2(x) \in T_+(f).$$

Доведення. Очевидно, що $F(x)$ означена і неперервна на $X \setminus B_\varepsilon(x_*)$.

З означень $T_+(f)$ та функції $F(x)$ випливає, що для довільного $x \in A(x_*)$ буде $F'(x; x - x_*) \cdot F'(x; x_* - x) < 0$, тобто $Y(F) \subset B(x_*)$.

Нехай $B_\varepsilon(x_*) \neq \emptyset$. Тоді $\varphi(\alpha) = F(x + \alpha(x_* - x)) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$.

З іншого боку, $j(\alpha)$ зростає і при $\alpha \rightarrow 1$, бо x_* — точка максимуму. $j(\alpha)$ неперервна на $(0, 1]$, тому існує $\bar{\alpha} = \arg \min_{0 < \alpha \leq 1} \varphi(\alpha)$. Тоді за

лемою 1 для точки $\bar{x} = x + \bar{\alpha}(x_* - x)$ отримаємо:

$$F'(\bar{x}; x_* - \bar{x}) \cdot F'(\bar{x}; \bar{x} - x_*) \geq 0,$$

тобто $\bar{x} \in Y(F)$ і $Y(F) \neq \emptyset$, що завершує доведення теореми.

Наслідок 1. Якщо $F_i(x) \in T_+(f)$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, то

$$F(x) = \sum_{i=1}^m a_i F_i(x) \in T_+(f).$$

Наслідок 2. Якщо $F_i(x) \in T_-(f)$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, то

$$F(x) = \sum_{i=1}^m a_i F_i(x) \in T_-(f).$$

Теорема 3. Нехай $F(x) \in T_+(f)$, а $r(x)$ — неперервна функція така, що $0 \leq r(x) < r(x + \alpha(x_* - x)) < r(x_*)$ для всіх $x \in X$, $0 < \alpha < 1$. Тоді $F(x) + r(x) \in T_+(f)$.

Доведення. Очевидно, що $\Phi(x) = F(x) + r(x)$ неперервна на $X \setminus B_\varepsilon(x_*)$, $x_* = \arg \max \Phi(x)$ і $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Phi(\bar{x} + \alpha(x_* - \bar{x})) = \infty$ для $\bar{x} \in \bar{B}_\varepsilon(x_*)$.

З означення $r(x)$ легко бачити, що для довільного $x \in \text{int } X$ виконується нерівність $r'(x; x_* - x) \cdot r'(x; x - x_*) \leq 0$. Тому $Y(\Phi) \subset B_\varepsilon(x_*)$.

Нерівність $Y(\Phi) \neq \emptyset$ при $B_\varepsilon(x_*) \neq \emptyset$ доводиться аналогічно теоремі 2.

Теореми 1-3 та наслідки до них дають механізм побудови нових функцій наповнення на основі відомих.

Наведемо приклади функцій з множини $T(f)$.

Позначимо

$$S(x_*) = \{x \in X: f(x_*) \leq f(x_* + \alpha(x - x_*)) \leq f(x_* + \beta(x - x_*)) \leq f(x) \\ 0 < \alpha < \beta < 1\},$$

$$D(x_*) = \inf_{x \in X \setminus S(x_*)} \|x - x_*\|.$$

Легко бачити, що $S(x_*) \neq \emptyset$ і $D(x_*) > 0$.

Теорема 4. Якщо $\rho^2 < 2\varepsilon D(x_*) / L$, де $\varepsilon > 0$, то

$$F(x) = \|x - x_*\|^2 / \rho^2 + \ln[f(x) - f(x_*) + \varepsilon] \in T_-(f).$$

Доведення. Легко бачити, що функція $F(x)$ означена і обмежена на $A(x_*)$, не має квазістаціонарних точок на множині $S(x_*) \setminus \{x_*\}$ і $x_* = \arg \min F(x)$.

Нехай $B_\varepsilon(x_*) \neq \emptyset$. Тоді $f(x) - f(x_*) + \varepsilon = 0$ для $x \in \overline{B}_\varepsilon(x_*)$ і $F(x + \alpha(x_* - x)) \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow 0$. Міркування, аналогічні доведенню теореми 2, дають: $Y(F) \neq \emptyset$.

Нехай $x \in A(x_*) \setminus S(x_*)$, $h \in H(x)$. Позначимо

$$g(\alpha) = f(x + \alpha h) - f(x_*) + \varepsilon,$$

де $\alpha > 0$. Очевидно, що $g(\alpha) > 0$ для достатньо малих α .

Розглянемо різницю $F(x + \alpha h) - F(x)$:

$$F(x + \alpha h) - F(x) = \frac{\|x + \alpha h - x_*\|^2 - \|x - x_*\|^2}{\rho^2} + \\ + \frac{g(\alpha) - g(0)}{g(0)} \ln \left(1 + \frac{g(\alpha) - g(0)}{g(0)} \right)^{\frac{g(0)}{g(\alpha) - g(0)}}$$

Розділимо ліву та праву частини на α та спрямуємо α до 0. У результаті отримаємо

$$F'(x; h) = 2\langle x - x_*, h \rangle / \rho^2 + f'(x; h) / (f(x) - f(x_*) + \varepsilon), \quad (3)$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярний добуток векторів.

Беручи до уваги умову теореми, обмеженість $f'(x; h)$ і те, що $f(x) > f(x_*)$, з (3) при $h = x_* - x$ отримаємо:

$$F'(x; x_* - x) < -L\|x - x_*\|^2 / \varepsilon D(x_*) + L\|x - x_*\| / \varepsilon \leq 0.$$

Припустимо, що $F'(x; x - x_*) \leq 0$. Тоді при $h = x - x_*$ з (3) випливає, що

$$2\|x - x_*\|^2 / \rho^2 \leq L\|x - x_*\| / (f(x) - f(x_*) + \varepsilon),$$

або

$$\|x - x_*\| < D(x_*),$$

що суперечить означенню $D(x_*)$.

Отже, $F'(x; x - x_*) \cdot F'(x; x_* - x) < 0$ і точка x не є квазі-стаціонарною точкою функції $F(x)$. Теорему доведено.

Інші приклади функцій наповнення:

$$F_1(x) = e^{F(x)} = [f(x) - f(x_*) + \varepsilon] e^{\|x - x_*\|^2 / \rho^2} \in T_-(f),$$

$$F_2(x) = e^{-F(x)} = \frac{1}{f(x) - f(x_*) + \varepsilon} e^{-\|x - x_*\|^2 / \rho^2} \in T_+(f),$$

$$F_3(x) = F_2(x) + \frac{1}{\|x - x_*\| + \varepsilon} \in T_+(f).$$

Зауважимо, що нові функції набувають, взагалі кажучи, нових властивостей. Зокрема, $F_1(x)$ означена і неперервна на X , $F_2(x)$ — від'ємна лише на $B_\varepsilon(x_*)$, $F_3(x)$ — істотно різниться від машинного нуля на $\text{int } X$ тощо.

3. Алгоритм глобальної мінімізації. Нехай x^* — точка глобального мінімуму функції $f(x)$ на X і $f_* = f(x^*)$. Будемо вважати задачу глобальної мінімізації розв'язаною, якщо знайдена точка $x_\varepsilon^* \in X$, така, що $f(x_\varepsilon^*) \leq f_* + \varepsilon$.

Загальну схему алгоритму глобальної мінімізації з використанням функції наповнення можна описати таким чином.

Нехай $x_k \in X$.

1. Оберемо x_k за початкову точку і за допомогою деякого методу локального пошуку знайдемо $x_k^* = \arg \min_{x \in X} f(x)$.

2. Застосуємо алгоритм локального пошуку до функції наповнення $F_k(x)$, побудованої для $f(x)$ в точці x_k^* . Якщо всі траєкторії пошуку виходять за межі X , то вважаємо x_k^* точкою глобального мінімуму. У протилежному випадку отримаємо точку $x_{k+1} \in B(x_k^*)$, приймемо $k=k+1$ і повернемося до кроку 1.

Зважаючи на властивості функції наповнення, легко бачити, що за скінченну кількість кроків алгоритм згенерує точку x_k^* таку, що $f(x_k^*) \leq f_* + \varepsilon$.

Зазначимо, що наявність точок розриву чи областей неозначеності у наповнювальній функції принципово не утруднює застосування методів локальної оптимізації, оскільки ці точки (області) власне і є шуканими.

1. Голуб Б.М., Оліярник Ю.П. Тунельний алгоритм пошуку глобального мінімуму неперервної функції // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1995. Вип.41. С.39-42. 2. Ge R.P. The theory of filled function method for finding global minimizers of nonlinearly constrained minimization problems // J. of Computational Mathematics. 1987. Vol.5, N1.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.96

О.В.Демидович, Г.Г.Цегелик

Узагальнена задача про призначення та методи її розв'язування

Розглянемо узагальнену задачу про призначення в постановці [3,6]

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n Q_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m); \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \leq b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0 \cup 1\} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

де Q_{ij}, a_{ij}, b_j — невід'ємні цілі константи; x_{ij} — шукані змінні.

У праці [5] доведено, що узагальнена задача про призначення належить до класу NP-повних задач і для її розв'язування невідомий ніякий поліноміальний алгоритм. Дана задача виникає при математичному моделюванні оптимального розподілу інформаційних ресурсів серед вузлів інформаційно-обчислювальних мереж [4]. Як відомо, при практичному застосуванні точний розв'язок задачі не завжди є необхідним. Тому залишається актуальною розробка алгоритмів, які дають змогу знайти наближений розв'язок за обмежену кількість кроків. Нижче запропонований евристичний алгоритм розв'язування задачі (1)-(4), за допомогою якого можна знайти наближений розв'язок за кількість ітерацій не більш ніж $(n-1)m$. Крім цього, пропонується модифікація даного алгоритму, яка забезпечує в усіх випадках знаходження кращого розв'язку, але потребує більшого обсягу обчислень.

Зазначимо, що задача (1)-(4) не завжди є розв'язною. Однак у деяких випадках відсутність розв'язку задачі можна визначити наперед.

Нехай

$$k_i = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Визначимо функцію

$$n(k_1, \dots, k_m; b_2, \dots, b_n) = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{j=1}^i k_j + \sum_{l=2}^n \min(b_l, k_i - 1) \right).$$

Тоді, якщо

$$n(k_1, \dots, k_m; b_2, \dots, b_n) > \sum_{i=1}^n b_i \geq \max_{2 \leq j \leq n} n(k_1, \dots, k_m; b_2, \dots, b_j - 1, \dots, b_n),$$

то розв'язок задачі не існує. Цей факт випливає з наслідку (2.3) теореми доведеної в [1].

Опишемо евристичний алгоритм знаходження наближеного розв'язку задачі (1)-(4).

Алгоритм. Він складається з двох етапів. На першому етапі знаходимо початковий розподіл $X = \{x_{ij}\}_{m,n}$, який завжди буде оптимальним, якщо не враховувати умови (3). Цей етап складається з таких кроків:

1. Для всіх індексів i ($i = 1, 2, \dots, m$) визначаємо $\min_{1 \leq r \leq n} Q_{ir}$. Нехай

$$\min_{1 \leq r \leq n} Q_{ir} = Q_{is_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

2. Знаходимо початковий розподіл, тобто визначаємо матрицю $X = \{x_{ij}\}_{m,n}$, де

$$x_{is_i} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$x_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n; (i, j) \neq (i, s_i)).$$

На другому етапі переходимо до нового розподілу, якщо для початкового розподілу існує хоча б один індекс $j=r$ такий, що умова (3) не виконується. На кожній ітерації другого етапу одному з елементів x_{ij} матриці X , який має значення 1 і міститься в j -му стовпчику такому що для індекса j не виконується умова (3), присвоюється значення 0. Натомість, одному з елементів i -го рядка, який має значення 0, присвоюється значення 1.

Другий етап складається з таких кроків:

1. Формуємо вектор ознак $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, де $\varepsilon_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Елементи вектора ознак, що дорівнюють 0, визначають ті стовпці матриці X , елементи яких можна змінювати, а елементи вектора ознак, що дорівнюють 1, визначають ті стовпці матриці X , які далі змінюватись не будуть.

2. Шукаємо такий індекс j , для якого умова (3) не виконується. Якщо такий індекс не знайдений, переходимо до пункту 7. Якщо ж такий індекс існує, позначаємо його через r і переходимо до пункту 3.

3. Визначаємо множину $\Phi_r = \{s: s \neq r, \varepsilon_s = 0\}$. Якщо множина $\Phi_r = \emptyset$, то розв'язок знайти не вдалось, і переходимо до пункту 8. Якщо ж $\Phi_r \neq \emptyset$, то для кожного i , для якого $x_{ir} = 1$, знаходимо $\min_{s \in \Phi_r} (Q_{is} - Q_{ir})$. Нехай $\min_{s \in \Phi_r} (Q_{is} - Q_{ir}) = Q_{is_1} - Q_{ir}$. Переходимо до пункту 4.

4. Знаходимо $\min_i (Q_{is_1} - Q_{ir})$, де мінімум береться за тими індексами i , для яких $x_{ir} = 1$. Нехай $\min_i (Q_{is_1} - Q_{ir}) = Q_{is_1} - Q_{ir}$.

5. У матриці X приймаємо $x_{ir} = 0$, $x_{is_1} = 1$.

6. Перевіряємо умову (3) для $j=r$. Якщо вона не виконується, то переходимо до пункту 3, інакше присвоюємо елементові ε_r вектора E значення 1 (тобто r -й стовпчик матриці X вилучаємо з подальшого розгляду) і переходимо до пункту 2.

7. X — знайдений розподіл.

8. Кінець.

Таким чином, алгоритм дає змогу за обмежену кількість кроків знайти наближений розв'язок задачі (1)-(4).

Визначимо максимально можливу кількість кроків. Оскільки для кожного знайденого r існує не більш ніж m елементів x_{ir} , яким можна присвоїти нульове значення (виконуючи пункт 5 алгоритму), а всіх індексів r , для яких не виконується умова (3), може бути не більш ніж n (причому після перегляду $(n-1)$ -го індексу множина $\Phi_r = \emptyset$), то всього ітерацій може бути не більш ніж $m(n-1)$.

Проаналізуємо запропонований алгоритм з погляду отримання оптимального розв'язку. Пункти 2-6 для фіксованого $j=r$ здійснюють перехід до нового розподілу X , для якого умова (3) виконується. При цьому бажано, щоб значення цільової функції було якнайменшим. У запропонованому вище алгоритмі це досягається шляхом послідовного виконання при фіксованому $j=r$ пунктів 3-6 для кожного i , для якого $x_{ir} = 1$.

Розглянемо окрему задачу переходу від існуючого розподілу змінних x_{ij} для фіксованого $j=r$ до нового розподілу X , для якого умова (3) виконується. У запропонованому нижче алгоритмі цей перехід

здійснюється за один крок, тобто всі i , для яких $x_{ir} = 1$ розглядаються одночасно. Далі буде показано, що така задача еквівалентна задачі про рюкзак, а тому послідовність ітерацій 3-6 алгоритму 1 можуть дати лише її наближений розв'язок.

Отже, можна запропонувати таку модифікацію алгоритму, а саме його другого етапу.

1. Формуємо вектор ознак $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, де $\varepsilon_j = 0$ ($j=1, 2, \dots, n$).

2. Шукаємо такий індекс j , для якого умова (3) не виконується. Якщо такий індекс не знайдений, переходимо до пункту 7. Якщо ж такий індекс існує, позначаємо його через r і переходимо до пункту 3.

3. Для знайденого індексу $j=r$ визначаємо набір $i_1, \dots, i_l$, такий, що $x_{i_1 r} = \dots = x_{i_l r} = 1$.

4. Визначаємо множину $\Phi_r = \{s: s \neq r, \varepsilon_s = 0\}$. Якщо $\Phi_r = \emptyset$, то розв'язок знайти не вдалося, і переходимо на пункт 8. Якщо ж $\Phi_r \neq \emptyset$, то для кожного індексу i_k ($k=1, 2, \dots, l$), визначаємо індекс p_k такий, що

$$Q_{i_k p_k} - Q_{i_k r} = \min_{s \in \Phi_r} (Q_{i_k s} - Q_{i_k r}).$$

Позначаємо $c_{i_k} = Q_{i_k p_k} - Q_{i_k r}$, ($k=1, 2, \dots, l$) і вводимо змінні $y_k \in \{0 \cup 1\}$, де $y_k = 1$, якщо $x_{i_k r} = 1$ не зміниться при переході до нового розподілу, і $y_k = 0$, якщо в новому розподілі приймемо, що $x_{i_k r} = 0$.

Тоді умову мінімального збільшення значення цільової функції (1) при переході до нового розподілу, в якому для даного $j=r$ умова (3) виконується, можна записати у вигляді

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^l c_{i_k} (1 - y_k) \mid \sum_{k=1}^l a_{i_k} y_k \leq b_r; y_k \in \{0 \cup 1\}, k = 1, 2, \dots, l \right\},$$

або

$$\max \left\{ \sum_{k=1}^l c_{i_k} y_k \mid \sum_{k=1}^l a_{i_k} y_k \leq b_r; y_k \in \{0 \cup 1\}, k = 1, 2, \dots, l \right\}. \quad (5)$$

Задача (5) є лінійною задачею про рюкзак. Для її розв'язування можна використати метод динамічного програмування з попереднім зменшенням розмірності задачі, запропонований у [2].

5. Розв'язуємо задачу (5) і здійснюємо перехід до нового розподілу. Для цього, для кожного елемента $y_k = 0$ розв'язку задачі (5) приймаємо $x_{i_k r} = 0$ і $x_{i_k p_k} = 1$. У такий спосіб отримуємо новий розподіл X , при якому умова (3) виконується для індексу $j=r$.
6. Приймаємо $\varepsilon_r = 1$ і переходимо до пункту 2.
7. X — знайдений розподіл.
8. Кінець.

1. Баранов В. И., Стечкин Б. С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. М., 1989. 2. Марданов С. С. Сокращение размерности целочисленной задачи о ранце и ее решение параллельным алгоритмом динамического программирования. // Дискрет. математика. 1992. Т4. № 2. С. 32-38. 3. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М., 1990. 4. Цегелик Г. Г. Системы распределенных баз данных. Львов, 1990. 5. Nemhauser G. L., Wolsey L. A. Combinatorial and Integer Programming. John Wiley, New York, 1988. 6. Legedre J. P., Minoux M. Une application de dualite en programmation en nombres entiers-selection et affectations optimalis d'une flotte d'avions. // R.A.I.R.O. 1977. Vol. 11, №2, P 201-222.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.96

УДК 681.3.06

М.Ю. Щербина

Реалізація Outline з використанням Microsoft Visual C++ 1.51 і бібліотеки класів Microsoft Foundation Class*

Компілятор Microsoft Visual C++ 1.51 є потужним засобом для розробки програм під Microsoft Windows. Бібліотека класів Microsoft Foundation Class (MFC) і наявні засоби візуального програмування дають змогу спростити і прискорити процес створення програм. Проте MFC орієнтована на використання стандартних Windows-компонент, таких, як Button, Edit, ListBox і т.п. Фактично MFC можна вважати заміною Windows SDK.

© М.Ю. Щербина 1996

* Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант № U051215.

Іноді виникає потреба використовувати нестандартні елементи, як от елемент, відомий під назвою Outline. Прикладом Outline може бути вікно програми File Manager, яке містить дерево піддиректорій. Таким чином, під Outline розумітимемо вікно, яке відображає певним чином деревовидну структуру і дає змогу виконувати над нею задані дії: розгорнути підрівень або піддерево поточної вершини, згорнути відкрите піддерево, різним чином рухатись по вузлах дерева.

Вікна типу Outline використовуються у Windows-програмах настільки часто, що цей тип вікон можна вважати "стандартним". На жаль, реалізація Outline-класа відсутня і в MFC, і в MFC Samples. З огляду на це розроблена власна реалізація Outline. Сформулюємо задачі, які має виконувати Outline-об'єкт.

1. Надавати набір методів для формування деревовидної структури.

2. Відображати частину дерева, яка відкрита у даний момент.

3. Дозволяти навігацію по дереву з використанням стандартних клавіш:

й — перейти до попереднього пункту;

к — перейти до наступного пункту;

Ctrl + й — перейти до попереднього пункту на тому самому рівні;

Ctrl + к — перейти до наступного пункту на тому самому рівні;

з — перейти до пункту на рівень вище;

и — перейти до пункту на рівень нижче.

4. Дозволяти дії над деревом з використанням стандартних клавіш:

Enter — розгорнути/згорнути підрівень/піддерево поточної вершини (аналогічно подвійному натисканню на кнопку миші);

+ — розгорнути підрівень поточної вершини;

* — розгорнути піддерево поточної вершини;

Ctrl + * — розгорнути все дерево;

- — згорнути піддерево поточної вершини.

5. Дозволяти навігацію і згортання/розгортання за допомогою миші.

Одне з найважливіших завдань при реалізації Outline — забезпечити відображення дерева у вікні. В існуючих реалізаціях, які відомі автору, для цього використовуються різні методи. Реалізація Outline у Borland Delphi — це повне створення свого класу вікна з обробкою будь-яких подій і цілком самостійно реалізованою процедурою малювання вікна. На думку автора, цей метод невиправдано ускладнює

задачу малювання та обробки клавіатури і миші. Було прийняте рішення реалізувати Outline на базі стандартного для Windows класу ListBox. Для нормальної роботи ListBox, що створюється, повинен мати стилі LBS_OWNERDRAWFIXED, LBS_HASSTRINGS та LBS_NOREDRAU. Решта стилів можна вказувати опціонально. Зрозуміло, що стилі LBS_EXTENDEDSEL та LBS_MULTIPLESEL не можуть бути вказані.

Реалізація Outline містить два класи: COutline, породжений від CListBox, який і використовується у програмах, та клас COutlineNode, який репрезентує вузол дерева і має внутрішнє використання.

Кожен вузол дерева має такі поля:

void* Data — зберігає вказівник на деякі дані, що асоціюються з конкретним вузлом; це реалізовано для заміни функцій типу GetItemDataPtr, які мають внутрішнє використання (з кожним пунктом ListBox якраз і асоціюється об'єкт класу COutlineNode);

BOOL Last — вказує, чи заданий вузол останній серед синів свого батьківського елемента; використовується насамперед для малювання;

int Level — вказує рівень заданого вузла (0 для першого рівня); використовується насамперед для малювання;

COutlineNode* Parent — вказівник на батьківський вузол; використовується для малювання.

Розглянемо методи, які реалізовані у класі COutline. Насамперед необхідно перевизначити віртуальний метод void DrawItem (LPDRAWITEMSTRUCT lpDIS), який відповідає за малювання заданого пункту з ListBox. Структура DRAWITEMSTRUCT містить поле UINT itemID, яке і вказує індекс пункту, який малюватиметься. Алгоритм малювання виглядає так:

Якщо акція малювання ODA_DRAWENTIRE, то:

1. Розрахувати відступ заданого пункту (використовуючи поле Level). Намалювати горизонтальну лінію перед піктограмою та текстом.

2. Якщо пункт останній на своєму рівні (поле Last), то намалювати вертикальну лінію половинної висоти, інакше — вертикальну лінію повної висоти.

3. Провести цикл, рухаючись по батьківських елементах до кореня дерева. Для кожного батька, якщо він не останній на своєму рівні (поле Last), намалювати на відповідному рівні (поле Level) вертикальну лінію.

4. Намалювати відповідну піктограму залежно від того, чи має синій пункт, що малюється.

5. Вивести текст.

Якщо акція ODA_SELECT або елемент обраний (ODS_SELECTED) та акція ODA_DRAWENTIRE, то проінвертувати текст.

Запропонований автором алгоритм створювався поступово, і метою вдоскокалень було максимально пришвидшити малювання. У результаті перемалювання (наприклад, при прокручуванні) дерева, що містить понад 750 вузлів, відбувається непомітно для користувача.

Інший цікавий момент — реалізація додавання елементів у Outline. У Borland Delphi дерево цілком міститься у пам'яті. У даній реалізації метод Expand, який відкриває синій обраного елемента, реалізований як абстрактний віртуальний метод. Він автоматично викликається при обробці подій від клавіатури та миші і має використовувати метод AddChild для додавання елементів у дерево.

Під час розробки Outline виникло чимало проблем, які не достатньо широко висвітлені у літературі з програмування під Windows і в документації фірми Microsoft. По-перше, метод SetCurSel класу CListBox не викликає нотифікаційного повідомлення LBN_SELCHANGE батьківському вікну, тому реалізація нестандартної обробки клавіатури має самостійно викликати це повідомлення, наприклад: `::SendMessage (::GetParent(m_hWnd), WM_COMMAND, GetDlgCtrlID(), MAKELONG(m_hWnd, LBN_SELCHANGE))`

Друга проблема виникла при обробці натискання клавіші Enter. Обробка VK_RETURN у методі OnKeyDown не викликається, поки не перевизначити метод OnGetDlgCode. Останній повертає, яку обробку клавіатури бере на себе елемент з вікна діалогу. У нашому випадку єдино можливим значенням, що повертається, має бути DLGC_WANTALLKEYS (обробка всіх клавіш). Але при цьому Outline втрачає можливість автоматичної обробки Tab і Shift + Tab, що не є задовільним. Тому обробку табуляції треба реалізувати самостійно, викликаючи для батьківського вікна відповідно методи NextDlgCtrl і PrevDlgCtrl.

Перелічимо деякі основні методи класу COutline:

```
int AddChild(LPCSTR lpszItem, int nodeIndex =  
OUTLINE_ROOT);
```

```
int AddChildObject(LPCSTR lpszItem, void* data, int nodeIndex =  
OUTLINE_ROOT);
```

```
void Collapse(int nodeIndex = OUTLINE_ROOT);
```

```
void DeleteItem(LPDELETEITEMSTRUCT lpDeleteItemStruct);  
void DrawItem(LPDRAWITEMSTRUCT lpDIS);  
virtual void Expand(int nodeIndex = OUTLINE_ROOT) = 0;  
void ExpandAll(int nodeIndex = OUTLINE_ROOT);  
virtual CString GetDrawText(int nodeIndex);  
void* GetItemPtr(int nodeIndex);  
int GetLevel(int nodeIndex);  
CString GetCurPath(char delim = '.');  
BOOL HasSubLevel(int nodeIndex);  
afx_msg void OnDblClk();  
void ResetContent();  
void SetItemPtr(int nodeIndex, void* data).
```

Наприкінці наведемо основні властивості деяких існуючих реалізацій Outline.

1. Borland Delphi. Outline реалізований повністю самостійно. Програма SPY повідомила, що вікно Outline має зареєстрований Windows-клас TOutline. Зрозуміло, що нормальне використання цієї реалізації з Visual C++ практично неможливе.

2. File Manager. Використовуючи SPY, з'ясувалось, що Directory Tree реалізовано як owner-draw list box, тобто фактично методом, описаним у статті. Таким самим методом реалізований каталог у Books Online.

3. MSOUTLIN.VBX. Автору стало відомо про реалізацію Outline фірмою Microsoft як Visual Basic Control (з усіма недоліками і перевагами, що впливають з цього). Проте у поставку Visual C++ 1.51 цей VBX-елемент не входить, у зв'язку з чим виникають проблеми у легальному використанні цієї реалізації.

4. Є інформація, що у нових 32-бітових операційних системах фірми Microsoft вирішено зробити Outline стандартним елементом.

Стаття надійшла до редколегії 12.09. 95

*І. М. Содома***Бухгалтерська звітність: проблеми достовірності інформації при сплаті податків юридичними особами**

При аналізі економічних явищ і процесів велике значення мають економіко-математичні і статистичні методи обробки інформації.

У природі все взаємозв'язане. Жодне явище не можна вивчити і зрозуміти, якщо розглядати його ізольовано, поза зв'язком з навколишніми середовищем. Виявлення взаємозв'язків між процесами дає змогу пізнати їх суть і розвиток.

Найпоширенішими методами вивчення взаємозв'язків при аналізі різноманітних явищ є методи кореляційного і регресійного аналізів.

Метою аналізу кореляції є дослідження тісноти зв'язку між явищами. Кореляційний аналіз є одним, але не єдиним методом виявлення зв'язку між явищами. Але тільки кореляційний аналіз дає просту оцінку тісноти зв'язку. Говорячи про кореляційний аналіз, не можна забувати регресійний аналіз. Він є методом статистичного аналізу зв'язку між явищами, який має на меті аналіз форми зв'язку. Між ознаками економічних явищ переважають кореляційні зв'язки. Простою кореляцією прийнято називати кореляцію між двома змінними. Узагальнюючою оцінкою тісноти зв'язку поміж двома змінними є індекс кореляції [2]:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 - \sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}}$$

де σ_y^2 — дисперсія результативного показника; σ_{yx}^2 — середній квадрат відхилень фактичних значень результативного показника від теоретичного, розрахованих на основі регресії.

Абсолютне значення індексу кореляції міститься в межах $0 \leq R \leq 1$.

Якщо $R=1$, то зв'язок функціональний, а якщо $R=0$, досліджувані явища між собою не пов'язані.

В антропології і біометрії часто застосовують наступну класифікацію при оцінці тісноти зв'язку:

- ... 0,2 — слабкий зв'язок;
- 0,2 ... 0,4 — слабше середньої тісноти;
- 0,4 ... 0,6 — середня тіснота;
- 0,6 ... 0,8 — тісніше середньої тісноти;
- 0,8 ... — сильний зв'язок.

Треба зазначити, що така класифікація є умовною. Якщо зв'язок є лінійним, то можна користуватись коефіцієнтом кореляції, визначеним за методом моментів:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Тобто

$$r = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{N} - \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \sqrt{(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}} \quad (1)$$

де

$$\overline{x^2} = \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \right)^2; \quad \overline{y^2} = \left(\frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} \right)^2; \quad \bar{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}; \quad \bar{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{N}.$$

Коефіцієнт кореляції набуває значення в інтервалі $-1 \leq r \leq 1$.

Від'ємне значення коефіцієнта свідчить про обернений зв'язок між явищами.

У деяких випадках поряд з індексом або коефіцієнтом кореляції визначається показник, що називається коефіцієнтом детермінації:

$$d = r^2.$$

Він показує, яка частина варіації результативного показника зв'язана з варіацією факторного показника. При визначенні форми зв'язку між економічними явищами найчастіше користуються такими формулами:

пряма лінія $y = a_0 + a_1 x;$

парабола $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2;$

гіпербола	$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$;
показникова	$y = a_0 a_1^x$;
функція	
степенева	$y = a_0 x^{a_1}$;
функція	
напівлогарифмічна	$y = a_0 + a_1 \ln x$;
функція	

Параметри цих функцій звичайно визначають методом найменших квадратів:

$$F = \sum_{i=1}^n \left(-y_{i_{\text{рогр}}} + y_{i_{\text{факт}}} \right)^2 \rightarrow \min.$$

Тоді коефіцієнти a_0 і a_1 визначаються таким чином:

$$a_1 = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2},$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}.$$

Отже, визначивши a_0 і a_1 , можемо побудувати рівняння регресії залежності факторного показника від аргумента x .

Аналізовані ряди динаміки майже завжди є вибірками з довших рядів. Тому необхідна загальна перевірка надійності результатів кореляційного і регресійного аналізу.

З цією метою використовуємо, наприклад, F-критерій. Правильність обраної форми зв'язку перевіряється за допомогою такої формули:

$$F = \frac{\sum (\bar{y}_x - \bar{y})^2 (N - n)}{(n - 1) \sum (y - \bar{y}_x)^2}.$$

Якщо емпіричне значення більше ніж табличне, то форму зв'язку можна вважати правильною.

Для перевірки достовірності поданої інформації будуємо двосторонні інтервали довір'я для індивідуальних значень залежної змінної y .

Для вирішення питання контролю за достовірністю інформації найбільш точним і математично коректним слід визнати метод побудови так званих допустимих або толерантних меж [1]. Користуючись цим

методом, для залежної змінної y будуються інтервали з імовірністю довір'я 1-а (відсоток точок, які потрапляють в область інтервалів довір'я при необмеженому продовженні експерименту) і коефіцієнтом довір'я 1-б (ймовірність, із якою випадкові межі довір'я будуть охоплювати заданий відсоток точок y_1 і y_2 такі, що $y_1 < y < y_2$ за наступним принципом:

$$y_{1,2} = y \pm \lambda_{\alpha}^{(1)} S \quad (2)$$

де $\lambda_{\alpha}^{(1)}$ визначається таким чином:

$$\lambda_{\alpha}^{(1)} = u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{1-\beta}^2(n-1)} \left(1 + \frac{C_1^2(x)}{2n} \right)}. \quad (3)$$

Тут u_{α} — 100q-процентна точка нормального розподілу, $\chi_{\alpha}^2(n-1)$ — 100q-процентна точка χ^2 -розподілу з (n-1) степенями вільності, n — об'єм вибірки, $C_1^2(x)$ — компонента, яка враховує збільшення ступення розкиду емпіричного середнього y у міру віддалення x від свого середнього значення $\bar{x}(n)$ і визначається як

$$C_1^2(x) = 1 + \frac{(x - \bar{x}(n))^2}{S_x^2}. \quad (4)$$

Для того, щоб проілюструвати описані вище теоретичні основи, візьмемо для прикладу діяльність десяти банків міста та простежимо її на прикладі двох взаємозалежних показників: обігу та прибутку (див. таблицю).

Розрахункові дані для прикладу.

N банку	Обіг x , млн.грн	Прибуток y , млн.грн.	x^2	$x \cdot y$	y^2
1	7	3	49	21	9
2	11	4	121	44	16
3	12	4	144	48	16
4	16	6	256	96	36

N банку	Обіг x , млн. грн	Прибуток y , млн. грн.	x^2	$x \cdot y$	y^2
5	22	8	484	176	64
6	27	7	729	189	49
7	30	11	900	330	121
8	38	14	1444	532	196
9	45	18	2025	840	324
10	46	17	2406	832	286

Щоб визначити чи є залежність між обігом і прибутком, скористаємось формулою (1):

$$r = \frac{\frac{3079}{10} - \frac{92}{10} \cdot \frac{254}{10}}{\sqrt{\left(\frac{8558}{10} - \left(\frac{254}{10}\right)^2\right)\left(\frac{1070}{10} - \left(\frac{92}{10}\right)^2\right)}} \approx 0,98$$

Як бачимо, прибуток досить сильно залежить від обігу. З наведених вище даних можна отримати систему лінійних рівнянь, з яких визначити коефіцієнти регресії a_0 і a_1 :

$$a_0 = 0,31;$$

$$a_1 = 0,35.$$

Отже, рівняння регресії матиме такий вигляд:

$$y = 0,31 + 0,35x.$$

Якщо зобразити на рисунку теоретичні та емпіричні дані, то побачимо, що банк з порядковим номером 6 значно відхиляється від лінії регресії. Отже, концепція аналізу полягає у наступному: за емпіричними даними будується лінія регресії для певних двох показників; за формулами (2)-(4) визначається інтервал довір'я для лінії регресії; у кінці кожного звітного періоду знаходимо фактичну точку, яка відповідає обраним показникам. Якщо дана точка не виходить за межі інтервалу довір'я, вважаємо, що показники є правдивими. Якщо ж ні — залежний показник поданий неправильно.

Слід зауважити, що для повного і ґрунтовного аналізу необхідно мати комплексну інформаційну модель юридичних осіб.

Також у цьому аналізі потрібно вести довідник основних показників господарської діяльності підприємств і установ (наприклад, розмір основних виробничих фондів повинен бути приблизно однако-

вим для одного й того самого підприємства упродовж тривалого часу). Відхилення віднижньої чи верхньої межі інтервалу довір'я для аналізу має єдине тлумачення — подана інформація недостовірна.

Використана література:

1. Айвазян С.А. Статистическое исследование зависимостей. М., 1968;
2. Рябушкин Т.В. Теория и методы экономической статистики. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 1.03.96

УДК 539.3:538.54

О.Р. Гачкевич, О.М. Дзюбачик, М.Т. Солодяк

Визначення гістерезисного тепла у феритах при індукційному нагріванні

Відомо [1,5], що в деяких феритах (наприклад, з прямокутною петлею гістерезису) внаслідок великого омичного опору майже не виникають індукційні струми, і отже, практично не виділяється Джоулеве тепло. Проте такі тіла характеризуються великим тангенсом кута втрат або великим тепловиділенням при перемагнічуванні, знаходження якого є метою даної роботи.

Нехай на поверхні (S) тіла підтримується напруженість зовнішнього магнітного поля

$$\vec{H}^{(0)}(\vec{r}_0, t) = \vec{H}_0(\vec{r}_0) \cos \omega t. \quad (1)$$

Якщо зобразити на рисунку теоретичні та емпіричні дані, то побачимо, що банк з порядковим номером 6 значно відхиляється від лінії регресії. Отже, концепція аналізу полягає у наступному: за емпіричними даними будується лінія регресії для певних двох показників; за формулами (2)-(4) визначається інтервал довір'я для лінії регресії; у кінці кожного звітного періоду знаходимо фактичну точку, яка відповідає обраним показникам. Якщо дана точка не виходить за межі інтервалу довір'я, вважаємо, що показники є правдивими. Якщо ж ні — залежний показник поданий неправильно.

Слід зауважити, що для повного і ґрунтовного аналізу необхідно мати комплексну інформаційну модель юридичних осіб.

Також у цьому аналізі потрібно вести довідник основних показників господарської діяльності підприємств і установ (наприклад, розмір основних виробничих фондів повинен бути приблизно однаковим для одного й того самого підприємства упродовж тривалого часу). Відхилення віднижньої чи верхньої межі інтервалу довір'я для аналізу має єдине тлумачення — подана інформація недостовірна.

Використана література:

1. Айвазян С.А. Статистическое исследование зависимостей. М., 1968;
2. Рябушкин Т.В. Теория и методы экономической статистики. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 1.03.96

УДК 539.3:538.54

О.Р. Гачкевич, О.М. Дзюбачик, М.Т. Солодяк

Визначення гістерезисного тепла у феритах при індукційному нагріванні

Відомо [1,5], що в деяких феритах (наприклад, з прямокутною петлею гістерезису) внаслідок великого омичного опору майже не виникають індукційні струми, і отже, практично не виділяється Джоулеве тепло. Проте такі тіла характеризуються великим тангенсом кута втрат або великим тепловиділенням при перемагнічуванні, знаходження якого є метою даної роботи.

Нехай на поверхні (S) тіла підтримується напруженість зовнішнього магнітного поля

$$\vec{H}^{(0)}(\vec{r}_0, t) = \vec{H}_0(\vec{r}_0) \cos \omega t. \quad (1)$$

Зауважимо, що для даного випадку амплітуда $\vec{H}_0(\vec{r})$ мало змінюється всередині тіла (глибинне нагрівання). Тут $\vec{r}; \vec{r}_0$ — радіус-вектори даної точки тіла і розглядуваної точки поверхні відповідно; $\omega = 2\pi\nu$; ν — частота; t — час.

Питому густину гістерезисного тепла, що виникає внаслідок перемагнічування, після усереднення за періодом коливань електромагнітної хвилі $T = 1/\nu$ зобразимо [3,4] у вигляді

$$Q = v \oint \vec{H} \cdot d\vec{B} = v \int_0^T \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt. \quad (2)$$

Крапкою між величинами позначено скалярний добуток векторів. Гістерезисну залежність між індукцією $\vec{B}$ і напруженістю $\vec{H}$ магнітного поля будемо таким чином. Прийmemo, що ці вектори паралельні, тобто

$$\vec{B} = B(H) \vec{e}_H, \quad (3)$$

де $\vec{e}_H = \frac{\vec{H}}{H}$ — одиничний орт у напрямі вектора $\vec{H}$; H і B — проєкції векторів $\vec{H}$ і $\vec{B}$ на додатний напрям вектора $\vec{H}$. Зауважимо, що в такому наближенні виконується співвідношення $\vec{H} \cdot \vec{B} = HB$ і формула (2) також справедлива відповідно для проєкцій розглядуваних величин.

Нелінійну залежність $B = B(H)$ описуватимемо динамічною петлею гістерезису. Аналітичний вираз такої петлі при періодичній у часі напруженості магнітного поля можна записати таким чином [3]:

$$B = \mu_0 \left(\sqrt{1 - \chi^2} H - \frac{\chi}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \beta \arctg \alpha \left(\sqrt{1 - \chi^2} H - \frac{\chi}{\omega} \frac{\partial H}{\partial t} \right), \quad (4)$$

де $\beta = \frac{2}{\pi} B_S$; $\alpha = (\mu - 1)\mu_0/\beta$; $\chi = H_c/H_m$ при $H < H_m$ і $\chi = H_c/H_0$ при $H > H_m$; H_c — коерцитивна сила; H_m — напруженість магнітного поля, що відповідає гістерезисному насиченню; μ_0 — магнітна стала; μ — початкова відносна магнітна проникність матеріалу; B_S — величина індукції насичення. У випадку $\chi = 0$ співвідношення (4) описує основну криву намагнічування, що апроксимує залежність для магнітом'яких матеріалів [2], у яких відсутнє гістерезисне тепло.

Підставляючи залежність (4) у формулу (2) і враховуючи при цьому співвідношення (1) і (3), вираз для тепловиділення зображаємо як

$$Q = 2\pi v^2 H_0^2 \left[I_1 + (\mu - 1) I_2 \right]. \quad (5)$$

Тут

$$I_1 = \int_0^T dt \cos \omega t \left(\chi \cos \omega t - \sqrt{1 - \chi^2} \sin \omega t \right); \quad (6)$$

$$I_2 = \int_0^T \frac{dt \cos \omega t \left(\chi \cos \omega t - \sqrt{1 - \chi^2} \sin \omega t \right)}{1 + \varepsilon \left(\sqrt{1 - \chi^2} \cos \omega t + \chi \sin \omega t \right)^2}, \quad (7)$$

$\varepsilon = \sqrt{\alpha H_0}$ — параметр нелінійності [2].

Зауважимо, що інтеграл I_1 обчислюється елементарно і дорівнює

$$I_1 = \frac{1}{2} T \chi. \quad (8)$$

Для знаходження другого інтеграла I_2 скористаємося методикою обчислення означених інтегралів за допомогою лишків. Для цього зробимо заміну змінної інтегрування, увівши комплексну змінну z , зв'язану зі змінною t співвідношенням $z = e^{i \omega t}$. При зміні t від 0 до T комплексна змінна пробігає замкнутий контур — коло $|z| = 1$ в додатному напрямку. Таким чином, інтеграл (7) переходить в інтеграл по замкнутому контуру від функції комплексної змінної:

$$I_2 = \frac{k}{\varepsilon \omega} \oint_{|z|=1} \frac{dz \left[z^4 - (k^2 - 1) z^2 - k^2 \right]}{z \left[z^4 + \frac{2(\varepsilon + 2)}{\varepsilon} k^2 z^2 + k^4 \right]}, \quad (9)$$

де $k \equiv \sqrt{1 - \chi^2} + i \chi$.

Особливими точками підінтегральної функції є нулі знаменника:

$$z_0 = 0, \quad z_1 = \frac{ik}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon + 2 - 2\sqrt{\varepsilon + 1}}, \quad z_2 = -z_1, \quad z_3 = -\frac{k^2}{z_1} \quad \text{і}$$

$$z_4 = \frac{k^2}{z_1}, \quad \text{які є полюсами першого порядку. Оскільки } |z_1| < 1, \text{ то}$$

точки z_0, z_1 і z_2 лежать всередині круга $|z| = 1$. Розклавши підінтегральну функцію на прості множники, а також скориставшись основною теоремою теорії лишків [6], отримаємо у кінцевому результаті для I_2

$$I_2 = \frac{T\chi}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}. \quad (10)$$

Підставивши формули (8) і (10) у співвідношення (5), матимемо вираз для гістерезисного тепла:

$$Q = \pi \nu \mu_0 H_0^2 \chi \left[1 + \frac{2(\mu - 1)}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}} \right]. \quad (11)$$

Якщо величина магнітного поля є меншою за характерну для феромагнітних тіл, тобто $H_0 < H_S = B_S / \mu_0 \approx 10^6 \text{ А / м}$, то в залежності (4) нехтуємо першим членом порівняно з другим [1,4,5]. Враховуючи співвідношення (1), залежність (4) для даного наближення подаємо у вигляді

$$b \cong \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}} \arctg \sqrt{\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \chi^2} \cos \omega t + \chi \sin \omega t \right), \quad (12)$$

де $b = B / \mu_0 H_0$ — безрозмірна індукція магнітного поля.

У такому наближенні у формулі (11) для тепловиділень аналогічно знехтуємо одиницею порівняно з другим членом. Тоді з виразу (11) отримаємо для відносного гістерезисного тепла співвідношення

$$q = \frac{Q}{2 \pi \nu \mu \mu_0 H_0^2} = \frac{\chi}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon}}. \quad (13)$$

Аналіз числових досліджень виконано для сплаву ЮДНК 4, для якого $H_c = 0,55 \cdot 10^5 \text{ А / м}$, $H_m = 2,4 \cdot 10^5 \text{ А / м}$, $B_r = 1,2 \text{ Тл}$, $\mu = 151$, $B_S = 1,4 \text{ Тл}$.

Рис. 1 ілюструє залежність індукції від напруженості магнітного поля, яка описана формулою (12), для значень $H_0 = 10^3 \text{ А / м}$, $H_0 = 10^5 \text{ А / м}$, $H_0 = 10^7 \text{ А / м}$ (відповідно криві 1-3); рис. 2 — залежність гістерезисного тепла q від амплітуди магнітного поля на поверхні H_0 .

Аналіз отриманих результатів свідчить, що зі збільшенням H_0 до величини H_m ширина петлі гістерезису є постійною, а відносні тепловиділення q майже не залежать від H_0 . При $H_0 > H_m$ ширина петлі зменшується обернено пропорційно до H_0 , а величина q — за законом $1 / \sqrt{H_0}$.

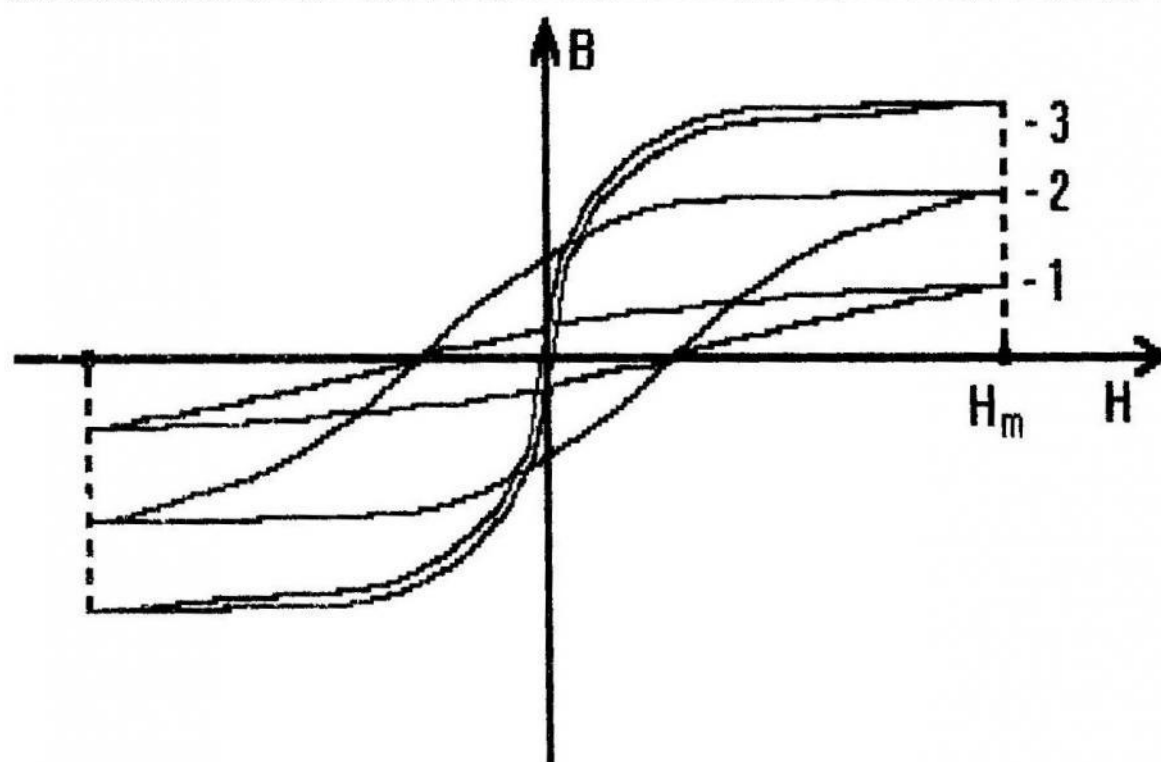


Рис. 1

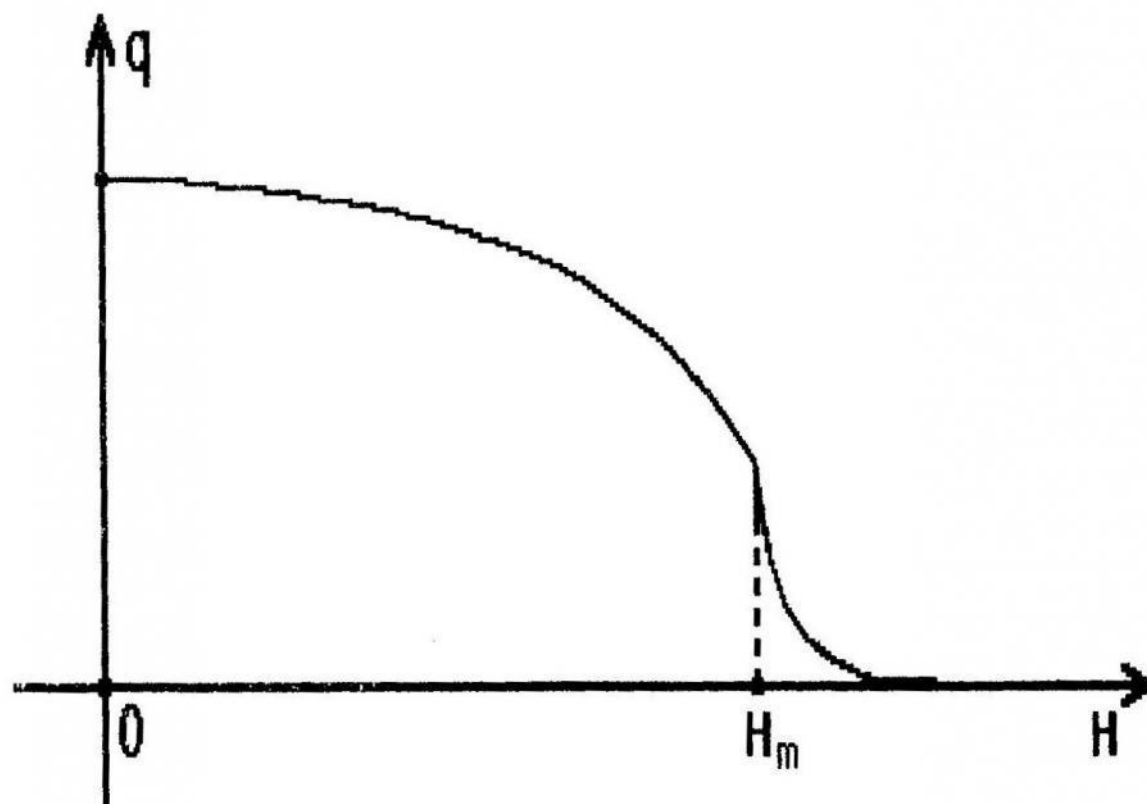


Рис. 2

1. Боровик Е. С., Мильнер А. С., Еременко В. В. Лекции по магнетизму. Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1972. 248 с. 2. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т. Термопружність електропровідних магнітом'яких тіл у зовнішніх усталених електромагнітних полях // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1987. № 2. С. 43-47. 3. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Солодяк М. Т. Термопружність електропровідних магнітотвердих тіл у зовнішніх усталених електромагнітних полях // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1988. № 5. С. 25-28. 4. Гачкевич А. Р., Солодяк М. Т. Термомеханическое поведение слоя при воздействии гармонического электромагнитного поля // Прикл. механика. 1989. Т. 25, № 12. С. 93-101. 5. Мишин Д. Д. Магнитные материалы. М.: Высш. шк., 1981. 335 с. 6. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Наука, 1967. - 304 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.02.96

УДК 519.6:539.3

І.І.Дияк

Симетрична скінченно-гранично-елементна апроксимація D-адаптивної моделі теорії пружності

У роботах [4,5,6] для дослідження пружно-деформованого стану просторових конструкцій запропоновано D-адаптивні моделі теорії пружності. Чисельне дослідження таких моделей проведено на основі застосування методу скінченних елементів (МСЕ) [6] та комбінованої скінченно-гранично-елементної апроксимації [5]. Застосування методу Гальоркіна до розв'язання задачі теорії пружності на основі прямого методу граничних елементів (ПМГЕ) у формі [1,5,11] приводить до несиметричної матриці результуючої системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Вперше варіант симетричного об'єднання МСЕ та ПМГЕ був запропонований у роботі [7]. В останні роки симетричний варіант МГЕ, який вимагає використання граничних інтегральних рівнянь з гіперсингулярними ядрами — об'єкт широкого кола досліджень як теоретичних, так і практичних застосувань [9,10,12,13].

Розглядається змішана крайова задача теорії пружності [2]:

$$\Delta^* u = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}[\mathbf{n}] = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \mu \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D. \quad (3)$$

Тут Δ — Лапласіан, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ — вектор переміщень, $\mathbf{n}$ — вектор зовнішньої одиничної нормалі на $\partial\Omega$, λ, μ — константи Ляме матеріалу. Вектори $\mathbf{h}, \mathbf{g}$ — задані граничні напруження та переміщення на Неймановій Γ_N та Діріхле $\Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_N$ частинах границі області відповідно.

Нехай $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Gamma_c = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, де Ω_2 — область вигляду

$$\Omega_2 = \left\{ \alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1^0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^e, -\frac{h}{2} \leq \alpha_2 \leq \frac{h}{2} \right\};$$

тут h — значно менше, ніж інший характерний розмір цієї області. Згідно з [4] можна розділити задачу (1)-(3) на систему двох крайових задач з умовами спряження на спільній границі Γ_c [5,6]. Це складає так звану D-адаптивну модель задачі (1)-(3).

Припустимо тепер, що $\Omega_1 = \Omega_B$, а $\Omega_2 = \Omega_F$, тобто вважаємо, що $\Omega = \Omega_B \cup \Omega_F \cup \Gamma_c$; тут Ω_B — область гранично-елементної апроксимації розв'язку; Ω_F — область скінченно-елементної апроксимації розв'язку. Далі для спрощення викладок вважатимемо, що $\Gamma_N \cap \partial\Omega_B = \emptyset$.

Згідно з фундаментальними концепціями СЕ та ГЕ аналізу, гібридна процедура базується на варіаційному формулюванні. У даній роботі використаємо симетричний варіант ПМГЕ [7,9,12]. Фундаментальні розв'язки (1), як відомо [2], можна подати у вигляді

$$\Gamma_{ij} = -\frac{\lambda + 3\mu}{4\pi(\lambda + 2\mu)\mu} \left[\delta_{ij} \ln r - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} r_i r_j \right], \quad j = 1, 2 \quad (4)$$

де $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$. Тоді значення переміщень для $\mathbf{x} \in \Omega_B$ знаходяться з

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{t}(\mathbf{y}) \Gamma(\mathbf{y}, \mathbf{x}) dS_y - \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{u}(\mathbf{y}) T_y[\Gamma(\mathbf{y}, \mathbf{x})] dS_y \quad (5)$$

Визначимо граничні інтегральні оператори [7]:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{V}\mathbf{t})(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{t}(y) \Gamma(y, \mathbf{x}) dS_y, \\
(\mathbf{K}\mathbf{u})(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{u}(x) \mathbf{T}_y [\Gamma(y, \mathbf{x})] dS_y, \\
(\mathbf{K}'\mathbf{t})(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{t}(y) \mathbf{T}_x [\Gamma(y, \mathbf{x})] dS_y, \\
(\mathbf{D}\mathbf{t})(\mathbf{x}) &= -\mathbf{T}_x \left[\int_{\partial\Omega_B} \mathbf{u}(x) \mathbf{T}_y [\Gamma(y, \mathbf{x})] dS_y \right];
\end{aligned}$$

тут оператор $\mathbf{V}$ — потенціал простого шару, $\mathbf{K}$ — потенціал подвійного шару, $\mathbf{K}'$ — спряжений до потенціалу подвійного шару (в обох останніх операторах інтеграли розуміємо в сенсі головного значення Коші), $\mathbf{D}$ — гіперсингулярний оператор. Далі, використовуючи проектор Кальдерона, можна записати перевизначену систему граничних інтегральних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(x) \\ \mathbf{t}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{I} - \mathbf{K} & \mathbf{V} \\ \mathbf{D} & \frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(x) \\ \mathbf{t}(x) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Граничні інтегральні оператори $\mathbf{V}, \mathbf{K}, \mathbf{D}$ — псевдодиференціальні оператори порядку $-1, 0, 1$ відповідно. Властивості цих операторів у просторах Соболева відомі з роботи [8]. Зі співвідношень (6) можемо записати явне представлення для напружень, яке задається оператором Стеклова-Пуанкаре:

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{V}^{-1} \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K} \right) \mathbf{u} = \left[\left(\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K}' \right) \mathbf{V}^{-1} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K} \right) \mathbf{D} \right] \mathbf{u}, \quad (7)$$

який є симетричним псевдодиференціальним оператором порядку -1 , що відповідає розв'язку задачі Діріхле. Правий обернений оператор задається, як

$$\mathbf{u} - \mathbf{r} = \mathbf{U}\mathbf{t} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{V}\mathbf{t} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} - \mathbf{K} \right) \mathbf{D}^{-1} \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} - \mathbf{K}' \right) \mathbf{t} + \mathbf{V}\mathbf{t} \quad (8)$$

де $\dot{\mathbf{D}}^{-1}$ означає псевдообернений до $\mathbf{D}$ по відношенню до жорстких зміщень $\mathbf{g}$. Це відображення відповідає розв'язку задачі Неймана, якщо задовільняються умови існування розв'язку задачі.

Визначимо енергетичний простір, який відповідає Ω_F [3]:

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega_F) := \left\{ v \in H^1(\Omega_F) : v = 0 \text{ на } \partial\Omega_F \cap \Gamma_D \right\}$$

Простір слідів гранично-елементної області визначимо як $H^{\frac{1}{2}}(\Omega_B)$, а спряжений до нього — як $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_B)$. Введемо позначення $\langle \sigma, v \rangle = \int_{\partial\Omega_B} (\sigma, v) dS$, де $(\bullet, \bullet)$ — скалярний добуток у R^2 .

Введемо підпростір

$$H_0^{-\frac{1}{2}}(\Omega_B) := \left\{ x \in \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Omega_B) \right)^2 : \int_{\Omega_B} x dS = 0, \int_{\partial\Omega_B} r x dS = 0 \right\},$$

де $\mathbf{r}$ — радіус-вектор точки. Визначимо також добуток просторів:

$$\mathbf{U} = \left\{ (\mathbf{u}_F, \tilde{\mathbf{u}}) \in \left(H^1(\Omega_F) \right)^3 \times \left(H^{\frac{1}{2}}(\Omega_B) \right)^2, \mathbf{u}_F = \tilde{\mathbf{u}} \text{ на } \Gamma_c \right\}$$

Тепер простір тестових функцій для області Ω_B визначається так:

$$\mathbf{V}_{\Gamma_D} = \left\{ (\mathbf{v}_F, \tilde{\mathbf{v}}) \in \mathbf{U} : \mathbf{v}_F \in \left(H_{\Gamma_D}^1(\Omega_F) \right)^3, \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{w} \text{ на } \partial\Omega_B, \mathbf{w} \in \left(H^1(\Omega) \right)^2, \mathbf{w}|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$$

Тоді варіаційну постановку задачі можна сформулювати:

Знайти

$$((\mathbf{u}_F, \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{u}_B, \mathbf{t}_B) \in \mathbf{U} \times \left(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_B) \times H_0^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_B) \right) \quad (9)$$

з $\mathbf{u}_F = \mathbf{g}$ на $\Gamma_D \cap \partial\Omega_F$ і $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{g}$ на $\Gamma_D \cap \partial\Omega_B$, що задовільняють рівняння

$$a_F(\mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F) + \langle \mathbf{t}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle = f(\mathbf{v}_F), \quad \forall (\mathbf{v}_F, \tilde{\mathbf{v}}) \in \mathbf{V}_{\Gamma_D} \quad (10)$$

та варіаційні умови спряження:

$$\langle \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_B, \tau_B \rangle = 0 \quad \forall \tau_B \in \left(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_B) \right)^2. \quad (11)$$

Умова (9) тут розуміється так: для $\forall(\mathbf{u}_F, \tilde{\mathbf{u}})$: $\exists \mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ така що $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ на Γ_D для заданої $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ і $\mathbf{u}_F = \mathbf{u}$ на Ω_F , $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ на $\partial\Omega_B$.

Тут у рівнянні (10):

$$a_F(\mathbf{u}_F, \mathbf{v}_F) = \int_{\Omega_F} (T_{11}(\mathbf{u}_F)\varepsilon_{11}(\mathbf{v}_F) + T_{13}(\mathbf{u}_F)\varepsilon_{13}(\mathbf{v}_F) + M_{11}(\mathbf{u}_F)\kappa_{11}(\mathbf{v}_F)) d\Omega,$$

$$f(\mathbf{v}_F) = \int_{\Gamma_N} h \mathbf{v}_F d\Gamma,$$

де T_{11}, T_{13}, M_{11} — сили та момент відповідно, $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, \kappa_{11}$ — компоненти тензора деформацій [4].

Підставивши представлення (7) та використавши (6), одержимо симетричний запис другого доданка (10)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle &= \langle \mathbf{S} \mathbf{u}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{D} \mathbf{u}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{t}_B, \tilde{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{t}_B, \mathbf{K} \tilde{\mathbf{v}} \rangle + \langle \mathbf{V} \mathbf{t}_B, \tau \rangle - \\ &- \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}_B, \tau \rangle - \langle \mathbf{K} \mathbf{u}_B, \tau \rangle. \end{aligned}$$

Аналогічно до [9] можна показати, що білінійна форма у (10) є неперервною та $H^{\frac{1}{2}}_{\Gamma_B} \times H^{\frac{1}{2}}(\Omega_B)$ — еліптичною.

1. Дияк І.І., Чернуха А.Ю. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1993. - Вип.39. с.41-46. 2. Курадзе В.Д. Методи потенціала в теорії упругості. - Гос. из-тво "Физ.-мат. литер." -М., 1963, 472 с. 3. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. - М.: Наука, 1985-590с. 4. Савула Я.Г. Краевые и вариационные задачи для одной комбинированной математической модели теории упругости. // Математ. методы и физ.-мех. поля. 1990, вып.32, с.92-95. 5. Савула Я.Г., Дияк І.І., Паук Н.М. Гранично-скінченно-елементний аналіз комбінованих моделей двовимірної задачі теорії пружності. // Доповіді НАН України, 1995, №5. - с.49-52. 6. Савула Я.Г., Дияк І.І., Дубовик А.В. Применение комбинированной модели для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций. // Прикладная механика, т.25, №9, 1989, с.62-65. 7. Costabel M. Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements. // Boundary Elements IX, C.A.Brebbia. (Eds). Vol.1, Berlin, 1987, pp.411-420. 8. Costabel M. Boundary integral operators on lipschitz

domains: Elementary results.//SIAM J.Math.Anal.,Vol.19(6), 1988, pp.613-626. 9. Hsiao G.C., Schnack E., Wendland W.L. A Hybrid Coupled Finite-Boundary Elementt Method. - Preprint 95-11, Universitat Stuttgart. Math. Institut A. 1995.- 35p. 10. Holzer S.M. The symmetric Galerkin BEM for plane elasticity: scope and applications.// Proc. of the First European Conf. on Num. Meth. in Eng.1992, - pp.383-391. 11. Parreira P.,Guiggiani M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method. //Comput. and Struct., 1989,33,№ 1, pp.269-279. 12. Sirtori S., Maier G., Novati G., Miccoli S. A Galerkin symmetric boundary-element method in elasticity: formulation and implementation.// Int. J. Num. Meth. Eng.,1992, Vol.35, No.2, pp. 255-282. 13. Steinbach O.,Wendland W.L. Efficient Preconditioners for Boundary Element Methods and their Use in Domain Decomposition Methods.-Bericht Nr.95-19, 18p.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.96.

УДК 539.3:519.6

О.М. Томашевський

Моделювання теплофізичних процесів виготовлення литих зубних протезів

Як відомо, заливка металу в процесі отримання зубних протезів проводиться в попередньо підігріту форму[2]. Необхідність підігріву форми зумовлена тим, що характерні товщини отримуваних виробів дуже малі (0,2-0,3 мм), а їх конфігурації складні. У зв'язку з цим важливо досягнути швидкої і повної заповнюваності форми, а також забезпечити виконання умов, при яких кристалізація металу в кожній частині виробу відбувається в однакових умовах.

Для отримання зубних протезів використовуються спеціальні кювети, котрі мають форму металевого циліндра, заповненого вогнетривкою формувальною сумішшю. Для вибору раціонального режиму одержання відливу спочатку необхідно знати закономірності охолодження кювети. Тому визначення розподілу температури в ній у довільний момент часу є актуальною задачею.

Детальна інформація про розподіл температури в кюветі дає можливість:

- по-перше, при заданому розташуванні виробів, котрі відливатимуться у кюветі, визначити гранично допустимий проміжок часу, протягом якого кювета може знаходитися поза нагрівачим пристроєм за умови, що температура в місці заливки не буде нижчою гранично допустимого значення 750°C (температури, при якій відбувається швидка кристалізація відливки, що перешкоджає заповненню форми);
- по-друге, при заданій тривалості перебування форми поза нагрівачим пристроєм можна визначити місцезнаходження порожнини для заливки, що забезпечує отримання якісного виробу;
- по-третє, інформація про температурне поле дозволяє визначити область в кюветі, найбільш сприятливу з точки зору теплових режимів, і область у кюветі з мінімальною швидкістю охолодження.

При моделюванні процесу охолодження кювети враховується реальність розмірів, форма, фізичні властивості матеріалу оболонки і формувальної суміші. Вважається, що охолодження кювети на повітрі відбувається за рахунок теплообміну за законом Ньютона (при температурі підігріву $900 - 1000^{\circ}\text{C}$ променеві втрати досить незначні). При цьому коефіцієнт теплообміну вибирається однаковим як для поверхні оболонки, так і для поверхні формувальної суміші.

1. Постановка задачі. Нехай кювета займає область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, утворену шляхом обертання профілю W (рис.1) навколо осі Oz . W_1 — частина профілю, обертання якого утворює область, котру займає оболонка, а W_2 — формувальна суміш. Нехай $\Gamma = \partial W_2$ — твірна поверхні, через яку відбувається охолодження кювети.

Задача визначення температурного поля кювети в довільний момент часу в процесі її охолодження від початкової температури T_0 за рахунок конвективного теплообміну за законом Ньютона з довкіллям, температура якого T_c , з урахуванням осесиметричності геометричної конфігурації кювети та умов її охолодження зводиться до знаходження розв'язку початково-крайової задачі для рівняння теплопровідності:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad x \in W \quad (1)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_c), \quad x \in \Gamma \quad (2)$$

$$T(x, \tau_0) = T_0(x) \quad (3)$$

Згідно з методом Бубнова-Гальоркіна і з урахуванням формули Гріна, з (1)-(3) одержуємо слабку варіаційну форму вихідної задачі:

$$(c\rho \dot{T}, v) + a(T, v) + \langle \alpha T, v \rangle = \langle \alpha T_c, v \rangle \quad (4)$$

$$\forall v \in H_A, \tau \in (0, \tau^*]$$

$$(T, v)|_{\tau=0} = (T_0, v) \quad \forall v \in H_A \quad (5)$$

Тут позначено: $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial \tau}$, $(\cdot, \cdot)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярні добутки в

$L_2(\Omega)$ та $L_2(\Gamma)$, і прийнято, що $\frac{\partial T}{\partial \tau} \in L_2(0, \tau^*)$.

У такій постановці змінна τ може розглядатись як параметр. Апроксимація Гальоркіна узагальненого розв'язку задачі (4)-(5) будеться у вигляді [3]

$$T_h(x, \tau) = \sum_{i=1}^N Q^i(\tau) \varphi_i(x). \quad (6)$$

Використовуючи напівдискретні апроксимації Гальоркіна, розв'язання варіаційної задачі (4)-(5) зводимо до розв'язання нелінійної задачі Коші, яка в матричному вигляді запишеться наступним чином

$$M(Q) \dot{Q}(\tau) + G(Q) Q(\tau) = F(Q, \tau) \quad (7)$$

$$Q(0) = \mathbf{r} \quad (8)$$

Тут $Q(\tau) = (Q^1(\tau), \dots, Q^N(\tau))^T$ — вектор невідомих коефіцієнтів розкладу (6). Елементи матриць M та G та компоненти векторів F і $\mathbf{r}$ наведені у [1]. Представимо вектор невідомих коефіцієнтів розкладу (6) у вигляді

$$Q(\tau) = \sum_j \psi_j(\tau) q_j, \quad (9)$$

де q_j — вузлові значення Q в момент часу τ .

Відомі різні схеми лінеаризації для нелінійних початково-крайових задач параболічного типу [5]. Тут для знаходження значень q_j застосовується проста безітераційна схема:

$$M(q_i) \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta \tau} + G(q_i) q_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+\frac{1}{2}}(q_i), \quad (10)$$

$$q_0 = \mathbf{r}, \quad (11)$$

$$\text{де } F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_{i+1} + F_i).$$

Таким чином, для знаходження значень температури на кожному часовому кроці потрібно розв'язати систему рівнянь (10). Пакет програм для ПЕОМ типу IBM PC/AT, у якому реалізований описаний вище підхід, дає можливість ефективного дослідження практичних задач.

2. Результати чисельних експериментів. За даною методикою одержаний розв'язок задачі про охолодження кювети, нагрітої до температури $T_0 = 950^\circ\text{C}$, за рахунок конвективного обміну з оточуючим середовищем, температура якого $T_c = 20^\circ\text{C}$.

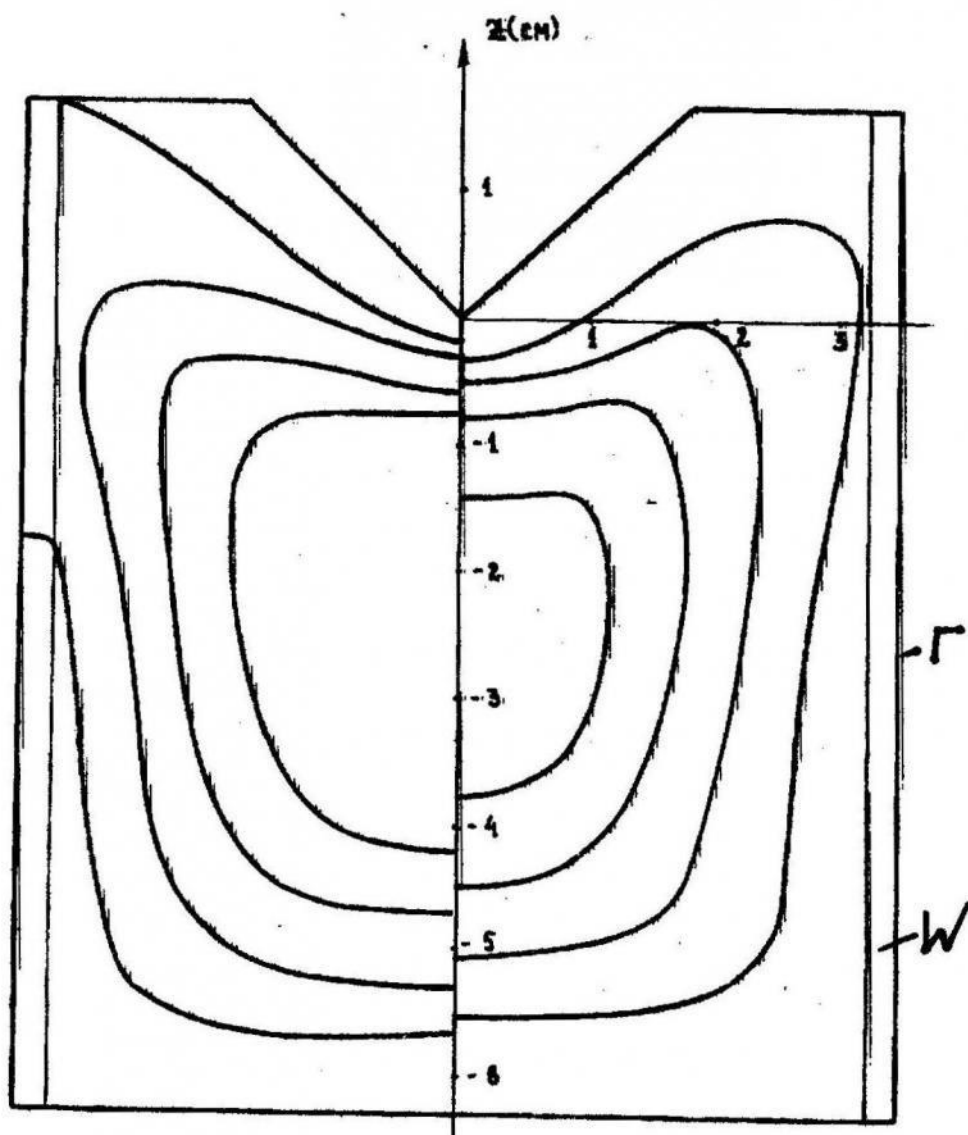


Рис. 1

При цьому вважалось, що коефіцієнт теплообміну був $162 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град}$ (у випадку руху кювети) та $72,1 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град}$ (у стані спокою); теплофізичні характеристики формувальної суміші вибиралися наступними: коефіцієнт теплопровідності — $0,326 \text{ Вт/м}\cdot\text{град}$, питома теплоємність — $0,795 \text{ кДж/кг}\cdot\text{град}$, густина — $1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, коефіцієнт теплопровідності і питома теплоємність матеріалу оболонки вважалися залежними від температури, причому $\lambda = 0,0175 \cdot t + 14$, а закон зміни питомої теплоємності матеріалу поданий на рис.2. Густина матеріалу оболонки — $8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ [4].

На рис.1 наведені ізотерми гранично допустимої температури 750°C в момент часу 2, 4, 6, 8 хв. У правій частині профілю — результати для коефіцієнта тепловіддачі $\alpha = 162 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град}$, у лівій — для $\alpha = 72,2 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{град}$.

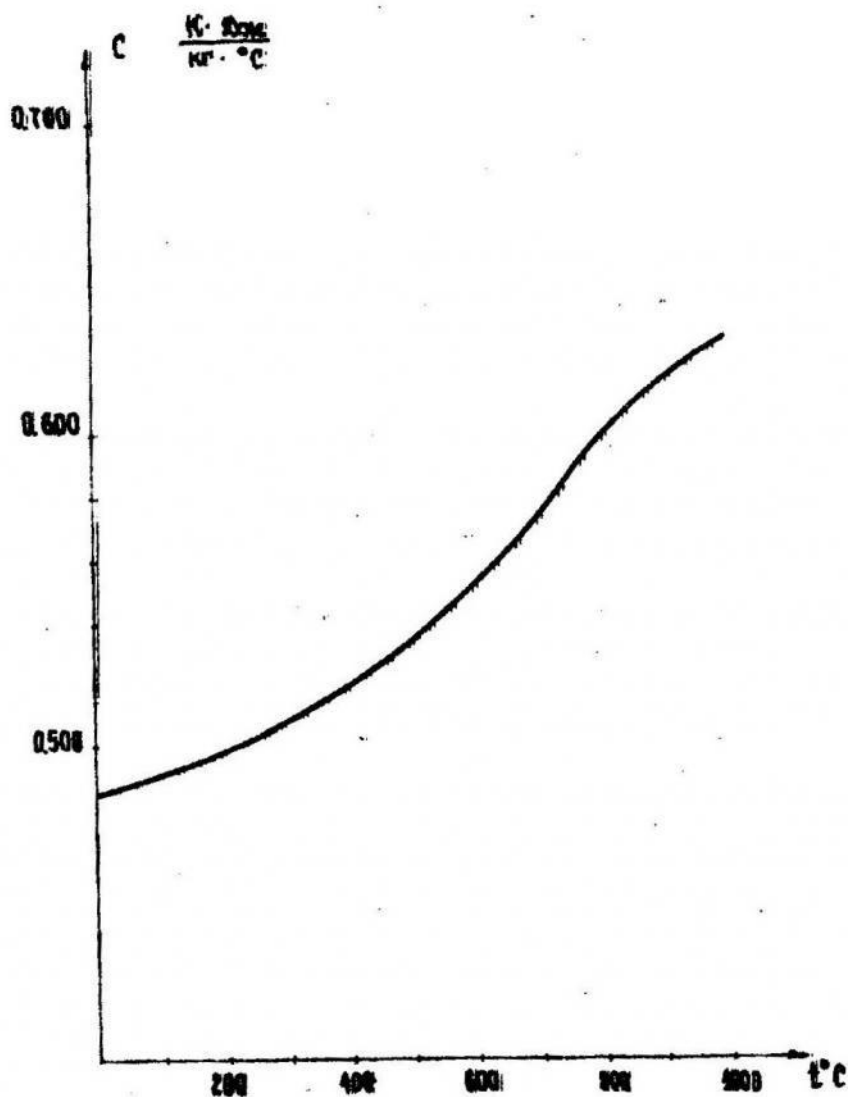


Рис. 2

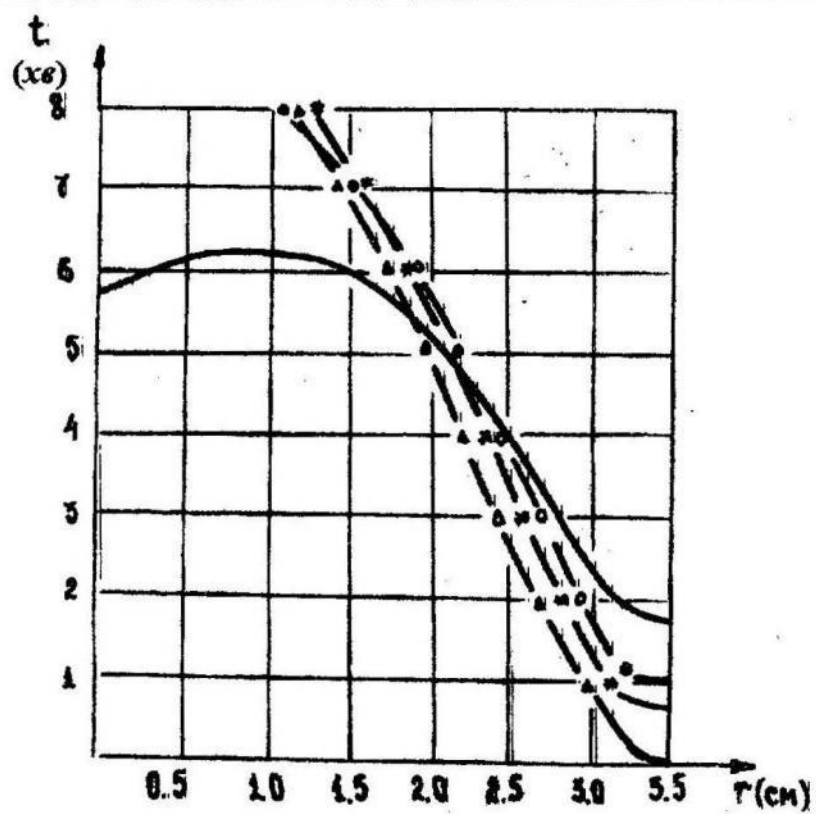


Рис. 3

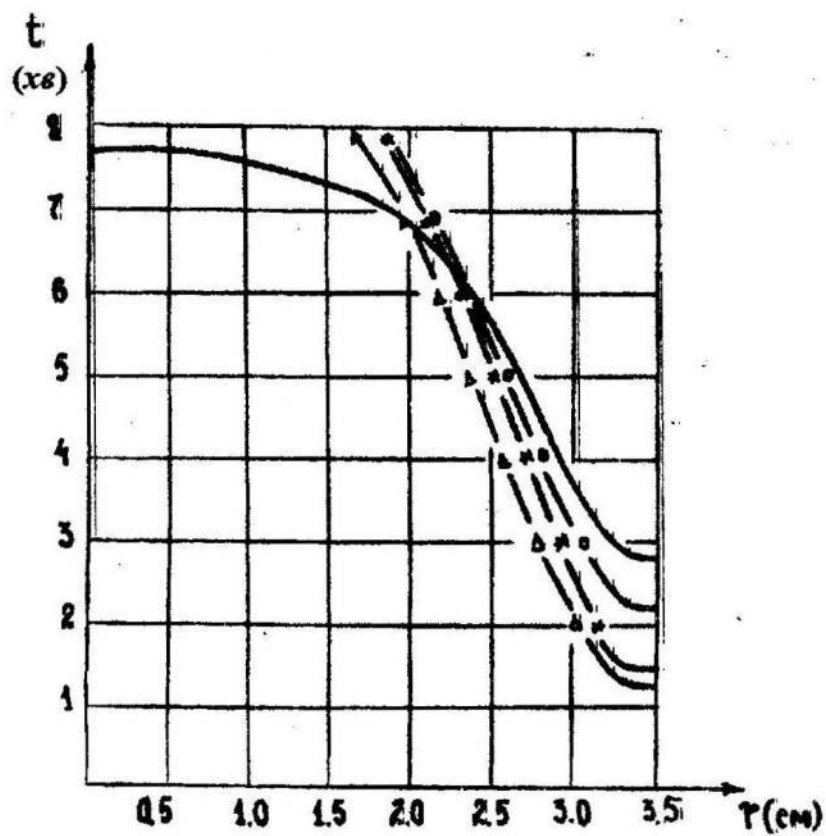


Рис. 4

На рис.3 і рис.4 наведені графіки, які ілюструють швидкість охолодження кювети в різних перетинах: $Z = -0,75$ см (суцільна лінія), $Z = -1,5$ см (лінія з кружечками), $Z = -2,25$ см (лінія з зірочками), $Z = -3$ см (лінія з трикутниками) для цих двох значень коефіцієнта тепловіддачі відповідно. Зокрема, при заданій тривалості перебування форми поза нагрівачим пристроєм можна визначити місцезнаходження порожнини для заливання, яке забезпечує отримання якісного виробу. Так, якщо геометричний профіль порожнини для заливання повторює профіль ізотерм температури, то її розташування у вертикальній площині буде забезпечувати однорідність теплових умов кристалізації. У цьому випадку розташування порожнини є виправданим з точки зору однорідності теплових умов. Однак такий збіг профілів виробу та ізотерм, які отримуються, у більшості випадків буде проблематичним. Тому більш зручним є розташування порожнини в горизонтальній площині. Тут однорідність теплових умов буде гарантована осесиметричністю температурного поля і симетричністю виробу, який відливається. При цьому для різних часових інтервалів перебування кювети поза нагрівачим пристроєм оптимальними з точки зору теплових умов можуть бути різні положення порожнини для заливки. Наприклад, якщо цей час перевищує 4,5 хв. (для рухомої кювети), оптимальним є розташування порожнини в горизонтальній площині $Z = -0,75$ см (див. рис.1). З проведених досліджень при тривалості охолодження від 4,5 хв. до 6,3 хв. оптимальною є площина $Z = -1,5$ см, а для інтервалу від 6,3 хв. до 8 хв. — $Z = -2,25$ см. Далі, якщо відомо, що максимально віддалена від осі обертання Z точка виробу, який відливається, має координату $r = 2,5$ см, то із наведених на рис.3 і рис.4 графіків можна визначити тривалість перебування кювети поза нагрівачим пристроєм. Так, для $a = 162,2$ Вт/м²·град (рис. 3) час складає 2,7 хв. (для площини $Z = -3$ см), 3,3 хв. (для $Z = -2,25$ см), 3,75 хв. (для $Z = -1,5$ см) і 3,95 хв. (для $Z = -0,75$ см).

Таким чином, проведений аналіз охолодження форми опоки з врахуванням її фізичних властивостей у залежності від температури та геометрії. На основі проведених числових досліджень стає можливим прогнозування тривалості технологічних операцій, які підвищують якість литих зубних протезів.

1. Дьяк И.И. Реализация высокоточных схем метода конечных элементов для задач нестационарной теплопроводности. // Вестник Львов. ун-та. Сер. мех.-мат, 1982, Вып.19, с.44-51.
2. Литье по выплавляемым моделям (под ред. Я.И. Шленника и В.А.Озерова). - М.: Машиностроение, 1984. - 408с.
3. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод конечных элементов. - Львов: Вища школа, 1976. - 80 с.
4. Справочник физических величин (под ред. И.К.Кикоина) - М.:Атомэнергоиздат, 1966, - 1001с.
5. Douglas G., Dupont Gr., Ewing R.S. Incomplete iteration for time stepping a Galerkin method for a quasilinear parabolic problem. - SIAM J. Num.Anal., 1979, vol.16, No.3, pp.503-522.

Стаття надійшла до редколегії 06.03.96.

До 75-річчя Наума Петровича Флейшмана

28 листопада 1996 року виповнилося 75 років від дня народження професора Н.П.Флейшмана, з іменем якого пов'язані видатні досягнення в теорії концентрації напружень навколо отворів з підкріпленням краєм, теорії оболонок, математичному моделюванні задач теплоперенесення, а також у підготовці наукових кадрів у Львівському державному університеті ім.І.Франка.

Педагог за покликанням, Н.П.Флейшман у 1946 р. став студентом IV курсу фізико-математичного факультету Львівського державного університету, маючи диплом з відзнакою Кишинівського державного педагогічного інституту.

З 1951 по 1996 рік він працював у ЛДУ на різних посадах: доцентом кафедри теорії пружності, завідувачем кафедри загальної механіки та гідромеханіки, завідувачем кафедри, професором кафедри прикладної математики. Стиль професора Н.П.Флейшмана як педагога вирізняється особливою акуратністю і чіткістю, умінням згуртувати навколо себе здібну молодь.

Н.П.Флейшман є автором більш ніж 200 наукових праць, зокрема двох монографій. Він підготував 3 докторів та 30 кандидатів наук.

Упродовж багатьох років проф. Н.П.Флейшман керував важливими госпдоговірними науковими темами, створив науково-дослідну лабораторію при кафедрі прикладної математики.

Загальновідома активна діяльність Н.П.Флейшмана у спеціалізованих радах із захисту кандидатських і докторських дисертацій.

Колектив факультету прикладної математики та інформатики ЛДУ щиро вітає ювіляра і бажає міцного здоров'я, щасливого довголіття, радості.

Роздуми про вченого-педагога ІВАНА ДМИТРОВИЧА КВІТА

з нагоди 75 річниці з дня його народження

Мабуть ніхто з його ровесників, що народились у Західній Україні, не входив в науку так стрімко і так впевнено.

Син незаможного селянина із с. Поморян Золочівського району, нащадок древнього козацького роду, Іван Квіт, після закінчення 7 класів школи в Поморянах та 3-ї середньої школи м. Львова влітку 1940 р. став студентом фізико-математичного факультету Львівського державного університету ім. Івана Франка. Війна перервала навчання, але не змінила твердих намірів юнака, і з 1945 по 1949 рік Іван Дмитрович продовжив навчання на фізико-математичному факультеті. Одразу ж після закінчення університету він вступив до аспірантури на кафедрі теорії ймовірностей. Трирічний термін навчання в аспірантурі завершився в 1952 р. успішним захистом кандидатської дисертації і здобуттям вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук.

З вересня 1952 р. Іван Дмитрович Квіт — старший викладач кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей, а з 1953 р. і до останніх років життя — доцент Львівського державного університету ім. Ів. Франка (кафедр теорії функцій і теорії ймовірностей, вищої математики, теорії оптимальних процесів).

Учень академіка Б.В.Гнеденка, Іван Дмитрович Квіт розвивав нові напрямки в теорії ймовірностей, математичній статистиці та теорії надійності. Він опублікував понад 60 наукових праць, із них 13 навчальних посібників, які ще довго будуть неперевершеними зразками методичних розробок.

Про цю чудову і чесну людину, талановитого педагога, можна розповісти багато. Математик за фахом, він водночас мав глибокі знання з філософії, літератури, історії. Вільно володіючи 8 мовами (українською, російською, польською, англійською, німецькою, французькою, грецькою та латинню), І.Д.Квіт мав прямий доступ до всіх наукових надбань людства. Глибока ерудиція, багаті знання і досвід робили його лекції цікавими, колоритними, незабутніми.

Упродовж 40 років студенти фізико-математичного, механіко-математичного факультету і факультету прикладної математики слухали лекції доцента Квіта І.Д. з курсів “Рівняння математичної фізики”, “Теорія ймовірностей і математична статистика”, “Дослідження опе-

рацій”, “Теорія надійності”, які вирізнялися унікальністю, глибиною та доступністю викладу.

Багато років Іван Дмитрович був Ученим секретарем Ради механіко-математичного факультету, заступником декана, членом методичної ради. Він керував важливими науково-дослідними темами, брав участь у розробці Держстандарту з питань надійності будівельних машин.

14 грудня 1990 року перестало битися серце Івана Дмитровича Квіта.

Відтоді й понині це не може сприйняти наша свідомість. Ще впродовж двох років виходили з друку подані ним за життя наукові статті та методичні розробки, підсилюючи ілюзію тимчасової відсутності Івана Дмитровича.

Світла пам'ять про цю чудову Людину назавжди збережеться в наших серцях.

Йому сьогодні було б лише 75!

Зміст

<i>Я.Г. Савула, В.В. Кревс. Про застосування методу декомпозиції області до задачі теплопровідності для тіла з тонким покриттям.....</i>	<i>3</i>
<i>Дяконюк Л. М., Савула Я. Г. Дослідження задачі тепломасоперенесення через тривимірне тіло з тонким плоским покриттям.....</i>	<i>10</i>
<i>Н.П.Флейшман, Ч.Н.Койфман. Математичне моделювання гнучких з'єднувальних елементів</i>	<i>19</i>
<i>Н.П.Флейшман, Н.В.Іванова. Використання методу довільних кривих у дослідженні задач статички теорії пластин</i>	<i>23</i>
<i>Г.А.Шинкаренко. Однокрокові рекурентні схеми інтегрування варіаційних задач для гіперболічних рівнянь</i>	<i>27</i>
<i>Г.А. Шинкаренко, О.Г. Шинкаренко. Чисельне дослідження варіаційних задач міграції пасивних домішок</i>	<i>37</i>
<i>Р.І. Кісіль, І.С. Муха. Двовимірні схеми методу скінченних елементів для дослідження пружнопластичного деформування тонкостінних гнучких тіл</i>	<i>45</i>
<i>І.І.Дияк, В.М.Макар. Дослідження просторової динамічної задачі теорії пружності для неоднорідних анізотропних тіл.....</i>	<i>50</i>
<i>Н.П.Головач, І.І.Дияк. Прямий метод граничних елементів чисельного розв'язування задачі термопружності.....</i>	<i>57</i>
<i>Я.С.Гарасим, Б.А.Остудін. До питання розв'язності інтегрального рівняння осесиметричної задачі електростатики.....</i>	<i>62</i>
<i>Л.Л.Роман. Чисельне розв'язування задач пружності для круглих пластин</i>	<i>70</i>
<i>Р.Т.Мисак. Стаціонарне рівняння Ріккати для визначення оптимального оператора-регуляризатора.....</i>	<i>72</i>
<i>Б.М.Голуб. Функції наповнення у глобальній оптимізації</i>	<i>76</i>
<i>О.В.Демидович, Г.Г.Цегелик. Узагальнена задача про призначення та методи її розв'язування</i>	<i>82</i>
<i>М.Ю.Щербина. Реалізація Outline з використанням Microsoft Visual C++ 1.51 і бібліотеки класів Microsoft Foundation Class.....</i>	<i>86</i>
<i>І.М.Содома. Бухгалтерська звітність: проблеми достовірності інформації при сплаті податків юридичними особами.....</i>	<i>91</i>

<i>О.Р. Гачкевич, О.М. Дзюбачик, М.Т. Солодяк. Визначення гістерезисного тепла у феритах при індукційному нагріванні</i>	<i>96</i>
<i>І.І.Дияк. Симетрична скінченно-гранично-елементна апроксимація D-адаптивної моделі теорії пружності</i>	<i>102</i>
<i>О.М. Томашевський. Моделювання теплофізичних процесів виготовлення литих зубних протезів.....</i>	<i>107</i>
До 75-річчя Наума Петровича Флейшмана.....	114
Роздуми про вченого-педагога Івана Дмитровича Квіта	115

Збірник наукових праць

**Міністерство освіти України
Львівський державний університет
імені Івана Франка**

**Вісник
Львівського університету**

Серія механіко-математична

**Виходить з 1965 р.
Випуск 44**

**ЗАДАЧІ
ТА МЕТОДИ
ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ**

**Редактор Е.А.Главацька
Художній редактор Е.А.Каменщик
Технічний редактор С.Д.Довба
Комп'ютерна верстка О.М.Левченко**

Підписано до друку 18.12.96. Папір офсетний. Вид. № 18. Замовне

**Державне спеціалізоване видавництво «Світ»
при Львівському університеті
290000 Львів, вул. Дорошенка, 41**

**Надруковано видавничим центром
Львівського державного університету ім. І.Франка
290602 Львів, вул. Університетська, 1**

ISSN 0201-758X. ISSN 0320-6572.
Вісн. Львів, ун-ту. Сер. мех. мат., 1996, вип. 44. 1 —118.