УДК 517.95

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Г. М. Онишкевич

G. M. Onyshkevych. Stability by Liapunov of the equation of type of plate vibration with gaped coefficients. The mixed problem for the equation of type of plate oscillation with gaped coefficients which degenerate on the part of boundary is considered. The conditions of existence and singularity of the generalized solution of the problem and conditions of stability by Liapunov of the zero solution are obtained.

Ми досліджували умови існування, єдиності та стійкості розв'язку рівняння типу коливання пластинки з гострим краєм, коефіцієнти якого зазнають розриву. У праці [1] за допомогою функції Гріна вивчали умови коректності граничних задач для гіперболічних рівнянь, які вироджуються. Умови стійкості поперечних коливань стержня з гострим краєм досліджені в [2] . Використовуючи метод Гальоркіна і схему, запропоновану в [3], ми визначили умови існування та єдиності узагальненого розв'язку. Головним результатом роботи є доведення теореми про стійкість за Ляпуновим та експоненціальну стійкість нульового розв'язку вказаного рівняння.

Розглянемо в області $Q = \{(x_1, x_2, t) : (x_1, x_2) \in \Omega, 0 < t < \infty\}$, де Ω є сумою областей $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < b_0\}$, $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, b_0 < x_2 < b\}$ і контуру $\Gamma = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, \ x_2 = b_0\}$, рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} \left(a_{ij}^{kl(m)}(x,t)u_{x_k x_l}\right)_{x_i x_j} - \\ - \sum_{i,j=1}^{2} \left(b_{ij}^{(m)}(x,t)u_{x_j}\right)_{x_i} + c^{(m)}(x,t)u_t + h^{(m)}(x,t)u = f^{(m)}(x,t), \tag{1.m}$$

де $x = (x_1, x_2) \in \Omega_m$, $m = 1, 2$ з початковими умовами

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35B35; Secondary 35R05.

Надалі вважатимемо, що виконуються умови

$$\begin{gathered}
a_{ij}^{kl(m)} = a_{kl}^{ij(m)}, \quad b_{ij}^{(m)} = b_{ji}^{(m)}, \quad i,j,k,l = 1,2; \\
a_1^1 x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}^2 \leqslant \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(1)} \eta_{ij}\eta_{kl} \leqslant a_2 x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}^2, \quad \alpha > 0, \\
a_1^2 \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}^2 \leqslant \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(2)} \eta_{ij}\eta_{kl}, \quad a_1^m > 0
\end{gathered} \tag{4}$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $(x,t) \in Q^{(m)}$, де $Q^{(m)} = \Omega_m \times (0;+\infty)$.

Для шуканої функції u задано граничні умови, які залежать від величини α:

$$\begin{gathered}
\begin{cases} u(0,x_2,t) = u(a,x_2,t) = u(x_1,0,t) = u(x_1,b,t) = 0, \\ u_{x_1}(0,x_2,t) = u_{x_1}(a,x_2,t) = u_{x_2}(x_1,0,t) = u_{x_2}(x_1,b,t) = 0, \end{cases} \quad 0 < \alpha \leqslant 1; \\
\begin{cases} u(0,x_2,t) = u(a,x_2,t) = u(x_1,0,t) = u(x_1,b,t) = 0, \\ u_{x_1}(0,x_2,t) = u_{x_1}(a,x_2,t) = u_{x_2}(x_1,b,t) = 0, \end{cases} \quad 1 < \alpha \leqslant 3; \\
\begin{cases} u(0,x_2,t) = u(a,x_2,t) = u(x_1,b,t) = 0, \\ u_{x_1}(0,x_2,t) = u_{x_1}(a,x_2,t) = u_{x_2}(x_1,b,t) = 0, \end{cases} \quad \alpha > 3;
\end{gathered} \tag{5}$$

а також умови спряження

$$\begin{gathered}
[u]_\Gamma = 0, \quad [u_{x_2}]_\Gamma = 0, \sum_{j,k,l=1}^{2} \left(a_{2j}^{kl(1)} u_{x_k x_l} A_1 - a_{2j}^{kl(2)} u_{x_k x_l} A_2 \right)\Big|_\Gamma = 0, \\
\sum_{i,k,l=1}^{2} \left((a_{i2}^{kl(1)} u_{x_k x_l})_{x_i} A_1 - (a_{i2}^{kl(2)} u_{x_k x_l})_{x_i} A_2 \right)\Big|_\Gamma - \sum_{j=1}^{2} \left(b_{2j}^{(1)} u_{x_j} A_1 - b_{2j}^{(2)} u_{x_j} A_2 \right)\Big|_\Gamma = 0,
\end{gathered} \tag{6}$$

де $t \in S = [0;+\infty)$, а через $[f]_\Gamma$ ми позначили стрибок функції f під час переходу через Γ, $A_m = A_m(t)$, $m = 1,2$.

Уведемо простір $\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$ як замикання множини двічі неперервно диференційовних функцій, які задовольняють умови (5) для $0 < \alpha < 2$, за нормою

$$\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)} = \left(\int_{\Omega_1} \left(v_t^2 + x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 \right) dx + \int_{\Omega_2} \left(v_t^2 + \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

а також аналогічний простір $\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)$, функції якого задовольняють умови (5) для $\alpha \geqslant 2$, за нормою

$$\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega_1} \left(v_t^2 + x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 + x_2^\beta \sum_{i=1}^{2} v_{x_i} + x_2^\gamma v^2 \right) dx + \int_{\Omega_2} \left(v_t^2 + \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\beta > \alpha - 1,\ \gamma > \beta - 1$.

Наша мета — дослідити стійкість узагальненого розв'язку задачі (1.1),(1.2)–(6) для якого справедливі такі включення:

$$u \in L^\infty_{\rm loc}(S; \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)),\ 0 < \alpha < 2, \quad u \in L^\infty_{\rm loc}(S; \overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)),\ \alpha \geqslant 2,$$
$$u_t \in L^\infty_{\rm loc}(S; L^2(\Omega)),\ \alpha > 0. \tag{7}$$

Означення 1. *Функція $u(x,t)$, яка задовольняє включення (7), умови (2) і (5), а також інтегральну тотожність*

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{Q^{(m)}} \Big[-u_t v_t A_m - u_t v A_{mt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} A_m + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j} v_{x_i} A_m +$$
$$+ c^{(m)} u_t v A_m + h^{(m)} u v A_m - f^{(m)} v A_m \Big] \, dx \, dt = \sum_{m=1}^{2} \int\limits_{D_0^{(m)}} A_m \psi v \, dx \tag{8}$$

для довільної $v \in M_\alpha$ з обмеженим носієм, де $D_\tau^{(m)} = Q^{(m)} \cap \{t = \tau\},\ \tau \geqslant 0,\ m = 1,2$

$$M_\alpha = \{ v \,:\, v \in L^2(S; \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)),\ 0 < \alpha < 2,\ v \in L^2(S; \overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)),\ \alpha \geqslant 2,$$
$$v_t \in L^2(S; L^2(\Omega)),\ \alpha > 0\},$$

називається узагальненим розв'язком задачі (1.1),(1.2)–(6).

Спочатку з'ясуємо умови існування та єдиності цього розв'язку. Будемо припускати, що виконується умова

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijt}^{kl(1)} \eta_{ij} \eta_{kl} \leqslant a_3 x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}^2 \tag{9}$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $(x,t) \in Q^1$, де a_3 — додатна стала.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (4), (9) для $0 < \alpha < 2$ і, крім цього,*

$$a_{ij}^{kl(m)},\ b_{ij}^{(m)},\ c^{(m)},\ h^{(m)} \in L^\infty(Q^{(m)}),\ i,j,k,l = 1,2,$$
$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} \xi_i \xi_j \geqslant b_0^m \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \ \text{для всіх}\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ b_0^m + \frac{a_1^m \gamma_1}{\varkappa_1^m} \geqslant \delta_0,\ h^{(m)}(x,t) + \frac{a_1^m \gamma_2}{\varkappa_0^m} \geqslant \delta_0,$$
$$c^{(m)}(x,t) \geqslant c_0 \geqslant 0,\ 0 < A_{0m} \leqslant A_m(t) \leqslant A_{1m},\ A_{mt} \in C(S),\ (x,t) \in Q^{(m)},\ m = 1,2,$$

де $\delta_0, \gamma_1, \gamma_2$ — деякі додатні сталі, причому $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$,

$$\varkappa_0^1 = \frac{(5-\alpha) b^{4-\alpha}}{(2-\alpha)(4-\alpha)}, \qquad \varkappa_1^1 = \frac{2 b^{2-\alpha}}{2-\alpha},$$

($\varkappa_0^2, \varkappa_1^2$ – взяті з нерівності Фрідріхса ([4],ст.44)); $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega)$, $f^{(m)} \in L^2_{\text{loc}}([0;+\infty); L^2(\Omega_m))$, $m = 1, 2$.

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1.1),(1.2)-(6).

Доведення. Розглянемо в області $Q_T^{(m)} = \Omega_m \times (0;T)$ рівняння (1.m), $m = 1, 2$, де T — довільне додатне число. Наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u^N(x,t) = \sum_{p=1}^{N} C_p^N(t)\,\omega_p(x), \tag{10}$$

де $\{\omega_p(x)\}$ — базис простору $\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$, а $C_p^N(t)$ визначаємо з такої задачі:

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{\Omega_m} \Bigg(u_{tt}^N \omega_p A_m + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l}^N \omega_{p x_i x_j} A_m + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j}^N \omega_{p x_i} A_m +$$

$$+ c^{(m)} u_t^N \omega_p A_m + h^{(m)} u^N \omega_p A_m - f^{(m)} \omega_p A_m \Bigg) dx = 0, \tag{11}$$

$$C_p^N(0) = \varphi_p^N, \quad C_{pt}^N(0) = \psi_p^N, \quad p = 1, ..., N. \tag{12}$$

В умовах (12) сталі φ_p^N, ψ_p^N є коефіцієнтами таких зображень:

$$\varphi^N(x) = \sum_{p=1}^{N} \varphi_p^N \omega_p(x), \quad \psi^N(x) = \sum_{p=1}^{N} \psi_p^N \omega_p(x),$$

причому $\varphi^N(x) \to \varphi(x)$ в $\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$, а $\psi^N(x) \to \psi(x)$ в $L^2(\Omega)$ при $N \to \infty$.

Домножимо кожне рівняння системи (11) на відповідну функцію $C_{pt}^N(t)$, підсумуємо по p від 1 до N, проінтегруємо по t від 0 до T. Після цих операцій отримаємо рівність

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{Q_T^{(m)}} \Bigg(u_{tt}^N u_t^N A_m + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l}^N u_{x_i x_j t}^N A_m + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j}^N u_{x_i t}^N A_m +$$

$$+ c^{(m)} (u_t^N)^2 A_m + h^{(m)} u^N u_t^N A_m - f^{(m)} u_t^N A_m \Bigg) dx\,dt = 0 \tag{13}$$

Використовуючи інтегрування частинами та умови теореми, можна одержати оцінку

$$B_1 \Bigg(\int\limits_{D_T^{(1)}} \Bigg((u_t^N)^2 + x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} (u_{x_i x_j}^N)^2 \Bigg) dx + \int\limits_{D_T^{(2)}} \Bigg((u_t^N)^2 + \sum_{i,j=1}^{2} (u_{x_i x_j}^N)^2 \Bigg) dx \Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant B_2 \Bigg(\int\limits_{D_0^{(1)}} \Bigg((\psi^N)^2 + x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} (\varphi_{x_i x_j}^N)^2 \Bigg) dx + \int\limits_{D_0^{(2)}} \Bigg((\psi^N)^2 + \sum_{i,j=1}^{2} (\varphi_{x_i x_j}^N)^2 \Bigg) dx +$$

$$+\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q_T^{(m)}}(f^{(m)})^2dx\,dt\Big)+B_3\int_0^T\Bigg(\int\limits_{D_t^{(1)}}\Big((u_t^N)^2+x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2}(u_{x_ix_j}^N)^2\Big)dx+$$
$$+\int\limits_{D_t^{(2)}}\Big((u_t^N)^2+\sum_{i,j=1}^{2}(u_{x_ix_j}^N)^2\Big)dx\Bigg)dt. \quad (14)$$

Тут

$$B_1=\min_{m=1,2}\min\{A_{0m};A_{0m}a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2)\},$$
$$B_2=\max_{m=1,2}\max\{A_{1m};A_{1m}(a_2+b_2\varkappa_1^m+h_2\varkappa_0^m)\},$$
$$B_3=\max_{m=1,2}\max\{A_{1m}+A_{2m};A_{2m}(a_2+b_2\varkappa_1^m+h_2\varkappa_0^m)+A_{1m}(a_3+b_3\varkappa_1^m+h_3\varkappa_0^m)\},$$

а додатні сталі a_2, a_3, b_2, b_3, h_2, h_3, A_{2m} такі, що задовольняють умови:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(2)}(x,t)\eta_{ij}\eta_{kl}\leqslant a_2\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij}^2,$$
$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ijt}^{kl(2)}(x,t)\eta_{ij}\eta_{kl}\leqslant a_3\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij}^2,\quad (x,t)\in Q^{(2)};$$
$$\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant b_2\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,\quad \sum_{i,j=1}^{2}b_{ijt}^{(m)}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant b_3\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,$$
$$h^{(m)}(x,t)\leqslant h_2,\quad h_t^{(m)}\leqslant h_3,\quad A_{mt}\leqslant A_{2m},\quad m=1,2$$

для всіх $\eta\in\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Застосовуючи до (14) лему Гронуолла–Беллмана, отримаємо

$$\|u^N\|_{L^\infty((0;T);\mathring{H}_\alpha^2(\Omega))}\leqslant C_2,\quad \|u_t^N\|_{L^\infty((0;T);L^2(\Omega))}\leqslant C_2, \quad (15)$$

де C_2 - додатна стала, яка не залежить від N.

Нехай $S_T=(0;T)$. Згідно з оцінками (15) можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{N,N}(x,t)\}$, що для фіксованого k:

$$u^{N,N}\to v^k\quad *-\text{слабко в } L^\infty(S_k;\mathring{H}_\alpha^2(\Omega)),$$
$$u_t^{N,N}\to v_t^k\quad *-\text{слабко в } L^\infty(S_k;L^2(\Omega))\ \text{ при } N\to\infty.$$

Позначимо через $u(x,t)$ функцію, яка для кожного k в Q_k збігається з $v^k(x,t)$. Очевидно, що $u(x,t)$ задовольняє включення (7).

Далі за схемою, запропонованою в [5], легко показати, що $u(x,t)$ буде узагальненим розв'язком задачі (1.1),(1.2)–(6). Отже, теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (4), (9) для* $0 < \alpha < 2$ *і, крім того,*

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)}\xi_i\xi_j \geqslant b_0^m \sum_{i=1}^{2}\xi_i^2 \quad \textit{для всіх} \;\; \xi \in \mathbb{R}^n, \quad b_0^m + \frac{a_1^m(1-\gamma_0)}{\varkappa_1^m} \geqslant \delta_0,$$

$$0 < A_{0m} \leqslant A_m(t) \leqslant A_{1m}, \quad A_{mtt} \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(S), \quad c^{(m)} \geqslant c_0 \geqslant 0, \; (x,t) \in Q^{(m)},$$

де $m = 1, 2$, δ_0, γ_0 *— додатні сталі, причому* $\gamma_0 < 1$.

Тоді задача (1.1),(1.2)–(6) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Доведення. Покажемо, що відповідна однорідна задача з нульовими початковими умовами (2), (3) має лише нульовий розв'язок. Візьмемо

$$v = \begin{cases} \int\limits_t^{\tau} u\, d\theta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t < \infty. \end{cases} \tag{16}$$

Очевидно, що $v \in H^1_{\mathrm{loc}}(S; \overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha}(\Omega))$. Тому виконується рівність

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{Q_{\tau}^{(m)}} \Big(-u_t v_t A_m - u_t v A_{mt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} A_m +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j} v_{x_i} A_m + h^{(m)} u v A_m + c^{(m)} u_t v A_m \Big)\, dx\, dt = 0.$$

Використовуючи інтегрування частинами, отримаємо

$$\sum_{m=1}^{2} \Big(\int\limits_{D_{\tau}^{(m)}} A_m u^2 dx + \int\limits_{D_0^{(m)}} \Big(\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} z_{x_k x_l}(x,\tau) z_{x_i x_j}(x,\tau) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} z_{x_j}(x,\tau) z_{x_i}(x,\tau) \Big) A_m dx \Big) =$$
$$= \sum_{m=1}^{2} \Big(-\int\limits_{Q_{\tau}^{(m)}} \Big(\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijt}^{kl(m)} A_m (z_{x_k x_l}(x,\tau) - z_{x_k x_l}(x,t))(z_{x_i x_j}(x,\tau) - z_{x_i x_j}(x,t)) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ijt}^{(m)} A_m (z_{x_i}(x,\tau) - z_{x_i}(x,t))(z_{x_j}(x,\tau) - z_{x_j}(x,t)) +$$
$$+ \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} A_{mt} (z_{x_k x_l}(x,\tau) - z_{x_k x_l}(x,t))(z_{x_i x_j}(x,\tau) - z_{x_i x_j}(x,t)) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} A_{mt} (z_{x_i}(x,\tau) - z_{x_i}(x,t))(z_{x_j}(x,\tau) - z_{x_j}(x,t)) \Big) dx\, dt - \tag{17}$$

$$-2\int\limits_{Q_\tau^{(m)}}(c^{(m)}A_m - A_{mt})u^2 dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{(m)}}(c_t^{(m)}A_m + c^{(m)}A_{mt} - A_{mtt} - h^{(m)})u(z(x,\tau) - z(x,t))dx\,dt\Big),$$

де $z(x,t) = \int_0^t u(x,\theta)\,d\theta$.

Сталі δ_0 і τ виберемо з таких умов:

$$\frac{a_1^m(1-\gamma_0)}{\varkappa_1^m} + b_0 - 2\tau(b_3A_{1m} + b_2A_{2m}) \geqslant \frac{\delta_0}{2}, \quad \frac{a_1^m\gamma_0}{2\varkappa_0^m} - 4\tau \geqslant \frac{a_1^m\gamma_0}{4\varkappa_0^m},$$
$$\frac{a_1^m\gamma_0}{2} - 2\tau(a_3A_{1m} + a_2A_{2m}) \geqslant \frac{a_1^m\gamma_0}{4}, \quad m = 1,2.$$

Тоді рівність (17) перепишемо у вигляді

$$\sum_{m=1}^{2} A_{1m}\int\limits_{D_\tau^{(m)}}\Big(u^2 + \frac{a_1^m\gamma_0}{2}x_2^{\alpha\delta}\sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}\Big)dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q_\tau^{(m)}}\Big(u^2(h_2^2 + 2A_{2m} + 3(c_1A_{2m})^2 + 3(c_2A_{1m})^2 + 3(A_{3m})^2)+ \tag{18}$$

$$+2x_2^{\alpha\delta}\sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}((a_2A_{2m} + a_3A_{1m}) + (b_2A_{2m} + b_3A_{1m})\varkappa_0^m + (h_2A_{2m} + h_3A_{1m}))\Big)dxdt,$$

де $\delta,\ c_1,\ c_2,\ A_{3m}$ такі додатні сталі, що задовольняють умови

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m = 1, \\ 0, & \text{якщо } m = 2, \end{cases}$$
$$c^{(m)} \leqslant c_1, \quad c_t^{(m)} \leqslant c_2, \quad A_{mtt} \leqslant A_{3m}, \quad m = 1,2.$$

Позначимо $B_4 = \min\limits_{m=1,2}\min\{A_{1m};\ A_{1m}a_1^m\gamma_0/2\}$, $B_5 = \max\limits_{m=1,2}\max\{h_2^2+2A_{2m}+3(c_1A_{2m})^2+3(c_2A_{1m})^2+3(A_{3m})^2;\ 2(a_2A_{2m}+a_3A_{1m}+(b_2A_{2m}+b_3A_{1m})\varkappa_1^m+(h_2A_{2m}+h_3A_{1m})\varkappa_0^m+)\}$. Тому з нерівності (18) одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_\tau^{(1)}}\Big(u^2 + x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}^2\Big)\,dx + \int\limits_{D_\tau^{(2)}}\Big(u^2 + \sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}^2\Big)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B_5}{B_4}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{D_\tau^{(1)}}\Big(u^2 + x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}^2\Big)\,dx + \int\limits_{D_\tau^{(2)}}\Big(u^2 + \sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}^2\Big)\,dx\Big)\,dt.$$

Застосовуючи до цієї нерівності лему ([6], с.152), отримаємо, що

$$\int_0^T \left(\int_{D_t^{(1)}} \left(u^2 + x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} z^2_{x_i x_j} \right) dx + \int_{D_t^{(2)}} \left(u^2 + \sum_{i,j=1}^{2} z^2_{x_i x_j} \right) dx \right) dt \leqslant 0$$

для довільного додатного T. Тобто $u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in Q_T$. Отже, теорему 2 доведено.

Досліджуючи стійкість, будемо вважати, що $f^{(m)} \equiv 0$, в $Q^{(m)}$, $m = 1, 2$. Отже, йтиметься про стійкість нульового розв'язку. Введемо позначення

$$\rho\,(u(x,t)) = \left(\int_{\Omega_1} \left(u_t^2 + x_2^\alpha \sum_{m=1}^{2} u^2_{x_i x_j} \right) dx + \int_{\Omega_2} \left(u_t^2 + \sum_{m=1}^{2} u^2_{x_i x_j} \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Означення 2. *Нульовий розв'язок задачі (1.1),(1.2)–(6) називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\epsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що як тільки виконується умова $\rho\,(u(x,0)) < \delta$, тоді $\rho\,(u(x,t)) < \epsilon$ для майже всіх $t \in S$. Якщо ж, крім того,*

$$\lim_{t \to +\infty, t \in J} \rho\,(u(x,t)) = 0,$$

де J — множина невиключних значень t функції $t \mapsto \rho\,(u(x,t))$, тоді нульовий розв'язок будемо називати асимптотично стійким.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови існування та єдиності розв'язку задачі (1.1),(1.2)–(6) для $f^{(m)} \equiv 0$ в $Q^{(m)}$ і $0 < \alpha < 2$, і крім того,*

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijt}^{kl(m)} \eta_{ij} \eta_{kl} \leqslant 0, \quad \sum_{i,j=1}^{2} b_{ijt}^{(m)} \xi_i \xi_j \leqslant 0 \quad \text{для всіх } \eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2},\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$
$$h_t^{(m)} \leqslant 0,\ A_{mt} \leqslant 0, \quad (x,t) \in Q^{(m)},\ m = 1, 2. \tag{19}$$

Тоді нульовий розв'язок стійкий за Ляпуновим. Якщо ж

$$c_0 > 0, \tag{20}$$

то $\rho\,(u(x,t)) \leqslant B_9 \exp(-\mu t) \rho\,(u(x,0))$ для майже всіх $t \in S$, де μ і B_9 - додатні сталі.

Доведення. Нехай $c_0 \geqslant 0$. Тоді згідно з умовами теореми з рівності (13) одержимо

$$B_1 \left(\int_{D_\tau^{(1)}} \left((u_t^N)^2 + x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} (u^N_{x_i x_j})^2 \right) dx + \int_{D_\tau^{(2)}} \left((u_t^N)^2 + \sum_{i,j=1}^{2} (u^N_{x_i x_j})^2 \right) dx \right) \leqslant$$
$$\leqslant B_2 \left(\int_{\Omega_1} \left((\psi^N)^2 + x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} (\varphi^N_{x_i x_j})^2 \right) dx + \int_{\Omega_2} \left((\psi^N)^2 + \sum_{i,j=1}^{2} (\varphi^N_{x_i x_j})^2 \right) dx \right).$$

Тобто $\rho^2(u^N(x,\tau)) \leqslant \frac{B_2}{B_1}\rho^2(u^N(x,0))$, де $\tau \in [0;T]$, а T — довільне додатне число. Отже, маємо

$$\rho^2(u^N(x,t)) \leqslant B_6\rho^2(u^N(x,0)) \leqslant 2B_6\rho\,(u(x,0)),\ t \in S$$

для достатньо великих N. В останній нерівності перейшовши до границі при $N \to \infty$, отримаємо, що $\rho^2(u(x,t)) \leqslant 2B_6\rho\,(u(x,0))$ для майже всіх $t \in S$. Тоді для довільного $\epsilon > 0$ вибираємо $\delta = \epsilon/2B_6$ і з умови $\rho\,(u(x,0)) < \delta$ випливає, що $\rho\,(u(x,t)) < \epsilon$ для майже всіх $t \in S$.

Розглянемо випадок, коли $c_0 > 0$. Кожне рівняння системи (11) помножимо спочатку на відповідну $C_{pt}^N \exp(\mu t)$, а потім на $C_p^N \mu \exp(\mu t)$ і підсумуємо по p від 1 до N. Тоді отримаємо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{\Omega_m}\Bigg((v_{tt}-2\mu v_t+\mu^2 v)v_t A_m+\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} v_{x_k x_l} v_{x_i x_j t} A_m+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} v_{x_j} v_{x_i t} A_m + h^{(m)} v_t v A_m + c^{(m)}(v_t-\mu v)v_t A_m\Bigg)dx = 0,$$

де $v = u^N \exp(\mu t)$, μ — додатна стала. Звідси, інтегруючи по t від 0 до τ, і використовуючи умови (19), (20), одержимо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_\tau^{(m)}}\Bigg(A_{1m}(v_t)^2 + A_{1m}(a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2)-$$
$$-c_1\mu\varkappa_0^m)x_2^{\alpha\delta}\sum_{i,j=1}^{2}(v_{x_i x_j})^2\Bigg)dx \leqslant B_7\rho^2(u^N(x,0)), \qquad (21)$$

де $B_7 = \max\limits_{m=1,2}\max\{A_{1m};\ A_{1m}(a_2+b_2\varkappa_1^m+(h_2+\mu^2+\mu)\varkappa_0^m)\}$, $\mu \leqslant c_0/2$. Перепишемо умову (21) для u^N, вибравши при цьому μ таким малим, щоб виконувалися нерівності

$$a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2)-\mu\varkappa_0^m(c_1+1/\delta_2) > 0,\ m=1,2;\ c_0-2\mu \geqslant 0.$$

Матимемо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_\tau^{(m)}}\Bigg(A_{1m}(1-\mu\delta_2)(u_t^N)^2 + A_{1m}(a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2)-$$
$$-\mu(c_1+1/\delta_2)\varkappa_0^m)x_2^{\alpha\delta}\sum_{i,j=1}^{2}(u_{x_i x_j}^N)^2\Bigg)dx \leqslant B_7\rho^2(u^N(x,0))\exp(-2\mu\tau),$$

де $\delta = 1$, якщо $m = 1$,і $\delta = 0$, якщо $m = 2$.

Нехай $B_8 = \max\limits_{m=1,2} \max\{A_{1m}(1-\mu\delta_2),\ A_{1m}(a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2)-\mu(c_1+1/\delta_2)\varkappa_0^m)\}$, де δ_2 — така додатна стала, що $1-\mu\delta_2>0$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\rho^2(u^N(x,t)) \leqslant \frac{B_7}{B_8}\rho^2(u^N(x,0))\exp(-2\mu t) \leqslant \frac{2B_7}{B_8}\rho^2(u(x,0))\exp(-2\mu t),$$

$t\in S$, для достатньо великих N. Перейшовши до границі при $N\to\infty$, одержимо $\rho(u(x,t)) \leqslant B_9\rho(u(x,0))\exp(-\mu t)$ для майже всіх $t\in S$, де B_9 — додатна стала, яка не залежить від t. Отже, теорему 3 доведено.

Зауваження. *Нехай коефіцієнти рівняння (1.m) такі, що*

$$(a_{ij}^{kl(m)})_{x_ix_j}\in C(\overline{Q^{(m)}}),\ (b_{ij}^{(m)})_{x_j}\in C(\overline{Q^{(m)}}),\ i,j,k,l=1,2,\ m=1,2,$$

і функція $u(x,t)\in C^{4,2}(Q)$. Якщо $u(x,t)$ узагальнений розв'язок задачі (1.1),(1.2)-(6), то $u(x,t)$ буде класичним розв'язком цієї задачі.

Справді, інтегральну тотожність (8) за допомогою інтегрування частинами перепишемо у вигляді

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q^{(m)}}\Big(u_{tt}vA_m+\sum_{i,j,k,l=1}^{2}(a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l})_{x_ix_j}vA_m-\sum_{i,j=1}^{2}(b_{ij}^{(m)}u_{x_j})_{x_i}vA_m+$$
$$+c^{(m)}u_tvA_mh^{(m)}uvA_m-f^{(m)}vA_m\Big)dxdt-\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q^{(m)}}(u_tvA_m)_tdxdt+$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\partial\Omega_m}\Big(\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l}v_{x_j}A_m cos(n_m,x_i)-\sum_{i,j,k,l=1}^{2}(a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l})_{x_i}vA_m cos(n_m,x_j)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}u_{x_j}vA_m cos(n_m,x_i)\Big)dSdt=\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_0^{(m)}}A_m\psi v dx,$$

де n_m — зовнішня нормаль до $\partial\Omega_m$, $m=1,2$. Враховуючи, що $v\in M_\alpha$, одержимо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q^{(m)}}\Big(u_{tt}+\sum_{i,j,k,l=1}^{2}(a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l})_{x_ix_j}-\sum_{i,j=1}^{2}(b_{ij}^{(m)}u_{x_j})_{x_i}+c^{(m)}u_t+h^{(m)}u-f^{(m)}\Big)vA_mdxdt+$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\Gamma}\Big(\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l}v_{x_j}A_m cos(n_m,x_i)-\sum_{i,j,k,l=1}^{2}(a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l})_{x_i}vA_m cos(n_m,x_j)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}u_{x_j}vA_m cos(n_m,x_i)\Big)dSdt=\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_0^{(m)}}A_mv(u_t-\psi)dx.$$

На контурі Γ маємо : $\cos(n_m, x_1) = 0,\ m = 1, 2,\ \cos(n_1, x_2) = 1,\ \cos(n_2, x_2) = -1$. Тому останню рівність перепишемо у вигляді

$$\int\limits_0^\infty \sum_{m=1}^2 \int\limits_{\Omega_m} \Big(u_{tt} + \sum_{i,j,k,l=1}^2 (a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l})_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^2 (b_{ij}^{(m)} u_{x_j})_{x_i} +$$

$$+ c^{(m)} u_t + h^{(m)} u - f^{(m)} \Big) v A_m dx dt +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Big(\sum_{j,k,l=1}^2 \Big(a_{2j}^{kl(1)} u_{x_k x_l} A_1 - a_{2j}^{kl(2)} u_{x_k x_l} A_2 \Big) v_{x_j} -$$

$$- \Big(\sum_{i,k,l=1}^2 (a_{i2}^{kl(1)} u_{x_k x_l})_{x_i} A_1 - (a_{i2}^{kl(2)} u_{x_k x_l})_{x_i} A_2 \Big) -$$

$$- \sum_{j=1}^2 (b_{2j}^{(1)} u_{x_j} A_1 - b_{2j}^{(2)} u_{x_j} A_2)) v \Big) \Big|_\Gamma dt = \sum_{m=1}^2 \int\limits_{D_0^{(m)}} A_m v (u_t - \psi) dx.$$

Звідси легко побачити, що $u(x,t)$ задовольняє (1.1), (1.2) і умови (3), (6).

Надалі вважатимемо, що виконуються такі умови:

$$b_0 x_2^\beta \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1,2}^2 b_{ij}^{(1)}(x,t) \xi_i \xi_j \leqslant b_2 x_2^\beta \sum_{i=1}^2 \xi_i^2, \tag{22}$$

$$\sum_{i,j=1}^2 b_{ijt}^{(1)}(x,t) \xi_i \xi_j \leqslant b_3 x_2^\beta \sum_{i=1}^2 \xi_i^2, \quad h^{(1)}(x,t) \leqslant h_2 x_2^\gamma, \quad h_t^{(1)}(x,t) \leqslant h_3 x_2^\gamma$$

$$\text{для всіх } \xi \in \mathbb{R}^n,\ (x,t) \in Q^{(1)}, \beta < 2\alpha - 2.$$

Аналогічно можна довести такі теореми.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (4), (9) для* $\alpha \geqslant 2$, *(22) і, крім того,*

$$a_{ij}^{kl(m)},\ b_{ij}^{(m)},\ c^{(m)},\ h^{(m)} \in L^\infty(Q^{(m)}),\ i,j,k,l = 1,2,$$

$$\sum_{i,j=1}^2 b_{ij}^{(m)} \xi_i \xi_j \geqslant b_0^m \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \ \text{для всіх}\ \xi \in \mathbb{R}^n, \quad b_0^m + \frac{a_1^m \gamma_1}{\varkappa_1^m} \geqslant \delta_3,$$

$$h^{(1)}(x,t) + \frac{a_1^1 \gamma_2}{\varkappa_0^1} x_2^\gamma \geqslant\ h_0 x_2^\gamma, \quad h^{(2)}(x,t) + \frac{a_1^2 \gamma_2}{\varkappa_0^2} \geqslant \delta_3, \quad c^{(m)}(x,t) \geqslant c_0 \geqslant 0,$$

$$0 < A_{0m} \leqslant A_m(t) \leqslant A_{1m}, \quad A_{mt} \in C(S), \quad (x,t) \in Q^{(m)}, \quad m = 1,2,$$

де $\delta_3,\ h_0, \gamma_1, \gamma_2$ *— деякі додатні сталі, причому* $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$,

$$\varkappa_0^1 = \frac{b_0^{\gamma-\alpha+4}}{(\gamma - \beta + 2)(\beta - \alpha + 2)},\ \varkappa_1^1 = \frac{2b^{\beta-\alpha+2}}{\beta - \alpha + 2},$$

($\varkappa_0^2$, $\varkappa_1^2$ — взяті з нерівності Фрідріхса ([4],ст.44));

$$\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega), \quad \psi \in L^2(\Omega), \quad f^{(m)} \in L^2_{\text{loc}}([0;+\infty); L^2(\Omega_m)),\ m = 1,2.$$

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1.1),(1.2)-(6).

Теорема 5. *Нехай виконуються умови (4), (9) для $\alpha \geqslant 2$ і, крім того,*

$$b_0^m + \frac{a_1^m(1-\gamma_0)}{\varkappa_1^m} \geqslant \delta_4, \quad h^{(1)} + \frac{a_1^1\gamma_2}{\varkappa_0^1} x_2^\gamma \geqslant h_0 x_2^\gamma,$$
$$0 < A_{0m} \leqslant A_m(t) \leqslant A_{1m}, \quad A_{mtt} \in L^\infty_{\text{loc}}(S), c^{(m)} \geqslant c_0 \geqslant 0, \quad (x,t) \in Q^{(m)},$$

де $m = 1,2$, а δ_4, h_0, γ_0, γ_2 — додатні сталі, причому $\gamma_0 < 1$, $\gamma_2 < 1$.
Тоді задача (1.1),(1.2)-(6) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Досліджуючи стійкість, будемо розглядати нульовий роз'язок, тобто однорідні рівняння (1.m), $m = 1,2$. Введемо позначення

$$\rho\left(u(x,t)\right) = \left(\iint\limits_{\Omega_1} \left(u_t^2 + x_2^\alpha \sum_{m=1}^{2} u^2_{x_i x_j} + x_2^\beta \sum_{i=1}^{2} u^2_{x_i} + x_2^\gamma u^2 \right) dx + \iint\limits_{\Omega_2} \left(u_t^2 + \sum_{m=1}^{2} u^2_{x_i x_j} \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Стійкість розуміємо в сенсі означення 2, тільки вже в даній метриці.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теорем 4, 5 і, крім того, виконується умова (19).*
Тоді нульовий розв'язок задачі (1.1),(1.2)-(6) стійкий за Ляпуновим.

1. Байкузиев К.Б. Основные смешаные задачи для некоторых вырождающихся уравнений с частными производными.— Ташкент: Фан, 1984.—252 с.
2. Лавренюк С.П. *Об устойчивости поперечных колебаний стержня с острым краем.* // Нелинейные граничные задачи.— 1992.— Вып.4.— С.62–65.
3. Ладыженская О.А., Ступялис Л. *Краевые задачи для уравнений смешаного типа.* // Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1975.— Т.46.— С.101–135.
4. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.—336 с.
5. Онишкевич Г.М. *Стійкість за Ляпуновим рівняння типу коливання пластинки з гострим краєм* // Деп.в ДНТБ України N2020–1995.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики.— М.: Наука,1973. — 408 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.06.96