УДК 517.946

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНОКОМПОНЕНТНИХ СИСТЕМ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

П. П. БАБАК

P. P. BABAK. The asymptotic behaviour of solutions of coupled systems with small parameter. The coupled systems of differential equations are considered. The problem contains the initial boundary problem for parabolic system and the initial problem for system of ordinary differential equations. The behaviour of solutions in three cases if $\varepsilon \to 0$ is studied in three cases. Among them (i) the problem with a small parameter at an elliptic operator;
(ii) the problem with a small parameter at the time derivatives; (iii) the problem with a small parameter at an elliptic operator and at the time derivatives is considered.

У праці досліджено розв'язки задач з малим параметром ε, коли $\varepsilon \to 0$. Для систем звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній питання про зв'язок між співвідношення вихідною задачею і виродженою досліджував А.Н. Тихонов[1]. Поведінку розв'язків крайових задач для систем параболічного типу з малим параметром при часовій похідній вивчали N.Ramanujam, U.N. Srivastava [2], В.Г. Борисов [3] та ін.

Ми розглянули різнокомпонентну систему, що містить систему параболічного типу з початковими і крайовими умовами і систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з початковими умовами. Такого типу системи трапляються під час вивчення процесу дифузії нейтронів у ядерних реакторах [4], а також описують зміну провідності мембрани аксона нерва [5]. Коректність таких задач досліджували В.Н. Масленнікова [6], А. Давлятов [7].

У розділі 1 сформульована теорема про диференціальні нерівності для зазначеної вище задачі з параметром. Доведення цих нерівностей аналогічне до доведення нерівностей для параболічних систем, запропонованого W. Walter'ом [8]. У розділах 2–4 досліджена асимптотика при $\varepsilon \to 0$ розв'язку $u(t,x,\varepsilon) = (\bar{u}(t,x,\varepsilon), \hat{u}(t,x,\varepsilon))$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^M$, $\hat{u} \in \mathbb{R}^L$ такої задачі:

$$\begin{cases} \bar{P}_i u \equiv \varepsilon^\alpha \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \varepsilon^{2\beta} L_i(t,x,\varepsilon)u + \bar{A}_i(t,x,\varepsilon)u = \bar{f}_i(t,x,\varepsilon), \\ \hat{P}_j u \equiv \varepsilon^\alpha \dfrac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} + \hat{A}_j(t,x,\varepsilon)u = \hat{f}_j(t,x,\varepsilon), (t,x) \in G^T = (0,T] \times D; \end{cases} \tag{0.1}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35C20; Secondary 35R45.

$$\begin{cases} \bar{R}_i u \equiv \bar{u}_i(0,x,\varepsilon) = \bar{h}_i(x,\varepsilon), \\ \hat{R}_j u \equiv \hat{u}_j(0,x,\varepsilon) = \hat{h}_j(x,\varepsilon), \quad (t,x) \in \partial_0 G^T = \{0\} \times \bar{D}; \end{cases} \tag{0.2}$$

$$\bar{\Gamma}_i u \equiv \bar{u}_i(t,x,\varepsilon) = \bar{g}_i(t,x,\varepsilon), \quad (t,x) \in \partial_1 G^T = (0,T] \times \partial D, \tag{0.3}$$

де D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $0 < t \leqslant T < \infty$,

$$L_i(t,x,\varepsilon)u \equiv -\sum_{k,l=1}^{n} c_{i,kl}(t,x,\varepsilon)\bar{u}_{i,kl} + \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}(t,x,\varepsilon)\bar{u}_{i,k} + \sum_{s=1}^{M} d_{is}^1(t,x,\varepsilon)\bar{u}_s + \sum_{r=1}^{L} d_{ir}^2(t,x,\varepsilon)\hat{u}_r;$$

$$\bar{A}_i(t,x,\varepsilon)u \equiv \sum_{s=1}^{M} \bar{a}_{is}^1(t,x,\varepsilon)\bar{u}_s + \sum_{r=1}^{L} \bar{a}_{ir}^2(t,x,\varepsilon)\hat{u}_r;$$

$$\hat{A}_j(t,x,\varepsilon)u \equiv \sum_{s=1}^{M} \hat{a}_{js}^1(t,x,\varepsilon)\bar{u}_s + \sum_{r=1}^{L} \hat{a}_{jr}^2(t,x,\varepsilon)\hat{u}_r,$$

де $\bar{u}_{i,k} \equiv \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}, \bar{u}_{i,kl} \equiv \dfrac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_l}$, $k,l = 1,\ldots,n; i = 1,\ldots,M;\ j = 1,\ldots,L$.

Розв'язки всіх задач розглядаються в просторі $U = \bar{U} \times \hat{U}$,де

$$(u \in U) \stackrel{\text{def}}{\equiv} (\bar{u} \in \bar{U}) \wedge (\hat{u} \in \hat{U}),$$

$$\bar{U} \stackrel{\text{def}}{\equiv} C^{1,2}(G^T) \cap C(\bar{G}^T), \quad \hat{U} \stackrel{\text{def}}{\equiv} C^{1,0}(G^T \cup \partial G_1^T) \cap C(\bar{G}^T).$$

Умова А. *Нехай матриця $c_{i,kl}(t,x,\varepsilon)$ при фіксованому $i = 1,\ldots,M$ є симетричною і*

$$m_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{k,l=1}^{n} c_{i,kl}(t,x,\varepsilon)\xi_k\xi_l \leqslant m_1|\xi|^2,$$

де $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $0 < m_0 \leqslant m_1 < \infty$, $(t,x) \in G^T$ та $k,l = 1,\ldots,n$.

Умова В(β). *Функції $c_{i,kl}$, $b_{i,k}$, d_{is}^1, d_{ir}^2, $\bar{a}_{is}^1$, $\bar{a}_{ir}^2$, $\hat{a}_{js}^1$, $\hat{a}_{jr}^2$, $\bar{f}_i$, $\hat{f}_j$ визначені і неперервні в області $G^T \times [0;\varepsilon_0]$, $\bar{h}_i, \hat{h}_j$ — в області $\bar{D} \times [0;\varepsilon_0]$, $\bar{g}_i$, — в області $\partial_1 G^T \times [0;\varepsilon_0]$ та справджують умову $\varepsilon^{2\beta} d_{is}^1 + \bar{a}_{is}^1 \leqslant 0$ при $i \neq s$, $\hat{a}_{jr}^2 \leqslant 0$ при $j \neq r$, $\hat{a}_{js}^1 \leqslant 0$, $\varepsilon^{2\beta} d_{ir}^2 + \bar{a}_{ir}^2 \leqslant 0$ для $i,s = 1,\ldots,M$; $j,r = 1,\ldots,L$, $(t,x) \in G^T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.*

Позначення. *Нехай $u \in \mathbb{R}^p$:* $|u| = (|u_1| + \cdots + |u_p|)^{\frac{1}{2}}$;

$$\|f\| = \sup\{|\bar{f}|, |\hat{f}| : (t,x) \in G^T, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \bar{f} \in \mathbb{R}^M, \hat{f} \in \mathbb{R}^L\};$$

$$\|g\|_1 = \sup\{|\bar{g}(t.x,\varepsilon)| : (t,x) \in \partial_1 G^T, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \bar{g} \in \mathbb{R}^M\};$$

$$\|h\|_0 = \sup\{|\bar{h}(x,\varepsilon)|, |\hat{h}(x,\varepsilon)| : x \in \bar{D}, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \bar{h} \in \mathbb{R}^M, \hat{h} \in \mathbb{R}^L\},$$

$\rho(x,\partial D) = \inf\{|x-y| : y \in \partial D\}$, *$m_s$ – сталі, які не залежать від ε,* $m_s > 0$, $s = 1,2\ldots.$

1. Диференціальні нерівності. Розглянемо для довільних $\varepsilon > 0$ задачу

$$\begin{cases} \bar{Q}_i u \equiv \bar{F}_i(t, x, u, \bar{u}_{i,k}, \bar{u}_{i,kl}, \varepsilon) = 0, \\ \hat{Q}_j u \equiv \hat{F}_j(t, x, u, \varepsilon) = 0, \quad (t, x) \in G^T \end{cases} \tag{1.1}$$

з початковими умовами (0.2) і крайовими (0.3).

Умова V. *Нехай $\bar{F}_i(t, x, u, p, q, \varepsilon)$ — монотонно спадна щодо $q = \{q_{kl}\}_{k,l=1}^n$, $i = 1, \ldots, M$, тобто для всіх $q = \{q_{kl}\}_{k,l=1}^n, \tilde{q} = \{\tilde{q}_{kl}\}_{k,l=1}^n$ та $\xi \in \mathbb{R}^n$ маємо*

$$\sum_{k,l=1}^n [q_{kl} - \tilde{q}_{kl}]\xi_k \xi_l \geqslant 0 \Rightarrow \bar{F}_i(t, x, u, p, q, \varepsilon) \leqslant \bar{F}_i(t, x, u, p, \tilde{q}, \varepsilon),$$

де $(t, x) \in G^T$, $u \in \mathbb{R}^{M+L}$, $p \in \mathbb{R}^n$ та $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ [8].

Умова W. *Нехай $\bar{F}_i(t, x, u, p, q, \varepsilon)$, $\hat{F}_j(t, x, u, \varepsilon)$ — незростаючі функції за змінною u при фіксованих $\bar{u}_i$ та $\hat{u}_j$ відповідно [8].*

Лема. *(Сильна нерівність). Нехай $u, v \in U$, виконуються умови V, W та такі співвідношення:*

$$\bar{Q}_i u < \bar{Q}_i v,\ \hat{Q}_j u < \hat{Q}_j v, \quad (t, x) \in G^T; \qquad \bar{R}_i u < \bar{R}_i v,\ \hat{R}_j u < \hat{R}_j v, \quad (t, x) \in \partial_0 G^T;$$
$$\bar{\Gamma}_i u < \bar{\Gamma}_i v, \quad (t, x) \in \partial_1 G^T; \qquad i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L.$$

Тоді $\bar{u}_i < \bar{v}_i$, $\hat{u}_j < \hat{v}_j$ для $(t, x) \in \bar{G}^T$, $j = 1, \ldots, L$.

Теорема 1.1. *(Слабка нерівність) Нехай $u, v \in U$, виконуються умови V, W та умова Ліпшиця:*

$$|\bar{F}_i(t, x, u, p, q, \varepsilon) - \bar{F}_i(t, x, v, p, q, \varepsilon)| \leqslant L(\varepsilon)|u - v|,$$
$$|\hat{F}_j(t, x, u, \varepsilon) - \hat{F}_j(t, x, v, \varepsilon)| \leqslant L(\varepsilon)|u - v|,$$

а також наступні співвідношення:

$$\bar{Q}_i u \leqslant \bar{Q}_i v,\ \hat{Q}_j u \leqslant \hat{Q}_j v, \quad (t, x) \in G^T; \qquad \bar{R}_i u \leqslant \bar{R}_i v,\ \hat{R}_j u \leqslant \hat{R}_j v, \quad (t, x) \in \partial_0 G^T;$$
$$\bar{\Gamma}_i u \leqslant \bar{\Gamma}_i v, \quad (t, x) \in \partial_1 G^T; \qquad i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L.$$

Тоді $\quad \bar{u}_i \leqslant \bar{v}_i, \quad \hat{u}_j \leqslant \hat{v}_j, \quad (t, x) \in \bar{G}^T, \quad i = 1, \ldots, M; \quad j = 1, \ldots, L.$

2. Лінійна задача з малим параметром при еліптичному операторі. Розглянемо задачу (0.1)–(0.3) при $\alpha = 0, \beta = 1$.

Умова C.2. *Нехай $\|b_{i,k}\| \leqslant m_2$, $i = 1, \ldots, M$; $k = 1, \ldots, n$;*

$$\sum_{p=1}^M (\varepsilon^2 d_{ip}^1 + \bar{a}_{ip}^1) + \sum_{q=1}^L (\varepsilon^2 d_{iq}^2 + \bar{a}_{iq}^2) \geqslant m_3 > -\infty, \quad i = 1, \ldots, M;$$
$$\sum_{p=1}^M \hat{a}_{jp}^1 + \sum_{q=1}^L \hat{a}_{jq}^2 \geqslant m_3 > -\infty, \quad j = 1, \ldots, L, \quad (t, x) \in G^T, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Теорема 2.1. *Нехай $u \in U$ — розв'язок задачі (0.1)-(0.3) при $\alpha = 0$, $\beta = 1$, і виконуються умови A, B(1), C.2.*

Тоді

$$|u(t,x,\varepsilon)| \leqslant m_4\,[\|f\| + \|h\|_0 + \|\bar{g}\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D))]. \qquad (2.1)$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$v(t,x,\varepsilon) = e^{\gamma t}\,[\|f\| + \|h\|_0 + \|\bar{g}\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D))],$$

де $\gamma > 0$, функція $\rho\,(x)$ справджує нерівність $\rho\,(x,\partial D) \leqslant \rho\,(x) \leqslant 2\rho\,(x,\partial D)$ та $\rho\,(x) \in C^2(\bar{D})$. Легко зауважити, що

$$\bar{R}_i u \leqslant \bar{R}_i v, \qquad \hat{R}_j u \leqslant \hat{R}_j v, \quad (t,x) \in \partial_0 G^T,$$

$$\bar{\Gamma}_i u \leqslant \bar{\Gamma}_i v, \qquad (t,x) \in \partial_1 G^T, i = 1,\dots,M; \quad j = 1,\dots,L.$$

При $\gamma = \max\{0; 1 - m_3\}$, $\Delta = (2m_1\||\rho'_x|^2\|_0)^{-1}$, де $\rho'_x = (\rho'_{x_1},\dots,\rho'_{x_n})$ і достатньо малих ε маємо

$$\bar{P}_i u \leqslant \bar{P}_i v, \qquad \hat{P}_j u \leqslant \hat{P}_j v, \quad (t,x) \in G^T.$$

З Теореми 1.1 випливає, що $\bar{u}_i \leqslant \bar{v}_i, \hat{u}_j \leqslant \hat{v}_j$, $(t,x) \in \bar{G}^T, i = 1,\dots,M;\ j = 1,\dots,L$. Врахувавши лінійність оператора (0.1), одержуємо $|\bar{u}_i| \leqslant \bar{v}_i$, $|\hat{u}_j| \leqslant \hat{v}_j$.

Отже, при $m_4 = e^{\gamma T}\sqrt{M+L}$ виконується нерівність (2.1). Теорему доведено.

Розглянемо задачу для $u^\varepsilon(t,x)$:

$$\begin{cases} \bar{P}^\varepsilon_i u^\varepsilon \equiv \dfrac{\partial \bar{u}^\varepsilon_i}{\partial t} + \bar{A}_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \bar{f}_i(t,x,\varepsilon), \\ \hat{P}^\varepsilon_j u^\varepsilon \equiv \dfrac{\partial \hat{u}^\varepsilon_j}{\partial t} + \hat{A}_j(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \hat{f}_j(t,x,\varepsilon), \quad (t,x) \in G^T \cup \partial_1 G^T \end{cases} \qquad (2.2)$$

з початковими умовами (0.2).

Виникає питання, чи виконується така умова:

$$u(t,x,\varepsilon) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, (t,x) \in [0;T] \times D, \qquad (2.3)$$

де $u(t,x,\varepsilon)$ — розв'язок задачі (0.1)–(0.3) при $\alpha = 0, \beta = 1$, а $u^0(t,x)$ — розв'язок задачі (2.2),(0.2) при $\varepsilon = 0$.

Умова D.2. *Нехай існує єдиний розв'язок $u^\varepsilon \in U$ задачі (2.2),(0.2) та виконуються умови:*

$$u^\varepsilon(t,x) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, \quad (t,x) \in \bar{G}^T, \qquad (2.4)$$

$$\|L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon\| \leqslant m_5, \quad i = 1,\dots,M.$$

Зауваження. *Якщо* $\bar{A}_i, \hat{A}_j, \bar{f}_i, \hat{f}_j \in C^{0,2,1}_{t,x,\varepsilon}(G^T \times [0;\varepsilon_0])$ *та* $\bar{h}_i, \hat{h}_j \in C^{2,1}_{x,\varepsilon}(\bar{D} \times [0;\varepsilon_0])$, $i = 1,\dots,M, j = 1,\dots,L$, *то виконується умова D.2 [9].*

Теорема 2.2. *Нехай* $u \in U$ *та виконуються умови A, B(1), C.2, D.2. Тоді*

$$|u(t,x,\varepsilon) - u^0(t,x)| \leqslant \varepsilon m_6 + m_4 \|\bar{g} - \bar{u}^0\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)). \tag{2.5}$$

Доведення. Функція $u(t,x,\varepsilon) - u^\varepsilon(t,x)$ є розв'язком такої задачі

$$\begin{cases} \bar{P}_i[u-u^\varepsilon] = -\varepsilon^2 L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon, \quad \hat{P}_j[u-u^\varepsilon] = 0, & (t,x) \in G^T, \\ \bar{R}_i[u-u^\varepsilon] = 0, \quad \hat{R}_j[u-u^\varepsilon] = 0, & (t,x) \in \partial_0 G^T, \\ \bar{\Gamma}_i[u-u^\varepsilon] = \bar{g}_i(t,x,\varepsilon) - \bar{u}^\varepsilon_i(t,x), & (t,x) \in \partial_1 G^T. \end{cases}$$

Згідно з теоремою 2.1 маємо

$$\begin{aligned} |u-u^\varepsilon| &\leqslant \varepsilon^2 m_4 \|Lu^\varepsilon\| + m_4 \|\bar{g} - \bar{u}^\varepsilon\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon^2 m_4 m_5 + m_4(\|\bar{g} - \bar{u}^0\|_1 + \|\bar{u}^0 - \bar{u}^\varepsilon\|_1) \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon m_6 + m_4 \|\bar{g} - \bar{u}^0\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Отже, одержано позитивну відповідь на питання (2.3).

3. Лінійна задача з малим параметром при похідній за часом. Розглянемо задачу (0.1)–(0.3) при $\alpha = 1,\ \beta = 0$.

Умова C.3. *Існує такий вектор* $y(x) = (\bar{y}(x), \hat{y}(x))$, *що* $\bar{y}_i > 0, \hat{y}_j > 0,\ x \in \bar{D}$ *та*

$$L_i y + \bar{A}_i y \geqslant m_7 > 0, \quad \hat{A}_j y \geqslant m_7 > 0, \quad i = 1,\dots,M, \quad j = 1,\dots,L.$$

Теорема 3.1. *Нехай* $u \in U$ *є розв'язком задачі (0.1)-(0.3) при* $\alpha = 1, \quad \beta = 0$, *і виконуються умови A, B(0), C.3. Тоді*

$$|u(t,x,\varepsilon)| \leqslant m_8\,(\|f\| + \|h\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) + \|\bar{g}\|_1). \tag{3.1}$$

Доведення. Розглянемо функцію $v(t,x,\varepsilon) = m_9\, y\,(\|f\| + \|h\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) + \|\bar{g}\|_1)$. Існує таке $\delta > 0$, що

$$L_i y + \bar{A}_i y \geqslant m_7 \geqslant \delta \bar{y}_i, \quad \hat{A}_j y \geqslant m_7 \geqslant \delta \hat{y}_j$$

для довільних $i = 1, \ldots, M,\ j = 1, \ldots, L,\ (t,x) \in G^T$. Легко зауважити, що при достатньо малих ε та

$$m_9 = \max\{1, \sup\{\frac{1}{\bar{y}_i(x)}, \frac{1}{\hat{y}_j(x)},\ x \in \bar{D},\ i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L\}\}$$

виконуються нерівності

$$\bar{R}_i u \leqslant \bar{R}_i v,\ \hat{R}_j u \leqslant \hat{R}_j v, \quad (t,x) \in \partial_0 G^T; \qquad \bar{P}_i u \leqslant \bar{P}_i v,\ \hat{P}_j u \leqslant \hat{P}_j v, \quad (t,x) \in G^T;$$
$$\bar{\Gamma}_i u \leqslant \bar{\Gamma}_i v, \quad (t,x) \in \partial_1 G^T; \qquad i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L.$$

З Теореми 1.1 випливає, що $\bar{u}_i \leqslant \bar{v}_i,\ \hat{u}_j \leqslant \hat{v}_j,\ (t,x) \in \bar{G}^T,\ i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L$. Врахувавши лінійність оператора (0.1), одержуємо $|\bar{u}_i| \leqslant \bar{v}_i, \quad |\hat{u}_j| \leqslant \hat{v}_j$.

Отже, при $m_8 = m_9 \|y\|_0$ виконується нерівність (3.1). Теорему доведено.

Розглянемо задачу для $u^\varepsilon(t,x),\ (t,x) \in G^T \cup \partial_0 G^T$:

$$\begin{cases} \bar{P}_i^\varepsilon u^\varepsilon \equiv L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon + \bar{A}_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \bar{f}_i(t,x,\varepsilon), \\ \hat{P}_j^\varepsilon u^\varepsilon \equiv \hat{A}_j(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \hat{f}_j(t,x,\varepsilon), \quad (t,x) \in G^T \cup \partial_0 G^T \end{cases} \tag{3.2}$$

з крайовими умовами (0.3).

Виникає питання, чи виконується наступна умова:

$$u(t,x,\varepsilon) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, \quad (t,x) \in G^T \cup \partial_1 G^T, \tag{3.3}$$

де $u(t,x,\varepsilon)$ — розв'язок задачі (0.1)–(0.3) при $\alpha = 1, \beta = 0$, $u^0(t,x)$ — розв'язок задачі (3.2),(0.3) при $\varepsilon = 0$.

Умова D.3. *Нехай існує єдиний розв'язок u^ε задачі (3.2),(0.3) в класі функцій U, $\|u_t^\varepsilon\| \leqslant m_{10}$ та*

$$u^\varepsilon(t,x) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, \quad (t,x) \in \bar{G}^T. \tag{3.4}$$

Зауваження. *Задача (3.2) зводиться до системи рівнянь еліптичного типу, якщо $\det\{\hat{a}_{j,r}^2(t,x,\varepsilon)\}_{j,r=1}^L \neq 0$. Розв'язність такого типу задач досліджена, наприклад, у [10].*

Теорема 3.2. *Нехай $u \in U$ та виконуються умови A, B(0), C.3, D.3. Тоді справедлива оцінка*

$$|u(t,x,\varepsilon) - u^0(t,x)| \leqslant \varepsilon m_{11} + m_8 \|u^0 - h\|_0 \exp(-\delta \frac{t}{\varepsilon}). \tag{3.5}$$

Доведення. Функція $u(t,x,\varepsilon) - u^\varepsilon(t,x)$ задовольняє таку задачу:

$$\begin{cases} \bar{P}_i[u - u^\varepsilon] = -\varepsilon \dfrac{\partial \bar{u}_i^\varepsilon}{\partial t}, \quad \hat{P}_j[u - u^\varepsilon] = -\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial t}, \quad (t,x) \in G^T, \\ \bar{R}_i[u - u^\varepsilon] = \bar{h}_i - u^\varepsilon, \quad \hat{R}_j[u - u^\varepsilon] = \hat{h}_j - u^\varepsilon, \quad (t,x) \in \partial_0 G^T, \\ \bar{\Gamma}_i[u - u^\varepsilon] = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t,x) \in \partial_1 G^T. \end{cases}$$

З теореми 3.1:

$$|u-u^{\varepsilon}| \leqslant \varepsilon m_8 \|u_t^{\varepsilon}\| + m_8 \|h-u^{\varepsilon}\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon m_8 m_{10} + m_8[\|u^0-h\|_0 + \|u^0-u^{\varepsilon}\|_0]\exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon m_{11} + m_8[\|u^0-h\|_0]\exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}).$$

Теорему доведено.

Отже, одержано позитивну відповідь на питання (3.3).

4. Лінійна задача з малим параметром при похідній за часом та еліптичному операторі. Розглянемо задачу (0.1)–(0.3) при $\alpha = 1, \beta = 1$.

Умова С.4. *Існує такий вектор $y = (\bar{y}, \hat{y})$, що $\bar{y}_i > 0, \hat{y}_j > 0$ та*

$$\bar{A}_i y \geqslant m_{12} > 0, \quad \hat{A}_j y \geqslant m_{12} > 0, \quad i = 1, \ldots, M; \quad j = 1, \ldots, L.$$

Зауваження. *Якщо матриця $A = (\bar{A}^T, \hat{A}^T)^T$ строго додатно визначена, то вона справджує умову С.4.*

Теорема 4.1. *Нехай $u \in U$ є розв'язком задачі (0.1)-(0.3) при $\alpha = 1, \beta = 1$, і виконуються умови А, В(1), С.2 , С.4. Тоді*

$$|u(t,x,\varepsilon)| \leqslant m_{13}[\|f\| + \|h\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) + \|\bar{g}\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x, \partial D))]. \tag{4.1}$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$v(t,x,\varepsilon) = m_{13} y[\|f\| + \|h\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) + \|\bar{g}\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x, \partial D))].$$

Легко зауважити, що при достатньо малих ε та

$$m_{13} = \min\{m_{12}, |y|\}, \quad \delta = \frac{1}{2}\frac{m_{12}}{|v|}, \quad \Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_{13}}{m_1\|\rho'_x\||v|}}:$$

виконуються нерівності

$$\begin{aligned}
&\bar{R}_i u \leqslant \bar{R}_i v, \ \hat{R}_j u \leqslant \hat{R}_j v, \ (t,x) \in \partial_0 G^T,\\
&\bar{P}_i u \leqslant \bar{P}_i v, \ \hat{P}_j u \leqslant \hat{P}_j v, \quad (t,x) \in G^T,\\
&\bar{\Gamma}_i u \leqslant \bar{\Gamma}_i v, \qquad\qquad\qquad (t,x) \in \partial_1 G^T, \quad i = 1, \ldots, M; \ j = 1, \ldots, L.
\end{aligned}$$

З Теореми 1.1 випливає, що $\bar{u}_i \leqslant \bar{v}_i, \ \hat{u}_j \leqslant \hat{v}_j, \quad (t,x) \in \bar{G}^T, \ \ i = 1, \ldots, M; \ j = 1, \ldots, L$. Врахувавши лінійність оператора (0.1), одержуємо $|\bar{u}_i| \leqslant \bar{v}_i, |\hat{u}_j| \leqslant \hat{v}_j$. Теорему доведено.

Розглянемо задачу для $u^\varepsilon(t,x)$:

$$\begin{cases} \bar{P}_i^\varepsilon u^\varepsilon \equiv \bar{A}_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \bar{f}_i(t,x,\varepsilon), \\ \hat{P}_j^\varepsilon u^\varepsilon \equiv \hat{A}_j(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \hat{f}_j(t,x,\varepsilon), \quad (t,x) \in \bar{G}^T. \end{cases} \tag{4.2}$$

Виникає питання, чи виконується така умова:

$$u(t,x,\varepsilon) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, \quad (t,x) \in G^T, \tag{4.3}$$

де $u(t,x,\varepsilon)$ — розв'язок задачі (0.1)–(0.3) при $\alpha = 1, \beta = 1$, $u^0(t,x)$ — розв'язок задачі (4.2) при $\varepsilon = 0$.

Умова D.4. *Нехай у класі функцій U існує єдиний розв'язок u^ε задачі (4.2), що $\|u_t^\varepsilon\| \leqslant m_{10}$, $\quad \|L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon\| \leqslant m_5$, $\quad i = 1,\ldots,M$ та*

$$u^\varepsilon(t,x) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, \quad (t,x) \in \bar{G}^T. \tag{4.4}$$

Зауваження. *Якщо $\bar{A}_i, \hat{A}_j, \bar{f}_i, \hat{f}_j \in C^{1,2,1}_{t,x,\varepsilon}(G^T \times [0;\varepsilon_0])$, де $i = 1,\ldots,M$; $j = 1,\ldots,L$ і визначник лінійної системи (4.2) відмінний від нуля в області визначення, то виконується умова D.4.*

Теорема 4.2. *Нехай $u \in U$ та виконуються умови A, B(1), C.2, C.4, D.4. Тоді*

$$\begin{aligned} |u(t,x,\varepsilon) - u^0(t,x)| \leqslant \varepsilon m_{14} + m_{13}\|h - u^0\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) \\ + m_{13}\|\bar{g} - \bar{u}^0\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Доведення. Функція $u(t,x,\varepsilon) - u^\varepsilon(t,x)$ задовольняє таку задачу:

$$\begin{cases} \bar{P}_i[u - u^\varepsilon] = -\varepsilon\dfrac{\partial \bar{u}_i^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon, \ \hat{P}_j[u - u^\varepsilon] = -\varepsilon\dfrac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial t}, & (t,x) \in G^T, \\ \bar{R}_i[u - u^\varepsilon] = \bar{h}_i - u^\varepsilon, \ \hat{R}_j[u - u^\varepsilon] = \hat{h}_j - u^\varepsilon, & (t,x) \in \partial_0 G^T, \\ \bar{\Gamma}_i[u - u^\varepsilon] = \bar{g}_i(t,x,\varepsilon) - \bar{u}_i^\varepsilon(t,x), & (t,x) \in \partial_1 G^T. \end{cases}$$

З теореми 3.1:

$$\begin{aligned} &|u - u^\varepsilon| \leqslant m_{13}(\varepsilon\|u_t^\varepsilon\| + \varepsilon^2\|L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon\| + \|h - u^\varepsilon\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) + \\ &+ \|\bar{g} - \bar{u}^\varepsilon\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D))) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon m_{13}m_{10} + \varepsilon^2 m_{13}m_5 + m_{13}(\|u^0 - h\|_0 + \|u^0 - u^\varepsilon\|_0)\exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) + \\ &+ m_{13}(\|\bar{g} - \bar{u}^0\|_1 + \|\bar{u}^0 - \bar{u}^\varepsilon\|_1)\exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)) \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Отже, одержано позитивну відповідь на питання (4.3).

Автор висловлює подяку В. М. Цимбалу за постійну увагу до роботи, а також Ю. Д. Головатому за корисні поради під час підготовки праці до друку.

1. Тихонов А.Н. *Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных* // Матем. сб.— 1952.— Т.31(73), N3.— С.575–586.
2. Ramanujam N., Srivastava U.N. *On the asymptotic behaviour of solutions of parabolic systems with a small parameter* // Bollettino U. M. I. — 1981. — Vol. 5, N 18–B. — P.557–574.
3. Борисов В.Г. *О параболических краевых задачах с малым параметром при производных по t* // Матем. сб.— 1986.— Т.131, N3.— С.293–308.
4. Глесстон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. — М.: Изд-во ин. лит., 1954.
5. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.— 376с.
6. Масленникова В.Н. *Первая краевая задача для некоторых квазилинейных систем математической теории диффузии* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики.— 1963.— Т.3, N3.— С.467–477.
7. Давлятов А. *О первой краевой задаче для системы уравнений типа Ходжкина–Хаксли* // Докл. АН УзССР.— 1988.— Т.9.— С.6–9.
8. Walter W. Differential and integral inequalities. — Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.— 720с.
10. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.:Наука, 1973.— 576с.

Стаття надійшла до редколегії 02.06.96