УДК 517.95

АПРІОРНА ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКУ ТА ТЕОРЕМА ТИПУ ФРАГМЕНА–ЛІНДЕЛЬОФА ДЛЯ ДЕЯКИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ У НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

М. М. Бокало

M. M. Bokalo. A priori estimation for a solution and a Fragman-Lindelef type theorem for some quasilinear parabolic systems in unbounded domains. The Fourier problem is studied for some quasilinear parabolic systems of the second order in unbounded (respect to space variables) domains. A priori local and global type estimations of week solutions are obtained. In particular, the Fragman-Lindelef type theorem follows from these estimations.

Вступ. Ми розглянемо задачу Фур'є для квазілінійних параболічних систем у необмежених за просторовими змінними областях. Визначимо умови, за яких існує "локальна" оцінка узагальненого розв'язку цієї задачі, точніше, певна інтегральна норма узагальненого розв'язку в довільній підобласті оцінюється через відповідну інтегральну норму значень правих частин в дещо ширшій підобласті (див. також [1,2]). Для цього використано методику праці [1]. З "локальної" оцінки за додаткових умов отримано глобальну оцінку узагальненого розв'язку, а з неї — теорему типу Фрагмена–Ліндельофа. Зазначимо, що тут, на відміну від багатьох інших праць, де розглядали аналогічні питання (див.,наприклад,[3–5]), не накладаються ніякі обмеження на поведінку розв'язку при $|x| \to \infty, t \to -\infty$.

1.Фоормулювання задачі і визначення результатів. Нехай $Q = \Omega\times (-\infty, T)$, де Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з кусково–гладкою межею $\partial\Omega$ (зокрема $\Omega = \mathbb{R}^n_x$), $T < +\infty$. Позначимо $\Sigma = \partial\Omega \times (-\infty, T)$.

Розглянемо задачу

$$u_{it} - \sum_{j=1}^{n} D_j a_{ij}(x,t,\delta u) + a_{i0}(x,t,\delta u) = f_{i0}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} D_j f_{ij}(x,t) \quad \text{в } Q,\ i = \overline{1,N}, \quad (1)$$

$$u_i = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma\,, \quad i = \overline{1,N}, \quad (2)$$

де $N \geqslant 1$ — ціле число; $u = \text{colon}(u_1, u_2, ..., u_N)$; $D_j v = \partial v/\partial x_j$; $j = \overline{1,n}$, $D_0 v = v$;

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35K50; Secondary 35K60.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження", грант N APU 061007

$\delta u = (D_j u_i)$ — матриця з елементами $D_j u_i$, де i — номер рядка, j — номер стовпчика, $i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$.

Припустимо, що

(A) функції $a_{ij}(x,t,\xi)$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ визначені для точок $(x,t) \in Q$ та матриць $\xi = (\xi_{kl})$ з елементами $\xi_{kl} \in \mathbb{R}^1$, де k — номер рядка, l — номер стовпчика, $k = \overline{1,N}$, $l = \overline{0,n}$, і є каратеодорівськими, тобто вимірними за (x,t) для всіх ξ і неперервними за ξ для майже всіх (x,t); $a_{ij}(x,t,0) = 0$, $i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$;

(B) існують числа p_0, p_1 такі, що $p_0 > 2, p_1 > 1, p_0 > p_1$ і для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних ξ

1) $\quad |a_{ij}(x,t,\xi)| \leqslant A_{ij}(\sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{l=1}^{n} |\xi_{kl}|^{p_1-1} + \sum\limits_{k=1}^{N} |\xi_{k0}|^{p_0(p_1-1)/p_1})$,

де $A_{ij} = \mathrm{const} > 0$, $\quad i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,n}$;

2) $\quad |a_{i0}(x,t,\xi)| \leqslant b_{i1}(x,t) \sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{l=1}^{n} |\xi_{kl}|^{p_1(p_0-1)/p_0} + b_{i2}(x,t) \sum\limits_{k=1}^{N} |\xi_{k0}|^{p_0-1} + b_{i3}(x,t)$,

де $b_{i1}, b_{i2} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\quad b_{i3} \in L^{p_0'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\qquad 1/p_0 + 1/p_0' = 1$;

$$\textbf{3)} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}(x,t,\xi)\xi_{ij} \geqslant K_1 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} |\xi_{ij}|^{p_1} + K_2 \sum_{i=1}^{N} |\xi_{i0}|^q + K_3 \sum_{i=1}^{N} |\xi_{i0}|^{p_0} - b(x,t),$$

де $q = \min\{2, p_1\}$, K_1, $K_3 = \mathrm{const} > 0$, $K_2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, $b(x,t) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $b(x,t) \geqslant 0$;

(C) $f_{i0}(x,t) \in L^{p_0'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\quad f_{ij}(x,t) \in L^{p_1'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\quad i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n}$.

Під $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $q \geqslant 1$, розуміємо простір визначених і вимірних на Q функцій, звуження яких на довільну обмежену вимірну множину $Q' \subset Q$ належать простору $L^q(Q')$. Через $W^{1,0}_{p_1,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ позначимо простір функцій $v(x,t)$ з $L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, які мають узагальнені похідні $v_{x_1}, ..., v_{x_n}$ з $L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, а через $\overset{o}{W}{}^{1,0}_{p_1,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ – підпростір функцій з простору $W^{1,0}_{p_1,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, слід яких дорівнює нулю на Σ .

Зауваження 1. *Частковим випадком системи (1), яка справджує умови (A),(B), є напівлінійне рівняння*

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x,t)\,D_i u + a_i(x,t)u) + \sum_{i=0}^{n} b_i(x,t)\,D_i u + c(x,t,u) = f_0(x,t) + \sum_{j=1}^{n} D_j f_j(x,t),$$

де стосовно коефіцієнтів рівняння припускається таке:

$$\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$$

для довільних $(\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ *і майже всіх* $(x,t) \in Q$, $\lambda_0, \lambda_1 = \mathrm{const} > 0$; $|a_i(x,t)| \leqslant K$, $|b_i(x,t)| \leqslant M$, $i = \overline{1,n}$, $b_0(x,t) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $b_0(x,t) > (Kn + M)(K + M)n/(2\lambda_0)$,

$K, M = \text{const} > 0$; *для довільних* $s \in \mathbb{R}^1$ *і майже всіх* $(x,t) \in Q$ *виконується нерівність*

$$c(x,t,s)\, s \geqslant c_0 |s|^{p_0},$$

де $c_0 = \text{const} > 0, p_0 > 2$ *(наприклад,* $c(x,t,s) = \hat{c}|s|^{p_0-2}s, \hat{c} = \text{const} > 0$*).*

Другим прикладом системи (1), яка справджує умови (A),(B), є система

$$u_{it} - D_i(a_i(x,t)|D_i u_i|^{p_1-2} D_i u_i) + b_i(x,t)|u_i|^{p_0-2}u_i + c_i(x,t,u) =$$
$$= f_{i0}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} D_j f_{ij}(x,t), \quad i = \overline{1,N},$$

де $p_0 > 2, p_1 > 1, p_0 > p_1$; $a_i \in L^\infty(Q)$, $a_i(x,t) \geqslant a_0 = \text{const} > 0$, $b_i \in L^\infty_{\text{loc}}(Q)$, $b_i(x,t) \geqslant b_0 = \text{const} > 0, i = \overline{1,N}$; $c_i(x,t,s)$ *— вимірні за* (x,t) *для всіх* $s \in \mathbb{R}^N$ *і диференційовні за* s *для майже всіх* (x,t), *причому* $\partial c_i(x,t,s)/\partial s_j \in L^\infty(Q)$, $\partial c_i(x,t,s)/\partial s_i \geqslant c_0$, *де* $c_0 >> 1$ $(i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,N})$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1),(2) назвемо вектор-функцію* $u(x,t) = \text{colon}(u_1(x,t), ..., u_N(x,t))$, *компоненти якої* $u_i(x,t)$ *належать простору* $\overset{o}{W}{}^{1,0}_{p_1,\text{loc}}(\overline{Q}) \cap L^p_{\text{loc}}(\overline{Q})$ *і справджують інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_Q \sum_{i=1}^{N} \{-u_i \psi_{it} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,\delta u) D_j \psi_i + a_{i0}(x,t,\delta u)\psi_i\}\, dxdt =$$
$$= \iint\limits_Q \sum_{i=1}^{N} \{f_{i0}\psi_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, D_j \psi_i\}\, dxdt \tag{3}$$

для довільних $\psi_i \in C_0^\infty(Q), i = \overline{1,N}$.

Зауваження 2. *У тотожності (3) пробні функції* $\psi_i, i = \overline{1,N}$, *можна брати з простору* $W = \{\psi(x,t) : \psi \in L^{p_0}(Q) \bigcap L^{p_1}(Q), D_j\psi \in L^{p_1}(Q), \supset = \overline{1,n}, \psi_t \in L^2(Q), \psi = 0$ *на* ∂Q *і поза деякою (що залежить від* ψ*) обмеженою підобластю області* $Q\}$. *Щоб переконатися в цьому, достатньо для довільних* $\psi_i \in W, i = \overline{1,N}$, *взяти послідовності* $\{\psi_i^m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ *з простору* $C_0^\infty(Q)$, $i = \overline{1,N}$, *такі, що* $\psi_i^m \to \psi_i$ *в* $L^{p_0}(Q) \bigcap L^{p_1}(Q)$, $D_j\psi_i^m \to D_j\psi_i$ *в* $L^{p_1}(Q)$, $\psi_{it}^m \to \psi_{it}$ *у* $L^2(Q)$, $i = \overline{1,N}$, *підставити* ψ_i^m *замість* ψ_i $(i = \overline{1,N})$ *у (3) і перейти до границі при* $m \to \infty$. *Граничний перехід забезпечується умовами (A)-(C).*

Зауваження 3. *З означення 1 та зауваження 2 випливає, що похідна* u_t *узагальненого розв'язку* u *задачі (1),(2) в сенсі простору узагальнених функцій* $D(-\infty, T; (W^{-1}_{p_1',\text{loc}}(\overline{\Omega}) + L^{p_0'}_{\text{loc}}(\overline{\Omega}))^N)$ *належить простору* $(L^{p_1'}_{\text{loc}}((-\infty,T]; W^{-1}_{p_1',\text{loc}}(\overline{\Omega}))^N + (L^{p_0'}_{\text{loc}}(\overline{Q}))^N$. *Тут* $W^{-1}_{p_1',\text{loc}}(\overline{\Omega})$ *— простір узагальнених функцій на* Ω, *звуження яких на довільну обмежену підобласть* Ω' *області* Ω *належить простору* $W^{-1}_{p_1'}(\Omega')$, *спряженому до* $\overset{o}{W}{}^1_{p_1}(\Omega')$. *Звідси (див., наприклад, [6]) випливає, що* $u \in C((-\infty,T]; (L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega}))^N)$.

Під $C((-\infty,T]; (L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega}))^N)$ *розуміємо простір вимірних на* Q *функцій, звуження яких на множину* $\Omega' \times (-\infty, T)$, *де* Ω' *— довільна обмежена підобласть області* Ω, *належить простору* $C((-\infty,T]; (L^2(\Omega'))^N)$.

Сформулюємо основні результати. Спочатку введемо деякі позначення. Будемо вважати, що точка $x = 0$ належить Ω. Нехай для довільного числа $R > 0$ Ω_R — зв'язна компонента множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$, якій належить точка $x = 0$. Тоді, очевидно, $\Omega_R \subset \Omega_{R_1}$ для довільних $R < R_1$. Позначимо $Q_{R,t_0} = \Omega_R \times (t_0 - R, t_0)$, де t_0 — довільне число. Під $|\eta|$, де $\eta \in \mathbb{R}^k$, розуміємо норму вектора η, тобто $|\eta| = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \eta_i^2\right)^{1/2}$. Нехай $\nabla u = (D_j u_i)$ — матриця з елементами $D_j u_i$, де i — номер рядка, j — номер стовпчика, $i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n}$, $|\nabla u|^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{n} |D_j u_i|^2$.

Сформулюємо "локальну" апріорну оцінку узагальненого розв'язку задачі (1),(2).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A)-(C) і $u(x,t)$ — узагальнений розв'язок задачі (1),(2). Тоді для довільних чисел t_0, R_0, R таких, що $t_0 \leqslant T$, $0 < R_0 < R$, у випадку, коли $K_2 = 0$, справедлива оцінка*

$$\sup_{[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{R_0,t_0}} (|\nabla u|^{p_1} + |u|^{p_0})\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{s+r} [B_1 R^{n+1-p_0/(p_0-2)} + B_2 R^{n+1-p_0p_1/(p_0-p_1)} +$$

$$+B_3 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^{N} \{|f_{i0}|^{p_0'} + \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'}\}\, dxdt + B_4 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} b\, dxdt], \qquad (4)$$

де s, r — довільні числа такі, що $s > p_0p_1/(p_0-p_1)$, $r > p_0/(p_0-2)$; B_1, B_2, B_3, B_4 — додатні сталі, які залежать тільки від n, N, p_0, p_1, s, r, K_i $(i = 1,2,3)$, A_{ij} $(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$, а у випадку, коли $K_2 > 0$, — оцінка

$$\sup_{[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u(x,t)|^2\, dx + \iint\limits_{Q_{R_0,t_0}} (|\nabla u|^{p_1} + |u|^{p_0})\, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\mu} [B_5 R^{-\beta} + B_6 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^{N} \{|f_{i0}|^{p_0'} + \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'}\}\, dxdt + B_7 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} b\, dxdt], \qquad (5)$$

де $\beta > 0$ — стала, яка залежить тільки від p_0, p_1; $\mu > 2(n+1+\beta)$ — довільне число; B_5, B_6, B_7 — додатні сталі, які залежать тільки від n, N, p_0, p_1, μ, K_i $(i = 1,2,3)$, A_{ij} $(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$.

З теореми 1 за додаткових умов випливає така глобальна оцінка узагальненого розв'язку задачі (1),(2).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і, крім того, якщо $K_2 = 0$ в умові (B), то $p_0 < 2(n+1)/n$ і $p_1 > (n+1)p_0/(n+1+p_0)$. Тоді, якщо $f_{i0}(x,t) \in L^{p_0'}(\overline{Q})$, $f_{ij}(x,t) \in L^{p_1'}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n}, b(x,t) \in L^1(Q)$, то узагальнений розв'язок u задачі (1),(2) належить простору $(\overset{o}{W}{}^{1,0}_{p_1}(Q) \cap L^{p_0}(Q))^N$, і справджує оцінку*

$$\sup_{(-\infty,T]} \int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q} (|\nabla u|^{p_1} + |u|^{p_0})\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant B_8 \iint\limits_{Q} \sum_{i=1}^{N} \{|f_{i0}|^{p_0'} + \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'}\}\,dxdt + B_9 \iint\limits_{Q} b\,dxdt, \tag{5'}$$

де B_8, B_9 — додатні сталі, які залежать тільки від $n, N, p_0, p_1, K_i (i = 1,2,3)$, $A_{ij}(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$.

Як наслідок оцінки $(5')$ отримаємо таку теорему типу Фрагмена–Ліндельофа.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді, якщо $f_{ij}(x,t) = 0$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n}$, $b(x,t) = 0$, то $u_i = 0$, $i = \overline{1,N}$.*

2. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Спочатку нагадаємо означення і деякі потрібні нам властивості усереднень за Стекловим [7]. Нехай $v(t) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$. Визначимо для кожного $h > 0$

$$v_h(t) = \frac{1}{h} \int\limits_{t-h}^{t} v(\theta)\,d\theta, \qquad v_{\overline{h}}(t) = \frac{1}{h} \int\limits_{t}^{t+h} v(\theta)\,d\theta.$$

Функції $v_h(t), v_{\overline{h}}(t)$ називаються усередненнями функції $v(t)$ за Стекловим. Якщо $v(t) \in L^1(a,b)$, то усереднення $v_h(t), v_{\overline{h}}(t)$ будують за тими ж самими правилами, попередньо продовживши $v(t)$ поза (a,b) нулем. Легко перевірити (замінивши порядок інтегрування) справедливість рівностей

$$\int\limits_{a-h}^{b} v(t)\varphi_{\overline{h}}(t)\,dt = \int\limits_{a}^{b} v_h(t)\varphi(t)\,dt, \quad \int\limits_{a-h}^{b} v(t)\varphi_{\overline{h}t}(t)\,dt = -\int\limits_{a}^{b} v_{ht}(t)\varphi(t)\,dt$$

для довільних $v(t), \varphi(t) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$, якщо $\varphi = 0$ поза $[a,b]$. Крім того, $v_h \to v$ в $L^q(a,b)$ при $h \to 0$, де $q \geqslant 1, -\infty < a < b < +\infty, v \in L^q(a,b)$.

Нехай $R > 0, t_0 \leqslant T$ — довільні числа . Визначимо функції $\zeta(x)$ і $\chi(t)$ таким чином: $\zeta(x) = \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2)$, якщо $|x| \leqslant R$, і $\zeta(x) = 0$, якщо $|x| > R$; $\chi(t) = R - |t - t_0|$, якщо $t \in [t_0 - R, t_0]$ і $\chi = 0$, якщо $t \notin [t_0 - R, t_0]$. Візьмемо довільні числа $\tau \in (t_0 - R, t_0), \delta \in (0, \tau - t_0 + R)$ і введемо функцію $\eta_\delta(t,\tau)$ таку, що $\eta_\delta(t,\tau) = 1$, якщо $t \in (-\infty, \tau - \delta]$, $\eta_\delta(t,\tau) = -(t-\tau)/\delta$, якщо $t \in [\tau - \delta, \tau]$, $\eta_\delta(t,\tau) = 0$, якщо $t \in [\tau, +\infty)$.

Підставимо в інтегральну тотожність (3) (див. зауваження 1) $\psi_i = (u_{ih}\zeta^s\chi^r\eta_\delta)_{\overline{h}}$, де $s > 0, r > 0$ — довільні додатні числа, $h < T - \tau$. У результаті, позначивши $Q^\tau = \Omega_R \times (t_0 - R, \tau)$, отримаємо

$$\iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} u_{iht}u_{ih}\zeta^s\chi^r\eta_\delta\,dxdt + \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N}\{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(x,t,\delta u))_h(D_ju_{ih})\zeta^s +$$

$$+s\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(x,t,\delta u))_h u_{ih}\zeta^{s-1}(D_j\zeta) + (a_{i0}(x,t,\delta u))_h u_{ih}\zeta^s\}\chi^r\eta_\delta\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N}\{(f_{i0})_h u_{ih}\zeta^s\chi^r - \sum_{j=1}^{n}(f_{ij})_h D_j(u_{ih}\zeta^s)\chi^r\}\eta_\delta\,dxdt. \tag{6}$$

Перетворимо перший член лівої частини (6) у такий спосіб:

$$\iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} u_{iht}u_{ih}\zeta^s\chi^r\eta_\delta\,dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{N}(u_{ih}^2)_t\zeta^s\chi^r\eta_\delta\,dxdt =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\tau-\delta}^{\tau}\int\limits_{\Omega_R}|u_h|^2\zeta^s\chi^r\,dxdt - \frac{r}{2}\iint\limits_{Q^\tau}|u_h|^2\zeta^s\chi^{r-1}\chi'\eta_\delta\,dxdt. \tag{7}$$

Підставивши (7) у (6), перейдемо до границі спочатку при $h \to 0$, а потім при $\delta \to 0$. Це дає

$$\frac{\chi^r(\tau)}{2}\int\limits_{\Omega_R}|u(x,\tau)|^2\,\zeta^s\,dx + \iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^{N}\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t,\delta u)\;D_ju_i + a_{i0}(x,t,\delta u)\;u\}\zeta^s\chi^r\,dxdt =$$

$$= \frac{r}{2}\iint\limits_{Q^\tau}|u|^2\zeta^s\chi^{r-1}\chi'\,dxdt - s\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t,\delta u)u_i\zeta^{s-1}(D_j\zeta)\chi^r\,dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^{N}\{f_{i0}\;u_i\zeta^s - \sum_{j=1}^{n}f_{ij}\;D_j(u_i\zeta^s)\}\chi^r\,dxdt. \tag{8}$$

Використовуючи умову (B) та оцінки $|D_j\zeta| \leqslant 2, j = \overline{1,n}$, $|\chi'| \leqslant 1$, з (8) знаходимо

$$\frac{\chi^r(\tau)}{2}\int\limits_{\Omega_R}|u(x,\tau)|^2\,\zeta^s\,dx + \iint\limits_{Q^\tau}\{K_1^*|\nabla u|^{p_1} + K_2^*|u|^q + K_3^*|u|^{p_0}\}\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{2} \iint\limits_{Q^\tau} |u|^2 \zeta^s \chi^{r-1}\, dxdt + 2s \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \left(\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{n} |D_l u_k|^{p_1 - 1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p_0(p_1-1)/p_1} \right) |u_i| \zeta^{s-1} \chi^r\, dxdt + \iint\limits_{Q^\tau} b \zeta^s \chi^r\, dxdt +$$

$$+ \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} \{ |f_{i0}|\, |u_i| \zeta^s \chi^r + 2s \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}| |u_i| \zeta^{s-1} \chi^r + \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}| |D_j u_i| \zeta^s \chi^r \}\, dxdt. \qquad (9)$$

Тут ми використали нерівність

$$\sum_{i=1}^{N} a_i^p \geqslant N^{-p/2} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2 \right)^{p/2}, \quad p \geqslant 1,$$

і позначили $K_1^* = K_1 (nN)^{-p_1/2}, K_2^* = K_2 N^{-q/2}, K_3^* = K_3 N^{-p_0/2}$.

Зауважимо, що

$$K_2^* |u|^q + 2^{-1} K_3^* |u|^{p_0} \geqslant K_2^{**} (|u|^{q_1} + |u|^{q_2} + |u|^{q_3}), \qquad (10)$$

де q_1, q_2, q_3 — довільні числа з відрізка $[q; p_0]$, $K_2^{**} = \frac{1}{3} \min\{K_2^*, K_3^*/2\} > 0$, якщо $K_2 > 0$, і $q_1 = q_2 = q_3 = p_0$, $K_2^{**} = K_3^*/6 > 0$, якщо $K_2 = 0$.

На підставі (9) і (10) маємо

$$\frac{\chi^r(\tau)}{2} \int\limits_{\Omega_R} |u(x,\tau)|^2 |\zeta^s\, dx + \iint\limits_{Q^\tau} \{ K_1^* |\nabla u|^{p_1} + K_2^{**} (|u|^{q_1} + |u|^{q_2} + |u|^{q_3}) + \frac{1}{2} K_3^* |u|^{p_0}) \} \zeta^s \chi^r dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{2} \iint\limits_{Q^\tau} |u|^2 \zeta^s \chi^{r-1}\, dxdt + 2s A_1 \iint\limits_{Q^\tau} |\nabla u|^{p_1 - 1} |u| \zeta^{s-1} \chi^r\, dxdt +$$

$$+ 2s A_2 \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{p_0(p_1-1)/p_1 + 1} \zeta^{s-1} \chi^r\, dxdt + \iint\limits_{Q^\tau} b \zeta^s \chi^r\, dxdt +$$

$$+ \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} \{ |f_{i0}|\, |u_i| \zeta^s \chi^r + 2s \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}| |u_i| \zeta^{s-1} \chi^r + \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}| |D_j u_i| \zeta^s \chi^r \}\, dxdt, \qquad (11)$$

де $\quad A_1 = nN \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}, \quad A_2 = N \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}$.

Оцінимо зверху члени правої частини нерівності (11), використовуючи нерівність Юнга

$$ab \leqslant \varepsilon a^\gamma + M(\varepsilon, \gamma) b^{\gamma'},$$

де $\varepsilon > 0$, $\gamma > 1$, $1/\gamma + 1/\gamma' = 1$, $M(\varepsilon, \gamma) = \dfrac{(\gamma - 1)}{\gamma}(\gamma\varepsilon)^{1/(1-\gamma)}$.

Взявши $q_1 \in (2, p_0]$, $\gamma = q_1/2$, $a = |u|^2\zeta^{2s/q_1}\chi^{2r/q_1}$, $b = \zeta^{s(q_1-2)/q_1}\chi^{r(q_1-2)/q_1-1}$, з нерівності Юнга маємо

$$\iint\limits_{Q_{R,t_0}} |u|^2\zeta^s\chi^{r-1}\,dxdt \leqslant \varepsilon_1 \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{q_1}\zeta^s\chi^r\,dxdt + M(\varepsilon_1, q_1/2)\iint\limits_{Q^\tau}\zeta^s\chi^{r-q_1/(q_1-2)}\,dxdt, \qquad (12)$$

де $\varepsilon_1 > 0$ — довільне число.

Оскільки $p_0(p_1-1)/p_1 + 1 < p_0$, то для довільного числа $q_2 \in (p_0(p_1-1)/p_1 + 1, p_0]$ існує число $\nu = \nu(q_2) > 1$ таке, що $(p_0(p_1-1)/p_1 + 1)\nu = q_2$. Легко знайти, що $\nu = p_1q_2/(p_0p_1 - (p_0 - p_1))$, причому $\nu' = p_1q_2/(p_0 - p_1(1 + p_0 - q_2))$ $(1/\nu + 1/\nu' = 1)$. Взявши $\gamma = \nu$, $a = |u|^{p_0(p_1-1)/p_1+1}\zeta^{s/\nu}\chi^{r/\nu}$, $b = \zeta^{s/\nu'-1}\chi^{r/\nu'}$, з нерівності Юнга отримаємо

$$\iint\limits_{Q^\tau} |u|^{p_0(p_1-1)/p_1+1}\zeta^{s-1}\chi^r\,dxdt \leqslant \varepsilon_2\iint\limits_{Q^\tau}|u|^{q_2}\zeta^s\chi^r\,dxdt +$$
$$+ M(\varepsilon_2, \nu)\iint\limits_{Q^\tau}\zeta^{s-p_1q_2/(p_0-p_1(1+p_0-q_2))}\chi^r\,dxdt. \qquad (13)$$

На підставі нерівностей Гельдера, Юнга і нерівності

$$\Big(\sum_{i=1}^N a_i^p\Big)^{1/p} \leqslant N^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^N a_i^2\Big)^{1/2}, \quad p \geqslant 1, \quad a_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, N},$$

маємо

$$\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^N |f_{i0}|\,|u_i|\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant \iint\limits_{Q^\tau}\left(\sum_{i=1}^N |f_{i0}|^{p_0'}\right)^{\frac{1}{p_0'}}\left(\sum_{i=1}^N |u_i|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}}\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_3\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^N |u_i|^{p_0}\zeta^s\chi^r\,dxdt + M(\varepsilon_3, p_0)\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^N |f_{i0}|^{p_0'}\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_3 N\iint\limits_{Q^\tau}|u|^{p_0}\zeta^s\chi^r\,dxdt + M(\varepsilon_3, p_0)\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^N |f_{i0}|^{p_0'}\zeta^s\chi^r\,dxdt. \qquad (14)$$

Аналогічно

$$\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^n |f_{ij}||D_ju_i|\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant \varepsilon_4 nN\iint\limits_{Q^\tau}|\nabla u|^{p_1}\zeta^s\chi^r\,dxdt +$$

$$+M(\varepsilon_4, p_1) \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'} \zeta^s \chi^r \, dxdt, \tag{15}$$

$$\iint\limits_{Q^\tau} |\nabla u|^{p_1-1} |u| \zeta^{s-1} \chi^r \, dxdt \leqslant \varepsilon_5 \iint\limits_{Q^\tau} |\nabla u|^{p_1} \zeta^s \chi^r \, dxdt + M(\varepsilon_5, p_1') \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{p_1} \zeta^{s-p_1} \chi^r \, dxdt, \tag{16}$$

$$\iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}||u_i| \zeta^{s-1} \chi^r \, dxdt \leqslant \varepsilon_6 nN \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{p_1} \zeta^{s-p_1} \chi^r \, dxdt +$$

$$+M(\varepsilon_6, p_1) \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'} \zeta^s \chi^r \, dxdt. \tag{17}$$

З нерівності Юнга, взявши $q_3 \in (p_1, p_0], \gamma = q_3/p_1, a = |u|^{p_1} \zeta^{sp_1/q_3} \chi^{rp_1/q_3}$, $b = \zeta^{s(q_3-p_1)/q_3 - p_1} \chi^{r(q_3-p_1)/q_3}$, матимемо

$$\iint\limits_{Q^\tau} |u|^{p_1} \zeta^{s-p_1} \chi^r \, dxdt \leqslant \varepsilon_7 \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{q_3} \zeta^s \chi^r \, dxdt + M(\varepsilon_7, q_3/p_1) \iint\limits_{Q^\tau} \zeta^{s-p_1 q_3/(q_3-p_1)} \chi^r \, dxdt, \tag{18}$$

де $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7 > 0$ — довільні числа.

Вибравши $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7$ досить малими, з (11)–(18) отримаємо

$$\chi^r(\tau) \int\limits_{\Omega_R} |u(x,\tau)|^2 \zeta^s \, dx + \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \{|\nabla u|^{p_1} + |u|^{p_0}\} \zeta^s \chi^r \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \zeta^s \chi^{r-q_1/(q_1-2)} \, dxdt + C_2 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \zeta^{s-p_1 q_2/(p_0-p_1(1+p_0-q_2))} \chi^r \, dxdt +$$

$$+C_3 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \zeta^{s-p_1 q_3/(q_3-p_1)} \chi^r \, dxdt +$$

$$+C_4 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^{N} \{|f_{i0}|^{p_0'} + \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'}\} \zeta^s \chi^r \, dxdt + C_5 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} b \zeta^s \chi^r \, dxdt. \tag{19}$$

Нехай R_0 — довільне число з проміжку $(0, R)$. Очевидно, що $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant R$, $0 \leqslant \chi(t) \leqslant R$, причому $R - R_0 \leqslant \zeta(x)$, коли $|x| \leqslant R_0$, $R - R_0 \leqslant \chi(t)$, коли $t \in [t_0 - R_0, t_0]$. У випадку, коли $K_2 = 0$ (тоді $q_1 = q_2 = q_3 = p_0$), з (19) вибираючи $s > p_0 p_1 (p_0 - p_1), r > p_0/(p_0 - 2)$, $\tau \in [t_0 - R_0, t_0]$, отримуємо (4), а у випадку $K_2 > 0$, вибираючи q_1, q_2, q_3 такими, що $p_1 q_3 (q_3 - p_1) = p_1 q_2/(p_0 - p_1(1 + p_0 - q_2)) = q_1/(q_1 - 2) = \alpha > n + 1$ (тоді $\beta = \alpha - (n + 1)$), отримаємо (5).

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. За даних умов в оцінках (4) і (5) можна перейти до границі спочатку при $R \to +\infty$, а потім при $R_0 \to +\infty$. У результаті отримуємо оцінку ($5'$). Теорему 2 доведено.

Доведення теореми 3. Прийнявши в ($5'$) $f_{ij} = 0, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, n}$, $b = 0$, отримаємо $u_i = 0$, $i = \overline{1, N}$, що й треба було довести.

1. Bernis F. *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity* // Arch. Ration Mech. and Anal.— 1989.— Vol.106, No.3.— P.217–241.
2. Бокало Н.М. *Об однозначной разрешимости задачи без начальных условий для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности* // Сиб. мат. журн.— 1993.— Т.34, N 4.— С.33–40.
3. Олейник О.А., Радкевич Е.В. *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделёфа для общих параболических систем дифференциальных уравнений* // Функциональный анализ и его прилож. —1974.— Т.8,вып.4.— С.59–70.
4. Ивасишен С.Д. *О параболических граничных задачах без начальных условий* // Укр. мат. журн. —1986.— Т. 34, N5.— С.547–552.
5. Шишков А.Е. *О существовании растущих на бесконечности обобщенных решений краевых задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений* // Укр. мат. журн.—1985.—Т.37, N4.— С.473–481.
6. Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 608 с.
7. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 408 с.

Стаття надійшла до редколегії 04.07.96