УДК 517.95

ЗАДАЧА ФУР'Є ЗІ ЗМІШАНОЮ ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ СИСТЕМ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

В. М. Сікорський

V. Sikorsky. The Fourier problem with a mixed boundary condition for the system of quasilinear parabolic equations in unbounded domains. This work is devoted to the problem of existence and uniqueness of a generalized solution in the space $W^{1,0}_{\mathrm{loc}}$ of the Fourier problem for the system of quasilinear parabolic equations in unbounded domains in the case when boundary conditions of different types are given on different parts of the boundary of a domain. The theorem like the principle of Sen-Venan has been proved for this problem. It characterizes the behaviour of solution on infinity. The classes of the uniqueness of solutions are found. These classes are to be functions of exponencial growth. The existence of generalized solution from the classes of uniqueness has been proved when the right side of the system is the function of exponencial growth at infinity.

Наша праця присвячена питанням існування і єдиності розв'язку задачі Фур'є зі змішаною граничною умовою для систем квазілінійних параболічних рівнянь. Задачу Фур'є (задачу без початкових умов) для параболічних рівнянь та систем досліджували в [1–6] та ін. Зазначимо, що в [4–6] виділені класи суттєво нелінійних параболічних рівнянь, для яких розв'язок задачі Фур'є єдиний без обмежень щодо його поведінки на нескінченності, а існування доводиться без припущень про поведінку вихідних даних на нескінченності. А.Є.Шишков у [8] використав метод, який грунтується на енергетичних оцінках розв'язків, що в певному сенсі є узагальненням відомого в теорії пружності принципу Сен–Венана для дослідження умов єдиності та існування узагальнених розв'язків із $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}$ першої крайової задачі для лінійних та близьких до них квазілінійних рівнянь параболічного типу. По суті для таких рівнянь в праці [7] встановлені класи єдиності узагальних розв'язків з $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}$ задачі Фур'є і доведено існування узагальнених розв'яків із цих класів. Праця [12] узагальнює результати М.М.Бокала для квазілінійних параболічних рівнянь у випадку, коли на різних частинах бічної поверхні області задані крайові умови різних типів. У цій праці, на відміну від [12], визначено класи існування та єдиності розв'язку у випадку систем квазілінійних параболічних рівнянь.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35K50; Secondary 35K60.

1. Формулювання задачі. Нехай $Q = \Omega \times (-\infty, T)$, де Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з кусково–гладкою границею $\partial\Omega$, $T < +\infty$. Нехай $\partial\Omega = \overline{\Gamma^{(1)}} \cup \overline{\Gamma^{(2)}}$, де $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ — відкриті (зокрема, порожні) множини на поверхні $\partial\Omega$, причому $\Gamma^{(1)} \cap \Gamma^{(2)} = \varnothing$. Приймемо $\Sigma^{(1)} = \Gamma^{(1)} \times (-\infty, T]$, $\Sigma^{(2)} = \Gamma^{(2)} \times (-\infty, T]$.

Розглянемо задачу

$$u_{it} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_{ij}(x,t,u,\nabla u) + a_{i0}(x,t,u,\nabla u) =$$
$$= f_{i0}(x,t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(x,t), \quad \text{в } (x,t) \in Q, \quad i = \overline{1,N}, \tag{1}$$

$$u_i = \psi_i^{(1)} \quad \text{на} \quad \Sigma^{(1)}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u,\nabla u)\nu_j + a_i u_i = \psi_i^{(2)} \quad \text{на} \quad \Sigma^{(2)}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{3}$$

де $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$. Тут і далі для вихідних даних передбачені такі умови:

1) функції $a_{ij}(x,t,s,\xi)$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n}$ — визначені для $(x,t) \in Q$, $s = (s_1, s_2, ..., s_N) \in \mathbb{R}^N$, $\xi = (\xi_{ij})_{i=\overline{1,N}, j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^{nN}$, каратеодорівські, тобто вимірні по (x,t) для будь-яких (s,ξ), неперервні по (s,ξ) для м.в. $(x,t) \in Q$.
2) функції $a_{ij}(x,t,s,\xi), i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n}$, задовольняють локально умову Ліпшиця по (s,ξ), тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ і довільних (s,ξ) справджується нерівність

$$|a_{ij}(x,t,s,\xi) - a_{ij}(x,t,\tau,\eta)| \leqslant k_{ij}^{(1)}(x,t) \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} |\xi_{lk} - \eta_{lk}| + k_{ij}^{(2)}(x,t) \sum_{l=1}^{N} |s_l - \tau_l|, \tag{4}$$

де $k_{ij}^{(l)} \in L^\infty_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $k_{ij}^{(l)} \geqslant 0$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$, $l = 1,2$, і, крім того, $a_{ij}(x,t,0,0) \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$;

3) $a_{i0}(x,t,s,\xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_{ij} + c_i(x,t,s,\xi)$, де $b_{ij}, (b_{ij})_{x_j} \in L^\infty_{\text{loc}}(\overline{Q})$, і для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(s,\xi), (\tau,\eta)$ з простору $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ справджується умова сильної параболічності

$$\sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(x,t,s,\xi) - a_{ij}(x,t,\tau,\eta))(\xi_{ij} - \eta_{ij}) + (c_i(x,t,s,\xi) - c_i(x,t,\tau,\eta))(s_i - \tau_i) \right\} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{N} \left\{ p_i(x,t) \sum_{j=1}^{n} |\xi_{ij} - \eta_{ij}|^2 + q_i(x,t)|s_i - \tau_i|^2 \right\}, \tag{5}$$

де $p_i, q_i \in L^\infty_{\text{loc}}(\overline{Q}), \inf\limits_{Q'} p_i > 0$ для будь-якої обмеженої підобласті Q' області Q та $\inf\limits_{Q'} (q_i - 2^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (b_{ij})_{x_j}) > -\infty$, $i = \overline{1,N}$;

4) $f_{ij} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\psi_i^{(1)} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Sigma^{(1)}})$, $\psi_i^{(2)} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Sigma^{(2)}})$, $a_i \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Sigma^{(2)})$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{0, n}$.

Під $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{G})(L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{G}))$, де G — необмежена вимірна множина, розуміємо простір функцій, вимірних і обмежених (інтегровних з квадратом) на обмежених вимірних підмножинах множини G, а під $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{D})$, де D — область в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, простір функцій $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{D})$, які мають узагальнені похідні $v_{x_i} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{D})$, $i = \overline{1, n}$. Через $W^{1,1}_{2,0}(D)$ позначимо замикання простору $C_0^\infty(D)$ в нормі $W_2^{1,1}(D)$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) назвемо вектор-функцію $u(x,t) = colon(u_1(x,t), ..., u_N(x,t))$, компоненти якої належать простору $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ і задовольняють умову (2) (в сенсі сліду) та інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_{Q'} \sum_{i=1}^{N} \left\{ - u_i \varphi_{it} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u,\nabla u)\varphi_{ix_j} + a_{i0}(x,t,u,\nabla u)\varphi_i \right\} dxdt-$$

$$- \int\limits_{\Sigma^{(2)} \cap \overline{Q}'} \sum_{i=1}^{N} a_i u_i \varphi_i \, ds = \iint\limits_{Q'} \sum_{i=1}^{N} \left\{ f_{i0}\varphi_i + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\varphi_{ix_j} \right\} dxdt + \int\limits_{\Sigma^{(2)} \cap \overline{Q}'} \sum_{i=1}^{N} \psi_i^{(2)} \varphi_i \, ds \qquad (6)$$

для довільної обмеженої підобласті Q' області Q і будь-яких $\varphi_i \in C^1(\overline{Q'}), i = \overline{1, N}$, які дорівнюють нулю на $\Sigma^{(1)} \cap \overline{Q}'$ і на $\partial Q' \cap Q$.

Дослідимо умови єдиності та існування узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

2. Позначення і додаткові припущення. Позначимо через $M \in \mathbb{N}$ — кількість рукавів у необмеженій області Ω. Нехай $\{\Omega_\tau\}$ — сім'я обмежених підобластей області Ω, які залежать від параметра $\tau = (\tau_1, ..., \tau_M), \tau \in \Pi = \{\tau | \tau_j \geqslant 0, j = \overline{1, M}\}$. Припустимо, що $\Omega_\tau \subset \Omega_{\tau'}$, якщо $\tau_j \leqslant \tau'_j, j = \overline{1, M}$, і $\Omega = \bigcup\limits_{\tau \in \Pi} \Omega_\tau$. Позначимо $\gamma_\tau = \partial\Omega_\tau \setminus \partial\Omega$ і припустимо, що $\gamma_\tau = \bigcup\limits_{l=1}^{M} \gamma_{\tau_l}$, де γ_{τ_l} є $(n-1)$–вимірною гіперповерхнею, яка має ту ж гладкість, що і $\partial\Omega$, і її межа належить $\partial\Omega$. Припустимо, що для будь-якого $\hat{\tau} \in \Pi$ з $\hat{\tau}_l > 0$, $l = \overline{1, M}$ в деякому околі $\gamma_{\hat{\tau}_l}$ можна ввести локальні координати y такі, що

$$y_j = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1, n}, \qquad (7)$$

де функції $\varphi_j(x)$ — неперервно-диференційовні, $dx = \varkappa_l(x)dy$, гіперплощина $y_n = \tau_l$ містить γ_{τ_l} при всіх τ_l із деякого околу $\hat{\tau}_l$. Легко бачити, що існують неперервні додатні на $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_0$ функції $h_l(x), l = \overline{1, M}$, такі, що для будь-якої неперервної на $\overline{\Omega}$ функції v справджується рівність

$$\frac{\partial}{\partial \tau_l} \int\limits_{\Omega_\tau} v(x)\, dx = \int\limits_{\gamma_{\tau_l}} v(x) h_l(x)\, ds, \quad \tau_l > 0. \qquad (8)$$

Позначимо $\partial\Omega = \overline{\Gamma^{(1)}} \cap \overline{\Gamma^{(2)}}$,

$$S_\tau^{(1)} = \Gamma^{(1)} \cap \partial\Omega_\tau,\ S_\tau^{(2)} = \Gamma^{(2)} \cap \partial\Omega_\tau,\ \partial\Omega_\tau = \overline{\Gamma_\tau^{(1)}} \cup \overline{\Gamma_\tau^{(2)}} \cup \gamma_\tau,\ Q_{\tau,t_0} = \Omega_\tau \times (t_0, T),$$

$$\Sigma_{\tau,t_0}^{(1)} = \overline{\Gamma_\tau^{(1)}} \times [t_0, T],\ \Sigma_{\tau,t_0}^{(2)} = \overline{\Gamma_\tau^{(2)}} \times [t_0, T],\ S_{\tau_l,t_0} = \overline{\gamma_{\tau_l}} \times [t_0, T],\ S_{\tau,t_0} = \bigcup_{l=1}^{M} S_{\tau_l,t_0},$$

де $\tau = (\tau_1, ..., \tau_M)$, $\tau_l \geqslant 0$, $l = \overline{1, M}$, $t_0 < T$.

Нехай

$$d_{1l}(\tau_l, t_0) = nN \sup_\tau \sup_{S_{\tau_l,t_0}} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} [k_{ij}^{(1)}(x,t)]^2 / [p_r(x,t) h_l(x)] \right)^{1/2},$$

$$d_{2l}(\tau_l, t_0) = nN \sup_{S_{\tau_l,t_0}} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} [k_{ij}^{(2)}(x,t)]^2 \right)^{1/2} - 2^{-1} \inf_i \inf_{S_{\tau_l,t_O}} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\nu_j,$$

де $\overrightarrow{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньоі нормалі до γ_{τ_l}, $\tau_l > 0$, $t_0 < T$, $l = \overline{1, M}$.

Візьмемо таке дійсне число μ, що $\{q_i - 2^{-1} \sum_{j=1}^{n} (b_{ij})_{x_j} + \mu\} \geqslant 0$ на Q, $i = \overline{1, N}$, якщо $\Gamma^{(1)} \neq \varnothing$ і $\{q_i - 2^{-1} \sum_{j=1}^{n} (b_{ij})_{x_j} + \mu\} > 0$ на Q, $i = \overline{1, N}$, якщо $\Gamma^{(1)} = \varnothing$, і приймемо

$$E_\mu(v) = \sum_{i=1}^{N} \left[p_i |\nabla v_i|^2 + (q_i - 2^{-1} \sum_{j=1}^{n} (b_{ij})_{x_j} + \mu) |v_i|^2 \right],$$

$$\lambda_l(\tau_l, t_0) = \inf_{t,v} \int\limits_{\gamma_{\tau_l}} E_\mu(v) h_l d\gamma \left(\int\limits_{\gamma_{\tau_l}} v^2 \, d\gamma \right)^{-1}, \quad \tau_l > 0,\ t_0 < T,$$

де нижня грань береться по всіх неперервно–диференційовних в околі γ_{τ_l} вектор–функціях $v = \mathrm{colon}(v_1, ..., v_N)$, компоненти яких дорівнюють нулю на $\partial\gamma_{\tau_l} \cap \Gamma^{(1)}$, і всіх $t \in [t_0, T]$;

$$\Theta(\tau, t_0) = \inf_v \int\limits_{\Omega_\tau} E_\mu(v)|_{t=t_0} \, dx \left(\int\limits_{\Omega_\tau} v^2 \, dx \right)^{-1},$$

де нижня грань береться по всіх вектор–функціях $v = \mathrm{colon}(v_1, ..., v_N)$, компоненти яких належать простору $C^1(\overline{\Omega_\tau})$ і дорівнюють нулю в околі $\Gamma_\tau^{(1)}$.

Додатково припустимо таке:

5) існують неперервні функції $A_0(\tau,t_0)>0$, $A_{\tau_l}(\tau_l,t_0)>0$, $l=\overline{1,M}$, $(\tau_l\geqslant 0,\ t_0\leqslant T)$ такі, що

$$d_{1l}(\tau_l,t_0)\lambda_l^{-1/2}(\tau_l,t_0)+d_{2l}(\tau_l,t_0)\lambda_l^{-1}(\tau_l,t_0)\leqslant A_l(\tau_l,t_0),\ l=\overline{1,M}; \tag{9}$$

$$2^{-1}\Theta^{-1}(\tau,t_0)\leqslant A_0(\tau,t_0),\quad \forall\tau>0,\ t_0<T, \tag{10}$$

і задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\tau_l}{d\alpha}=A_l(\tau_l,t_0),\ l=\overline{1,M},\quad \frac{dt_0}{d\alpha}=-A_0(\tau,t_0), \tag{11}$$

$$\tau_l(0)=0,\quad l=\overline{1,M},\quad t_0(0)=T \tag{12}$$

має єдиний розв'язок $\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha),...\tau_M(\alpha)$, $t_0(\alpha)$, визначений на $[0,\infty)$ і такий, що $\tau_l(\alpha)\to+\infty$, $l=\overline{1,M}$, $t_0(\alpha)\to-\infty$ при $\alpha\to\infty$. Далі під $\tau_1(\alpha),\dots,\tau_M(\alpha),t_0(\alpha)$ будемо завжди розуміти цей розв'язок.

Приймемо

$$Q_\alpha=Q_{\tau(\alpha),t_0(\alpha)},\quad \Sigma_\alpha^{(1)}=\Sigma^{(1)}_{\tau(\alpha),t_0(\alpha)},\quad \Sigma_\alpha^{(2)}=\Sigma^{(2)}_{\tau(\alpha),t_0(\alpha)},\quad S_\alpha=S_{\tau(\alpha),t_0(\alpha)}.$$

Введемо простір

$$\hat{W}_2^{1,0}(Q_\alpha)=\{v=\operatorname{colon}(v_1,...,v_N)\,|\,v_i\in W_2^{1,0}(Q_\alpha),\ v_i=0 \text{ на } \Sigma_\alpha^{(1)},\ i=\overline{1,N}\}$$

і норму в ньому

$$\langle v\rangle_\alpha=\left(\iint\limits_{Q_\alpha}E_\mu(v)\exp\{-2\mu t\}dxdt\right)^{1/2}.$$

На основі наших припущень, як випливає з [10], норма $\langle v\rangle_\alpha$ в просторі $\hat{W}_2^{1,0}(Q_\alpha)$ еквівалентна нормі

$$\|v\|_\alpha=\left(\iint\limits_{Q_\alpha}\sum_{i=1}^N[v_i^2+|\nabla v_i|^2]dxdt\right)^{1/2}.$$

Далі використаємо усереднення за Стєкловим і деякі властивості цих усереднень. Нагадаємо їх (див., наприклад, [10]). Нехай $v\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^1)$. Приймемо для кожного $h>0$ $v_h=\frac{1}{h}\int\limits_{t-h}^{t}v(\theta)\,d\theta$, $v_{\overline{h}}=\frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h}v(\theta)\,d\theta$. Легко перевірити справедливість рівностей

$$\int\limits_{a-h}^{b}v\varphi_{\overline{h}}\,dt=\int\limits_{a}^{b}v_h\varphi\,dt,\quad \int\limits_{a-h}^{b}v(\varphi_{\overline{h}})_t\,dt=-\int\limits_{a}^{b}(v_h)_t\varphi\,dt$$

для будь-яких $v(t),\varphi(t)\in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R})$, якщо $\varphi=0$ поза $[a,b]$. Крім того, $v_h\to v$ при $h\to0$ в $L^2(a,b)$, де $-\infty<a<b<+\infty, v\in L^2(a,b)$.

Перейдемо до формулювання і доведення основних результатів. Далі ми завжди будемо вважати, що виконуються умови 1)–4).

3. Енергетична оцінка і єдиність розв'язку. Спочатку доведемо оцінку різниці узагальнених розв'язків задачі (1)–(3).

Теорема 1. *Нехай $R^* > 0$ і $u(x,t), \tilde{u}(x,t)$ — вектор-функції з компонентами відповідно $u_i, \tilde{u}_i \in W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}$, які збігаються на $\Sigma^{(1)}_{R^*}$ та задовольняють інтегральну тотожність* (6) *за умови, що $Q' \subset Q_{R^*}$. Крім того, припустимо, що $\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\nu_j + a_i > 0$ на $\overline{\Sigma}^{(2)}_{R^*}$. Тоді для будь-яких R_1, R_2 таких, що $0 < R_1 < R_2 \leqslant R^*$, справедлива оцінка*

$$\langle u - \tilde{u}\rangle_{R_1} \leqslant \exp\{(R_1 - R_2)/2\}\langle u - \tilde{u}\rangle_{R_2}. \tag{13}$$

Доведення. Нехай R^*, R_1, R_2 — довільні числа, такі, що $0 < R_1 <. R_2 \leqslant R^*$. Тоді $\tau(R^*) > 0 \quad (l = \overline{1,R})$. Для будь-якого $\hat{\tau} \in \Pi$, такого, що $\tau_l(R_1) \leqslant \hat{\tau}_l \leqslant \tau_l(R^*)$ і $(x,t) \in \Omega_{\tau(R^*)}$ побудуємо зрізаючу функцію $0 \leqslant \psi_\delta(x,\hat{\tau}) \leqslant 1$, яка залежить від параметра δ, де $0 < 2\delta < \min\limits_l \tau_l(R_1)$, таку, що, якщо $x \in \overline{\gamma}_{\tau_l}$ при $\tau_l \geqslant \hat{\tau}_l$, то $\psi_\delta(x,\hat{\tau}) = 0$; якщо ж $x \in \overline{\gamma}_{\tau_l}$ при $\tau_l \leqslant \hat{\tau}_l - 2\delta$, то $\psi_\delta(x,\hat{\tau}) = 1$. На основі припущень щодо функцій φ_j, які визначають перетворення координат (6), $\psi_\delta(x,\hat{\tau})$ є неперервно диференційовною функцією змінної x в $\Omega_{\tau(R^*)}$ і параметрів $\hat{\tau}_l$ при $\tau_l(R_1) \leqslant \hat{\tau}_l \leqslant \tau_l(R^*)$ $(l = \overline{1,M})$.

Нехай $\{u^{(m)}\}$, $\{w^{(m)}\}$ – послідовності функцій, компоненти яких належать $C^2(\overline{Q_{R^*}})$, збігаються до відповідних компонент u та $w = u - \tilde{u}$ в нормі $W^{1,0}_2(Q_{R^*})$, причому $w^{(m)} = 0$ на $\Sigma^{(1)}_{R^*}$. Приймемо $\tilde{u}^{(m)} = u^{(m)} - w^{(m)}, m \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $\{\tilde{u}^{(m)}\}$ збігається до $\tilde{u}$ в нормі $W^{1,0}_2(Q_{R^*})$. Віднімемо із інтегральної тотожності (6), записаної для u, цю ж тотожність, але записану для $\tilde{u}$. Візьмемо довільні τ, t_0, $0 < \tau_l < \tau_l(R^*)$, $l = \overline{1,M}$, $t_0(R^*) < t_0 < T$ і в отриманій після віднімання інтегральній тотожності (14) покладемо $Q' = Q_{\tau,t_0}$, $\varphi_i = (\hat{w}^{(m)}_{ih}\psi_\delta \exp\{-2\mu t\})_{\overline{h}}$, де $i = \overline{1,N}$, $0 < h < t_0 - t_0(R^*)$, $\hat{w}^{(m)}_{ih} = w^{(m)}_{ih}$ на Q_{τ,t_0} і $\hat{w}^{(m)}_{ih} = 0$ ззовні Q_{τ,t_0}, $\delta > 0$ — довільне число з проміжку $(0; \frac{1}{2}\min\limits_l \tau_l(R_1))$. Тоді, враховуючи властивості усереднень, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}} \sum_{i=1}^{N} \Bigg[w_{iht} w^{(m)}_{ih} \psi_\delta + \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(u) - a_{ij}(\tilde{u}))_h w^{(m)}_{ihx_j} \psi_\delta +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(u) - a_{ij}(\tilde{u}))_h w^{(m)}_{ih} \psi_{\delta x_j} + + (a_{i0}(u) - a_{i0}(\tilde{u}))_h w^{(m)}_{ih} \psi_\delta \Bigg] \exp\{-2\mu t\}\, dxdt + \tag{14}$$

$$+ \int\limits_{\Sigma^{(2)} \cap \overline{Q}_{\tau,t_0}} \sum_{i=1}^{N} a w_{ih} w^{(m)}_{ih} \psi_\delta \exp\{-2\mu t\}\, ds = 0.$$

Тут і далі приймаємо $a_{ij}(u) = a_{ij}(x,t,u,\nabla u)$, $a_{ij}(\tilde{u}) = a_{ij}(x,t,\tilde{u},\nabla\tilde{u})$, $j = \overline{0,n}$, $i = \overline{1,N}$. Перепишемо рівність (14), враховуючи зображення $a_{i0}(u)$ та $a_{i0}(\tilde{u})$ (див. [2]), таким чином:

$$\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}} \sum_{i=1}^{N} \Bigg[w^{(m)}_{iht} w^{(m)}_{ih} + \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(u^{(m)}_h) - a_{ij}(\tilde{u}^{(m)}_h)) w^{(m)}_{ihx_j} +$$

$$+(c_i(u_h^{(m)} - c_i(\tilde{u}_h^{(m)}))w_{ih}^{(m)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} w_{ihx_j}^{(m)} w_{ih}^{(m)}\Big]\exp\{-2\mu t\}\,dtdx+ \tag{15}$$

$$+\int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{Q}_{\tau,t_0}} \sum_{i=1}^{N} a_i[w_{ih}^{(m)}]^2\exp\{-2\mu t\}\,ds = \varepsilon_{mh\delta}(\tau,t_0) + G_{mh\delta}(\tau,t_0),$$

де

$$G_{mh\delta}(\tau,t_0) = -\iint\limits_{Q_{(\tau,t_0)}} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(a_{ijh}(u) - a_{ijh}(\tilde{u}))w_{ih}^{(m)}\psi_{\delta x_j}\exp\{-2\mu t\}\,dtdx,$$

а під $\varepsilon_{mh\delta}(\tau,t_0)$ розуміємо суму всіх інших членів, перенесених у праву частину рівності.

Перетворимо $G_{mh\delta}$ таким чином. Довизначимо функції $a_{ij}(u_h^{(m)})$ та $a_{ij}(\tilde{u}_h^{(m)})$ нулем ззовні Q_R^* і приймемо

$$a_{ij\rho}(u_h^{(m)}(x,t)) = \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} a_{ij}(u_h^{(m)}(y,\theta))\omega_\rho(x-y,t-\theta)\,dyd\theta,$$

$$a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}(x,t)) = \iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} a_{ij}(\tilde{u}_h^{(m)}(y,\theta))\omega_\rho(x-y,t-\theta)\,dyd\theta,$$

де $j=\overline{0,n}$, $i=\overline{1,N}$, ω_ρ — ядра усереднень [9]. Тоді

$$G_{mh\delta}(\tau,t_0) =$$

$$\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}[(a_{ij\rho}(u_h^{(m)}) - a_{ijh}(u)) - (a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}) - a_{ijh}(\tilde{u}))]w_{ih}^{(m)}\psi_{\delta x_j}\exp\{-2\mu t\}\,dtdx+$$

$$+\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}\setminus Q_{\tau-2\delta,t_0}} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left[(a_{ij\rho}(u_h^{(m)}) - a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}))w_{ih}^{(m)}\right]_{x_j}\psi_\delta\exp\{-2\mu t\}\,dtdx-$$

$$-\int\limits_{S_{\tau-2\delta,t_0}} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij\rho}(u_h^{(m)}) - a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}))w_{ih}^{(m)}\nu_j\exp\{-2\mu t\}\,ds+$$

$$+\int\limits_{S_{\tau,t_0}} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij\rho}(u_h^{(m)}) - a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}))w_{ih}^{(m)}\nu_j\exp\{-2\mu t\}\,ds-$$

$$-\int\limits_{S_{\tau,t_0}} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij\rho}(u_h^{(m)}) - a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}))w_{ih}^{(m)}\nu_j\exp\{-2\mu t\}\,ds.$$

Тепер перетворимо ліву частину (15), інтегруючи частинами та використовуючи нерівність (5). Отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{N}(w_{ih}^{(m)})^2|_{t=T}\exp\{-2\mu T\}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{N}(w_{ih}^{(m)})^2|_{t=t_0}\exp\{-2\mu t_0\}\,dx+$$

$$\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}} E_\mu(w_h^{(m)})\exp\{-2\mu t\}\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{S_{\tau,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\nu_j(w_{ih}^{(m)})^2\exp\{-2\mu t\}\,ds+$$

$$+\int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{Q}_{\tau,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}[\frac{1}{2}b_{ij}\nu_j + a_i](w_{ih}^{(m)})^2\exp\{-2\mu t\}\,ds = \tag{16}$$

$$= -\int\limits_{S_{\tau,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij\rho}(u_h^{(m)}) - a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}))\nu_j w_{ih}^{(m)}\exp\{-2\mu t\}\,ds + \varepsilon_{mh\delta}(\tau,t_0) + G^*_{mh\rho\,\delta}(\tau,t_0),$$

де $G^*_{mh\rho\,\delta}(\tau,t_0)$ — сума всіх членів правої частини (15) за винятком останнього. Отже, із (16), використовуючи введені вище позначення та нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$\begin{aligned}\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}} E_\mu(w_h^{(m)})\exp\{-2\mu t\}\,dxdt &\leqslant \sum_{l=1}^{R}[d_{1l}(\tau_l,t_0)\lambda_l^{-1/2}(\tau_l,t_0)+\\ &+d_{2l}(\tau_l,t_0)\lambda_l^{-1}(\tau_l,t_0)]\int\limits_{S_{\tau,t_0}} E_\mu(w_h^{(m)})h_l\exp\{-2\mu t\}\,ds+\\ &+\frac{1}{2}\Theta^{-1}(\tau,t_0)\int\limits_{\Omega_\tau} E_\mu(w_h^{(m)})|_{t=t_0}\exp\{-2\mu t_0\}\,dx+\\ &+\varepsilon_{mh\delta}(\tau,t_0) + G^*_{mh\rho\,\delta}(\tau,t_0) + L_{mh\rho}(\tau,t_0),\end{aligned} \tag{17}$$

де

$$L_{mh\rho} = \int\limits_{S_{\tau,t_0}} b_{h\rho}^{(m)}(x,t)\,ds, \quad b_{h\rho}^{(m)}(x,t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}|(k_{ij}^{(1)}|\nabla w_{ih}^{(m)}|+$$

$$+k_{ij}^{(2)}|w_{ih}^{(m)}|)_\rho - (k_{ij}^{(1)}|\nabla w_{ih}^{(m)}| + k_{ij}^{(2)}|w_{ih}^{(m)}|)||w_{ih}^{(m)}||\nu_j|\exp\{-2\mu t\}$$

Приймемо $F_h^{(m)}(\tau,t_0) = \iint\limits_{Q_{\tau,t_0}} E_\mu(w_h^{(m)})\exp\{-2\mu t\}\,dxdt$. Тоді з (7)–(11) і (17) отримаємо

$$F_{mh}(\tau,t_0) \leqslant \frac{\partial F_h^{(m)}}{\partial\tau_l}\frac{d\tau_l}{d\alpha} + \frac{\partial F_h^{(m)}}{\partial\tau_0}\frac{d\tau_0}{d\alpha} + \varepsilon_{mh\delta}(\tau,t_0) + G^*_{mh\rho\,\delta}(\tau,t_0) + L_{mh\rho}(\tau,t_0),$$

звідки

$$0 \leqslant -F_h^{(m)} + \frac{dF_h^{(m)}}{d\alpha} + \varepsilon_{mh\delta} + G^*_{mh\rho\,\delta} + L_{mh\rho\,\delta}. \tag{18}$$

Помножимо (18) на $\exp\{-\alpha\}$ і проінтегруємо отриману нерівність по α від R_1 до R_2

$$F_h^{(m)}(\tau(R_1), t_0(R_1)) \leqslant \exp\{R_1 - R_2\} F_h^{(m)}(\tau(R_2), t_0(R_2)) +$$
$$+\exp\{R_1\}\int_{R_1}^{R_2} [\varepsilon_{mh\delta} + G^*_{mh\rho\,\delta} + L_{mh\rho\,\delta}]\exp\{-\alpha\}\,d\alpha. \tag{19}$$

Аналогічно як у [2] і [7], можна показати, що інтеграли $\int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_{mh\delta}\exp\{-\alpha\}\,d\alpha$ і $\int_{R_1}^{R_2} G^*_{mh\rho\,\delta}\exp\{-\alpha\}\,d\alpha$ як завгодно малі, якщо $h > 0$ – достатньо мале, $m(h) \in \mathbb{N}$ – достатньо велике, $\rho\,(h, m) > 0$ – достатньо мале і $\delta(m, h, \rho\,)$ – достатньо мале. Це ж правильно і для інтеграла $\int_{R_1}^{R_2} L_{mh\rho}\exp\{-\alpha\}\,d\alpha$. Враховуючи сказане, із (19) отримаємо оцінку (13). Теорему 1 доведено.

Із доведеної теореми випливає теорема про єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Теорема 2. *У класі функцій u з $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}$, які задовольняють умову*

$$\iint_{Q_R} E_\mu(u)\exp\{-2\mu t\}\,dxdt = o(1)\exp\{R\} \quad \text{при} \quad R \to \infty, \tag{20}$$

узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) єдиний.

Доведення. Нехай $u, \tilde{u}$ – два узагальнені розв'язки задачі (1)–(3), які задовольняють умову (20). Тоді $\langle u - \tilde{u}\rangle_R = o(1)\exp\{R/2\}$ при $R \to \infty$. Звідси і з оцінки (13) маємо для довільних R_1 і R_2, $R_1 < R_2$, оцінку

$$\langle u - \tilde{u}\rangle_{R_1} = \beta(R_2),$$

де $\beta(R_2) \to 0$ при $R_2 \to \infty$. Фіксуючи R_1 і спрямувавши R_2 до ∞, отримаємо $\langle u - \tilde{u}\rangle_{R_1} = 0$, тобто $u = \tilde{u}$ майже всюди на Q_{R_1}. На основі довільності R_1 $u = \tilde{u}$ майже всюди на Q. Теорему 2 доведено.

4. Існування розв'язку. Доведемо існування узагальненого розв'язку задачі (1)–(3) із вказаного в теоремі 2 класу єдиності, припустивши, що умови (2), (3) однорідні, тобто мають вигляд

$$u_i = 0 \text{ на } \Sigma^{(1)},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u,\nabla u)\nu_j + a_i u_i = 0 \text{ на } \Sigma^{(2)},\ i = \overline{1,N} \tag{21}$$

і права частина системи (1) задовольняє певні умови щодо поведінки на нескінченності.

Спочатку введемо деякі потрібні нам позначення. Нехай $\tau_1(\alpha), ..., \tau_M(\alpha)$, $t_0(\alpha)$ – розв'язок системи (8), який задовольняє названі вище умови, і для довільного $k \in \mathbb{N}$, $t_k = t_0(k)$, $\Omega^k = \Omega_{\tau(k)}$, $Q_k = \Omega^k \times (t_k, T)$, $\Sigma_k = \partial\Omega^k \times [t_k, T]$. Приймемо

$$\Lambda_k = \inf_{t,v} \left\{ \left[\int_{\Omega^k} E_\mu(v)\,dx \right] \left[\int_{\Omega^k} v^2\,dx \right]^{-1} \right\},$$

де нижня грань береться по всіх функціях $v = \text{colon}(v_1, ..., v_N)$, компоненти яких належать простору $C^1(\overline{\Omega^k})$, і які дорівнюють нулю на $\partial\Omega^k \cap \Gamma^{(1)}$ та всіх $t \in [t_k, T]$;

$$p_k = \inf_{Q_k} p(x,t) > 0.$$

Теорема 3. *Нехай існують числа $c > 0$ і $\varepsilon > 0$ такі, що для довільних $k \in \mathbb{N}$*

$$\Lambda_k^{-1} \iint_{Q_k} \sum_{i=1}^{N} [f_{i0}(x,t) - a_{i0}(x,t,0,0)]^2 \exp\{-2\mu t\}\,dxdt + \tag{22}$$

$$+ p_k^{-1} \iint_{Q_k} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} [f_{ij}(x,t) - a_{ij}(x,t,0,0)]^2 \exp\{-2\mu t\}\,dxdt \leqslant C \cdot \exp\{(1-\varepsilon)k\}.$$

Крім того, припустимо, що $\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\nu_i + a_i \geqslant 0$ *на* $\Sigma_k^{(2)}$, $i = \overline{1,N}$.

Тоді існує узагальнений розв'язок u задачі $(1) - (21)$, який належить класу єдиності, зазначеному в теоремі 2. Крім того, цей розв'язок справджує оцінку

$$< u >_k \leqslant C_0 \exp\{(1-\varepsilon)k/2\}, \tag{23}$$

де $C_0 > 0$ – стала, яка залежить тільки від C і ε.

Доведення. Розглянемо для кожного $k \in \mathbb{N}$ змішану задачу

$$u_{it}^{(k)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_{ij}(x,t,u^{(k)},\nabla u^{(k)}) + a_{i0}(x,t,u^{(k)},\nabla u^{(k)}) =$$

$$= f_{i0}(x,t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(x,t) \text{ в } Q_k, \quad i = \overline{1,N}, \tag{1_k}$$

$$u_i^{(k)} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_k^{(1)}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{2_k}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u^{(k)},\nabla u^{(k)}) + a_i u_i^{(k)} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_k^{(2)}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{3_k}$$

Узагальненим розв'язком задачі $(1_k)-(3_k)$ назвемо функцію $u^{(k)} = \mathrm{colon}(u_1^{(k)},...,u_N^{(k)})$, компоненти якої належать простору $\overset{o}{W}{}_2^{1,0}(\overline{Q}_k)$, яка задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint\limits_{Q_k} \sum_{i=1}^{N} \{-u_i^{(k)}\varphi_t + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u^{(k)},\nabla u^{(k)})\varphi_{ix_j} + a_{i0}(x,t,u^{(k)},\nabla u^{(k)})\varphi_i\} dxdt+$$

$$+\int\limits_{\Sigma_k^{(2)}} \sum_{i=1}^{N} a_i u_i^{(k)} \varphi_i \, ds = \iint\limits_{Q_k} \sum_{i=1}^{N} \{f_{i0}\varphi_i + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\varphi_{ix_j}\} \, dxdt \tag{4_k}$$

для довільних $\varphi_i \in W_{2,0}^{1,1}(Q_k)$, які дорівнюють нулю на $\Sigma_k^{(1)} \bigcup (\partial Q_k \cap Q)$, та $\varphi_i(x,T) = 0$, $i = \overline{1,N}$.

На підставі припущень з [8] випливає існування узагальненого розв'язку задачі $(1_k)-(3_k)$. Доозначимо $u^{(k)}$ нулем поза Q_k і одержані функції позначимо знову через $u^{(k)}$. Аналогічно як у [7] доводять, що отримана послідовність $\{u^{(k)}\}$ збігається в нормі $\langle\cdot\rangle_m$ для кожного $m \in \mathbb{N}$ до деякої функції u, компоненти якої належать простору $W_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(\overline{Q})$, і ця функція є узагальненим розв'язком задачі (1),(21). Причому для $\langle u^{(k)}\rangle_k$ отримують таку оцінку:

$$\langle u^{(k)}\rangle_k \leqslant \sqrt{2C}\exp\{(1-\varepsilon)k/2\}. \tag{24}$$

Використовуючи (24) та результати теореми 1, після нескладних перетворень [7], отримаємо оцінку (23). Теорему 3 доведено.

1. Тихонов А.Н. *Теорема единственности для уравнения теплопроводности* // Матем. сб.—1935.— N 2.— С.199–196.
2. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений* // Успехи мат. наук.— 1976.— Т.31, N 6.— С.142–166.
3. Ивасишен С.Д. *О параболических граничных задачах без начальных условий* // Укр. мат. журн.— 1982.— Т.34, N 5.— С.547–552.

4. Бокало Н.М. *О задаче Фурье для квазилинейных параболических уравнений* // Успехи мат. наук.— 1984.— Т.39, N 4.— С.128–129.

5. Бокало Н.М. *О единственности решения задачи без начальных условий для нелинейных параболических уравнений* // Успехи мат. наук.— 1986.—Т.41, N 5.— С.199–200.

6. Бокало Н.М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // В кн.: Труды семинара им. И.Г.Петровского.— 1989. – Вып. 14 . — С.3–32.

7. Бокало Н.М. *Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений* // Дифференц. уравн.— 1994.— Т.30, N8.— С.1395–1402.

8. Шишков А.Е. *О существовании растущих на бесконечности обобщенных решений краевых задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений* // Укр. мат. журн.— 1986.— Т.37, N 4.— С.473–481.

9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.—736 с.

10. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.— 421 с.

11. Х.Гаевский, К.Грегер, К.Захариас. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978.— 321 с.

12. Сікорський В.М. *Задача Фур'є зі змішаною граничною умовою для квазілінійних параболічних рівнянь в необмежених областях* // Львів.—1995.— Деп. в ДНТБ України 16.08.95, N1957.– Ук95.

Стаття надійшла до редколегії 23.06.96