ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, серія механіко–математична Вип.45, 1996

УДК 519.95

ПРЯМІ Й ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В МОДЕЛЯХ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ В КАПІЛЯРНО–ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

В. А. Козицький

V. A. Kozitskiy. Direct and inverse problems for the pseudoparabolic equation in models of the filtering of water in capillar-porous media.

With the help of the exact solution of a characteristic problem for a pseudoparabolic equation the unique solvability of local and non-local problems for this equation is proved. Sufficient conditions of the unique solvability for non-local problems are obtained in terms of the coefficients of boundary conditions. Inverse boundary problems of the determination of the source depending of t or x in the pseudoparabolic equation are considered. The global existence and uniqueness theorems of a solution are proved.

Фільтрацію рідини в середовищах з подвійною пористістю [1], динаміку вологопереносу в грунтах [2] описує рівняння вигляду

$$Lu \equiv u_{xxt} - k(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + c(x,t)u_{xt} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = F(x,t). \quad (1)$$

Крайові задачі для рівняння (1) вивчали D.Colton [3], В.А.Водохова [4], J.Cannon,Y.Lin [5], M.Majchrowski [6], М.Шхануков [7, 8] та ін. Праці [3,5–8] найбільш наближені до питань, які ми досліджували, а в їхній основі лежить аналог методу функції Рімана. За допомогою цього методу отримані умови існування та єдиності класичного розв'язку локальних і нелокальних крайових задач для рівняння (1), де

$$k_t, \eta_x, a_x, b, F \in C(\bar{Q}_T), c \equiv 0, \quad \bar{Q}_T = \{(x,t) : x \in [0,H], t \in [0,T]\}.$$

У праці [5] шляхом зведення до інтегро–диференціального рівняння доведено існування та єдиність класичного розв'язку характеристичної задачі для (1) у випадку неперервних коефіцієнтів.

У теорії фільтрації виникають також обернені задачі, наприклад, під час визначення фільтраційних параметрів грунтів за деякою інформацією про розв'язок відповідних прямих задач. Обернені задачі для рівняння (1) досліджували Б.С.Аблабеков

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35K70; Secondary 35R30.

[9], О.Мамаюсупов [10], M.Majchrowski [11]. У працях [9,10] досліджено обернену задачу відшукання вільного члена, залежного від t або x, а також задачу визначення коефіцієнта, залежного від часу, при невідомій функції для рівняння (1), якщо

$$Lu \equiv \beta(x,t)u_t - (k(x,t)(u_{xt} + u_x))_x + g(t)u\,,$$

і умовою перевизначення є значення розв'язку прямої задачі у фіксованій точці x_0 або в момент часу $t = T$.

У [11] досліджена обернена задача визначення вільного члена $F(x,t) = f(t)$ в рівнянні (1), де $k(x,t) = k(t)$, $\eta(x,t) = \eta = \text{const}$, $b(x,t) = b = const$, $c(x,t) = a(x,t) \equiv 0$ з умовою перевизначення $\int_0^l u(x,t)\,dx = h(t)$, $t \in [0,T]$, а також задача відшукання вільного члена, залежного від x, якщо $k(x,t) = k(x)$, $\eta(x,t) = \eta = \text{const}$, $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c \equiv 0$ з умовою перевизначення $\int_0^T u(x,t)\,dt = h(x)$, $x \in [0,l]$. У працях [9–11] вивчали умови існування та єдиності класичного розв'язку.

У цій статті запропоновано інший метод дослідження локальних та нелокальних крайових задач з інтегральним членом $\alpha(t)\int_0^H u(x,t)\,dx$, а також досліджено обернену задачу відшукання залежного від t або x вільного члена рівняння (1) у випадку загальних умов перевизначення.

1. Характеристична задача. В області Q_T для рівняння (1) розглянемо характеристичну задачу

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in [0,H], \tag{2}$$
$$u(0,t) = \mu(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$
$$u_x(0,t) = \nu(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Зробимо таке припущення.

Припущення(A). $k_t, c_t, \eta, a, b, F \in C(\bar{Q}_T)$; $\mu, \nu \in C^1[0,T]$; $u_0 \in C^2[0,H]$; $k(x,t) \geqslant k_0 > 0$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$; $u_0(0) = \mu(0)$, $u_0'(0) = \nu(0)$.

Означення. *Функція $u(x,t)$ називається класичним розв'язком задачі (1)–(4), якщо $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ і вона справджує умови (1)–(4).*

Якщо виконується припущення (A), то задача (1)–(4) має єдиний класичний розв'язок [5].

Нехай $u(x,t)$ — класичний розв'язок задачі (1)–(4). Будемо шукати його у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^x \int_0^t [(x-\xi)\omega_1(t,\xi,\tau) + \omega_2(x,\xi,\tau) - (x-\xi)]v(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi + \\ + u_0(x) + \mu(t) - u_0(0) + x(\nu(t) - u_0'(0)), \tag{5}$$

де функція $\omega_1(t,\xi,\tau)$ є розв'язком задачі Коші

$$\omega_{1t}(t,\xi,\tau) + \eta(\xi,t)\omega_1(t,\xi,\tau) = 0,\ \omega_1(\tau,\xi,\tau) = 1,$$

а $\omega_2(x,\xi,\tau)$ — розв'язок задачі Коші

$$\omega_{2xx}(x,\xi,\tau)+c(x,\tau)\omega_{2x}(x,\xi,\tau)-k(x,\tau)\omega_2(x,\xi,\tau)=0, \quad \omega_2(\xi,\xi,\tau)=0, \omega_{2x}(\xi,\xi,\tau)=1.$$

Відшукавши похідні $u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}, u_{xxt}$ і підставивши їх в (1), одержимо рівняння для функції $v(x,t)$:

$$v(x,t)=\int_0^x\int_0^t A(x,t,\xi,\tau)v(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi+F(x,t)+g_1(x,t)+k(x,t)\mu'(t)- \\ -b(x,t)\mu(t)-(a(x,t)+xb(x,t))\nu(t)+(xk(x,t)-c(x,t))\nu'(t), \tag{6}$$

де

$$A(x,t,\xi,\tau)=-[-k(x,t)(x-\xi)\omega_{1t}(t,\xi,\tau)+\eta(x,t)\omega_{2xx}(x,\xi,\tau)+c(x,t)\omega_{1t}(t,\xi,\tau)+ \\ +a(x,t)(\omega_1(t,\xi,\tau)+\omega_{2x}(x,\xi,\tau)-1)+b(x,t)((x-\xi)\omega_1(t,\xi,\tau)+\omega_2(x,\xi,\tau)-(x-\xi)];$$
$$g_1(x,t)=-a(x,t)(u_0'(x)-u_0'(0))-\eta(x,t)u_0''(x)-b(x,t)g(x);$$
$$g(x)=u_0(x)-u_0(0)-xu_0'(0).$$

Рівняння (6) є рівнянням Вольтера другого роду стосовно $v(x,t)$ з неперервним ядром та вільним членом, а отже, має єдиний розв'язок у $C(\bar{Q}_T)$. Записавши розв'язок рівняння (6) через резольвенту і підставивши його в (5), отримаємо зображення розв'язку характеристичної задачі (1)–(4):

$$u(x,t)=\chi(x,t)\mu(t)+\lambda(x,t)\nu(t)+\int_0^t k_1(x,t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau+\int_0^t k_2(x,t,\tau)\nu(\tau)\,d\tau+g_2(x,t), \tag{7}$$

де

$$k_i(x,t,\tau)=\int_0^x\Bigg[p(x,t,\xi,\tau)P_i(\xi,\tau)-\frac{\partial\,[p(x,t,\xi,\tau)q_i(\xi,\tau)]}{\partial\tau}- \\ -\int_0^\xi\int_\tau^t p(x,t,\xi,t_1)R_i(\xi,t_1,s,\tau)\,dt_1\,ds\Bigg]\,d\xi,\ i=1,2;$$
$$q_1=k(\xi,\tau),\ q_2=\xi k(\xi,\tau)-c(\xi,\tau); \tag{8}$$
$$R_i(\xi,t_1,s,\tau)=R(\xi,t_1,s,\tau)z_i(s,\tau)+\frac{\partial\,[R(\xi,t_1,s,\tau)q_i(s,\tau)]}{\partial\tau},\ i=1,2;$$
$$z_1=b(s,\tau),\ z_2=a(s,\tau)+sb(s,\tau);$$
$$R(x,t,\xi,\tau)=\sum_{n=2}^{\infty}\int_\xi^x\int_\tau^t A_1(x,t,\alpha,\beta)A_{n-1}(\alpha,\beta,\xi,\tau)\,d\beta\,d\alpha+ \\ +A_1(x,t,\xi,\tau),\ A_1\equiv A(x,t,\xi,\tau);$$

$$P_i(\xi,\tau) = -z_i(\xi,\tau) + \int_0^\xi A(\xi,\tau,s,\tau)q_i(s,\tau)\,ds,\ i=1,2;$$
$$p(x,t,\xi,\tau) = (x-\xi)\omega_1(t,\xi,\tau) + \omega_2(x,\xi,\tau) - (x-\xi);$$
$$g_2(x,t) = \int_0^x\int_0^t \left[p(x,t,\xi,\tau) + \int_\xi^x\int_\tau^t R(s,t_1,\xi,\tau)p(x,t,s,t_1)\,dt_1\,ds\right]\times$$
$$\times\left[F(\xi,\tau)+g_1(\xi,\tau)\right]d\tau\,d\xi -$$
$$-\int_0^x\left[p(x,t,\xi,0) + \int_0^t\int_\xi^x R(s,\tau,\xi,0)p(x,t,s,\tau)\,ds\,d\tau\right]\times$$
$$\times\left[u_0(0)q_1(\xi,0) + u_0'(0)q_2(\xi,0)\right]d\xi + g(x);$$
$$\chi(x,t) = 1 + \int_0^x \omega_2(x,\xi,t)k(\xi,t)\,d\xi;\quad \lambda(x,t) = x + \int_0^x \omega_2(x,\xi,t)(\xi k(\xi,t) - c(\xi,t))\,d\xi.$$

Безпосередньою перевіркою можна показати, що функції $\chi(x,t)$ і $\lambda(x,t)$ відповідно є розв'язками задач Коші:

$$\chi_{xx}(x,t) + c(x,t)\chi_x - k(x,t)\chi(x,t) = 0,\quad \chi(0,t)=1,\ \chi_x(0,t)=0; \tag{9}$$
$$\lambda_{xx}(x,t) + c(x,t)\lambda_x - k(x,t)\lambda(x,t) = 0\quad \lambda(0,t)=0,\ \lambda_x(0,t)=1. \tag{10}$$

Тому справедлива лема.

Лема 1. *Нехай виконується припущення (A). Тоді розв'язок $u(x,t)$ характеристичної задачі (1)–(4) допускає зображення (7),(8).*

2. Нелокальні крайові задачі. В області Q_T для рівняння (1), коефіцієнти і вільний член якого задовольняють припущення **(A)**, розглянемо нелокальну крайову задачу

$$\begin{gathered}\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(H,t) + \alpha_3(t)u_x(0,t) + \alpha_4(t)\int_0^H u(x,t)\,dx = \varphi_1(t),\\ \beta_1(t)u(H,t) + \beta_2(t)u_x(0,t) + \beta_3(t)u_x(H,t) + \beta_4(t)\int_0^H u(x,t)\,dx = \varphi_2(t),\ t\in[0,T],\end{gathered} \tag{11}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\quad x\in[0,H]. \tag{12}$$

Зробимо таке припущення.

Припущення (B). *Нехай $\alpha_i,\beta_i \in C^1[0,T]$, $i=\overline{1,4}$; $\varphi_i\in C^1[0,T], i=1,2$; ранг матриці*

$$G = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \alpha_4\\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{pmatrix}$$

дорівнює двом, а також виконуються умови узгодженості

$$\alpha_1(0)u_0(0) + \alpha_2(0)u_0(H) + \alpha_3(0)u_0'(H) + \alpha_4(0)\int_0^H u_0(x)\,dx = \varphi_1(0),$$

$$\beta_1(0)u_0(H) + \beta_2(0)u_0'(0) + \beta_3 u_0'(H) + \beta_4(0)\int_0^H u_0(x)\,dx = \varphi_2(0).$$

Позначимо через Δ_{ij} визначники, складені з відповідних стовпців матриці G.

Для дослідження задачі (1),(11),(12) використаємо зображення (7),(8) розв'язку характеристичної задачі (1)–(4). Підставляючи (7) в (11), одержимо систему інтегральних рівнянь Вольтера стосовно μ і ν:

$$D(t)\begin{pmatrix}\mu(t)\\ \nu(t)\end{pmatrix} = \int_0^t K(t,\tau)\begin{pmatrix}\mu(\tau)\\ \nu(\tau)\end{pmatrix}d\tau + \Psi(t), \tag{13}$$

де

$$D(t) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c}\alpha_1(t)+\alpha_2(t)\chi(H,t)+\\ +\alpha_4(t)\int_0^H \chi(x,t)\,dx\end{array} & \begin{array}{c}\alpha_2(t)\lambda(H,t)+\alpha_3(t)+\\ +\alpha_4(t)\int_0^H \lambda(x,t)\,dx\end{array} \\ \\ \begin{array}{l}\beta_1(t)\chi(H,t)+\beta_3(t)\chi_x(H,t)+\\ +\beta_4(t)\int_0^H \chi(x,t)\,dx\end{array} & \begin{array}{c}\beta_1(t)\lambda(H,t)+\beta_2(t)+\\ +\beta_3(t)\lambda_x(H,t)+\\ +\beta_4(t)\int_0^H \lambda(x,t)\,dx\end{array} \end{pmatrix},$$

$$K(t,\tau) = -\begin{pmatrix} \begin{array}{l}\alpha_2(t)k_1(H,t,\tau)+\\ +\alpha_4(t)\int_0^H k_1(x,t,\tau)\,dx\end{array} & \begin{array}{l}\alpha_2(t)k_2(H,t,\tau)+\\ +\alpha_4(t)\int_0^H k_2(x,t,\tau)\,dx\end{array} \\ \\ \begin{array}{l}\beta_1(t)k_1(H,t,\tau)+\\ +\beta_3(t)k_{1x}(H,t,\tau)+\\ +\beta_4(t)\int_0^H k_1(x,t,\tau)\,dx\end{array} & \begin{array}{l}\beta_2(t)k_2(H,t,\tau)+\\ +\beta_3(t)k_{2x}(H,t,\tau)+\\ +\beta_4(t)\int_0^H k_2(x,t,\tau)\,dx\end{array} \end{pmatrix},$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t)-\alpha_2(t)g_2(H,t)-\alpha_4(t)\int_0^H g_2(x,t)\,dx \\ \varphi_2(t)-\beta_1(t)g_2(H,t)-\beta_3(t)g_{2x}(H,t)-\beta_4(t)\int_0^H g_2(x,t)\,dx \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці $D(t)$ має вигляд

$$\begin{aligned}\det D(t) &= \Delta_{13} + \Delta_{23}\,\chi(H,t) + \Delta_{43}\,\chi_x(H,T) + \Delta_{53}\int_0^H \chi(x,t)\,dx+ \\ &+\left[\Delta_{12} + \Delta_{42}\,\chi_x(H,t) + \Delta_{52}\int_0^H \chi(x,t)\,dx\right]\lambda(H,t) + \Big[\Delta_{14} + \Delta_{24}\,\chi(H,t)+ \\ &+\Delta_{54}\int_0^H \chi(x,t)\,dx\Big]\lambda_x(H,t) + [\Delta_{15} + \Delta_{25}\,\chi(H,t) + \Delta_{45}\,\chi_x(H,t)]\int_0^H \lambda(x,t)\,dx.\end{aligned} \tag{14}$$

Якщо визначник (14) відмінний від нуля для всіх $t \in [0,T]$, то система (13) інтегральних рівнянь Вольтера другого роду стосовно $\mu(t)$ і $\nu(t)$ має єдиний розв'язок у $C^1[0,T]$. А це означає, що існує єдиний розв'язок відповідної характеристичної задачі.

Отже, справедлива лема.

Лема 2. *Нехай виконуються припущення (А),(В) і нехай* $\det D(t) \neq 0,\ \forall t \in [0,T]$. *Нелокальна крайова задача (1),(11),(12) еквівалентна в класичному сенсі характеристичній задачі (1)–(4) тоді і тільки тоді, коли* $\mu(t)$ *і* $\nu(t)$ *є розв'язком системи інтегральних рівнянь (13).*

Теорема 1. *Нехай виконуються умови леми 2. Тоді нелокальна крайова задача (1),(11),(12) має єдиний класичний розв'язок.*

Доведення. В умовах теореми нелокальна крайова задача (1),(11),(12) еквівалентна характеристичній задачі (1)–(4), розв'язок якої існує і єдиний. Теорему доведено.

Розглянемо деякі крайові задачі для рівняння (1), коли умови теореми виконуються. Спочатку покажемо, що

$$\lambda(H,t) \neq 0,\ \lambda_x(H,t) \neq 0,\ \chi(H,t) \neq 0,\ \chi_x(H,t) \neq 0,\ \forall t \in [0,T].$$

З задачі Коші (10) випливає

$$\int_0^H \lambda(x,t)(\lambda_{xx} + c\lambda_x - k\lambda) \exp\left\{\int_0^x c(\xi,t)\,d\xi\right\} dx = \lambda(H,t)\lambda_x(H,t) \exp\left\{\int_0^H c(x,t)\,dt\right\} -$$
$$-\int_0^H (\lambda_x^2(x,t) + k(x,t)\lambda^2(x,t)) \exp\left\{\int_0^x c(\xi,t)\,d\xi\right\} dx = 0.$$

Якщо при деякому $\tau \in [0,T]$ $\lambda(H,\tau) = 0$ (або $\lambda_x(H,\tau) = 0$), то задача

$$\lambda_{xx}(x,\tau) + c(x,\tau)\lambda_x(x,\tau) - k(x,\tau)\lambda(x,\tau) = 0,$$
$$\lambda(0,\tau) = \lambda(H,\tau) = 0 \qquad (\text{або } \lambda(0,\tau) = \lambda_x(H,\tau) = 0)$$

має тільки нульовий розв'язок $\lambda(x,\tau) = 0$, що суперечить умові $\lambda_x(0,\tau) = 1$.

Аналогічно доводимо, що $\chi(H,t) \neq 0,\ \ \chi_x(H,t) \neq 0, \forall t \in [0,T]$. Крім того, для $\chi(x,t)$ отримуємо інтегральне рівняння Вольтера другого роду

$$\chi(x,t) = 1 + \int_0^x k(\xi,t)\chi(\xi,t)\,d\xi \int_\xi^x \exp\left(\int_s^\xi c(s_1,t)\,ds_1\right) ds,$$

звідки випливає, що $\chi(x,t) > 1,\ \chi_x(x,t) > 0, \forall t \in [0,T], \forall x \in (0,H]$. Зауважимо також, що $\lambda(x,t) > 0,\ \lambda_x(x,t) > 0, \forall t \in [0,T], \forall x \in (0,H]$.

2.1. В області Q_T розглянемо задачу для рівняння (1) з такими умовами

$$\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(H,t) = \varphi_1(t), \quad \beta_2(t)u_x(0,t) + \beta_3(t)u_x(H,t) = \varphi_2(t); \qquad (15)$$
$$u(x,0) = u_0(x). \qquad (16)$$

Задача (1),(15),(16) еквівалентна характеристичній задачі (1)–(4), де $\mu(t)$ і $\nu(t)$ є розв'язком системи рівнянь (13). Визначник матриці $D(t)$ у цьому випадку має вигляд

$$\det D(t) = \alpha_2(t)\beta_3(t)\left[\frac{\alpha_1(t)\beta_2(t)}{\alpha_2(t)\beta_3(t)} + \frac{\beta_2(t)\chi(H,t)}{\beta_3(t)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_1(t)\lambda_x(H,t)}{\alpha_2(t)} + \lambda_x(H,t)\chi(H,t) - \lambda(H,t)\chi_x(H,t)\right]. \tag{17}$$

Визначимо достатні умови, при яких задача (1),(15),(16) має єдиний розв'язок. Розглянемо функцію $\gamma(x,t) = \lambda_x(x,t)\chi(x,t) - \lambda(x,t)\chi_x(x,t)$. Враховуючи, що $\gamma(x,t)$ є розв'язком задачі Коші:

$$\gamma_x(x,t) + c(x,t)\gamma(x,t) = 0, \quad \gamma(0,t) = 1,$$

отримуємо $\gamma(x,t) > 0$, $x \in [0,H]$, $t \in [0,T]$. Із (17) випливає, що задача (1),(15),(16) має єдиний розв'язок у $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, якщо коефіцієнти $\alpha_i(t), \beta_{i+1}$, $i = 1,2$, задовольняють умови

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geqslant 0, \quad \beta_2(t)\beta_3(t) \geqslant 0, \quad \alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) \neq 0, \quad \beta_2^2(t) + \beta_3^2(t) \neq 0, \ t \in [0,T].$$

2.2. В області Q_T розглянемо задачу для рівняння (1) з такими умовами

$$\alpha_1(t)u(0,t)+\alpha_4(t)\int_0^H u(x,t)\,dx=\varphi_1(t), \ \beta_1(t)u(H,t)+\beta_4(t)\int_0^H u(x,t)\,dx=\varphi_2(t); \tag{18}$$
$$u(x,0) = u_0(x). \tag{19}$$

Задача (1),(18),(19) еквівалентна до характеристичної задачі (1)–(4), де $\mu(t), \nu(t)$ є розв'язком системи (13). Дослідимо, коли визначник матриці $D(t)$ відмінний від нуля. Визначник матриці $D(t)$ має вигляд

$$\det D(t) = \alpha_4(t)\beta_1(t)\left[\frac{\alpha_1(t)\lambda(H,t)}{\alpha_4(t)} + \frac{\beta_1(t)\alpha_1(t)}{\beta_4(t)\alpha_4(t)}\int_0^H \lambda(x,t)\,dx\right] +$$
$$+\alpha_4(t)\beta_1(t)\left[\lambda(H,t)\int_0^H \chi(x,t)\,dx - \chi(H,t)\int_0^H \lambda(x,t)\,dx\right].$$

Розглянемо функцію

$$\delta(x,t) = \lambda(x,t)\int_0^x \chi(s,t)\,ds - \chi(x,t)\int_0^x \lambda(s,t)\,ds.$$

Легко перевірити, що $\delta(x,t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\delta_{xx} + c(x,t)\delta_x - k(x,t)\delta = \exp\left(-\int_0^x c(s,t)\,ds\right), \quad \delta(0,t) = 0, \quad \delta_x(0,t) = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\delta(x,t)=\int_0^x [k(\xi,t)\int_\xi^x \exp\left(\int_s^\xi c(s_1,t)\,ds_1\right) ds]\delta(\xi,t)\,d\xi+$$
$$+\int_0^x\int_\xi^x \exp\left(-\int_0^s c(s_1,t)\,ds_1\right) ds\,d\xi>0,\quad \forall x\in[0,H], t\in[0,T].$$

Отже, задача (1),(18),(19) має єдиний розв'язок в $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, якщо коефіцієнти α_1,α_4, β_1,β_4 задовольняють умови $\alpha_1(t)\alpha_4(t)\geqslant 0$, $\beta_1(t)\beta_4(t)\geqslant 0$, $\alpha_1^2+\alpha_4^2\neq 0$, $\beta_1^2+\beta_4^2\neq 0$, $\forall t\in[0,T]$.

2.3. В області Q_T розглянемо задачу для рівняння (1) з такими умовами

$$u(0,t)=\gamma u(H,t),\ t\in[0,T]; \tag{20}$$
$$u_x(0,t)=\nu(t); \tag{21}$$
$$u(x,0)=u_0(x), \tag{22}$$

де γ — деяка стала.

Задача (1),(20)–(22) еквівалентна характеристичній задачі, де $\mu(t)$ є розв'язком рівняння

$$(1-\gamma\chi(H,t))\mu(t)=\int_0^t(\gamma k_1(H,t,\tau))\mu(\tau)\,d\tau+h(t), \tag{23}$$

а $k_1(H,t,\tau)$, $h(t)=\gamma\lambda(H,t)\nu(t)+\gamma\int_0^t k_2(H,t,\tau)\nu(\tau)\,d\tau+\gamma g_2(H,t)$ — неперервно диференційовні функції. Оскільки $\chi(H,t)>1$, $\forall t\in[0,T]$, то рівняння (23) буде інтегральним рівнянням Вольтера другого роду для всіх

$$\gamma\notin[(\max_{[0,T]}\chi(H,t))^{-1},(\min_{[0,T]}\chi(H,t))^{-1}]\subset(0,1).$$

Визначаючи для таких γ із рівняння (23) функцію $\mu(t)$, відшукуємо розв'язок задачі (1),(20)–(22).

Аналогічні результати можна отримати і у випадку крайових умов $u(0,t)=\mu(t)$, $u_x(0,t)=\gamma u_x(H,t)$.

3. Обернена задача визначення джерела в рівнянні (1).

Задача 1. *Знайти функції $(u(x,t),f(t))$ з класу $C^{2,1}(\bar{Q}_T)\times C[0,T]$, що задовольняють умови*

$$Lu=f(t)h(x,t)+g(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{24}$$

$$u(0,t)=\mu(t),\qquad t\in[0,T], \tag{25}$$
$$u_x(0,t)=\nu(t),\qquad t\in[0,T], \tag{26}$$
$$u(x,0)=u_0(x),\qquad x\in[0,H], \tag{27}$$

$$(lu)(t)\equiv\gamma_1(t)u(x_0,t)+\gamma_2(t)\int_0^H\sigma_1(x,t)u(x,t)\,dx=\delta(t),\ t\in[0,T]. \tag{28}$$

Задача 2. *Знайти функції $(u(x,t), f(x))$ з класу $C^{2,1}(\bar{Q}_T) \times C[0,H]$, що задовольняють рівняння*

$$Lu = f(x)h(x,t) + g(x,t), \ \ (x,t) \in Q_T, \tag{29}$$

умови (25)–(27) та умову перевизначення

$$(Mu)(x) \equiv \alpha_1(x)u(x,t_0) + \alpha_2(x)\int_0^T \sigma_2(x,t)u(x,t)\,dt = \beta(x), \ \ x \in [0,H], \tag{30}$$

де x_0, t_0 — фіксовані точки $x_0 \in (0,H], t_0 \in (0,T]$.

Зробимо таке припущення.

Припущення (C). $\alpha_1^2(x) + \alpha_2^2(x) \neq 0, \ \ x \in [0,H], \ \ \alpha_i(x) \in C^2[0,H],$

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) \neq 0, \ t \in [0,T]; \quad \gamma_i(t) \in C^1[0,T], \quad i=1,2; \quad \sigma_{1t}(x,t) \in C(\bar{Q}_T),$$
$$\sigma_{2xx}(x,t) \in C(\bar{Q}_T), \quad \beta(x) \in C^2[0,H], \quad \delta(t) \in C^1[0,T], \quad h(x,t), g(x,t) \in C(\bar{Q}_T);$$
$$\gamma_1(0)u_0(x_0) + \gamma_2(0)\int_0^H \sigma_1(x,0)u_0(x)\,dx = \delta(0),$$
$$\alpha_1(0)\mu(t_0) + \alpha_2(0)\int_0^T \sigma_2(0,t)\mu(t)\,dt = \beta(0),$$
$$\alpha_1'(0)\mu(t_0) + \alpha_1(0)\nu(t_0) + \alpha_2'(0)\int_0^T \sigma_2(0,t)\mu(t)\,dt +$$
$$+\alpha_2(0)\left(\int_0^T \sigma_{2x}(0,t)\mu(t)\,dt + \int_0^T \sigma_2(0,t)\nu(t)\,dt\right) = \beta'(0).$$

3.1. Розглянемо задачу 1. Оскільки задача 1 лінійна, то її розв'язок (u,f) можна шукати у вигляді

$$(u,f) = (u^1, 0) + (u^2, f),$$

де $Lu^1 = g(x,t)$, $u^1(x,0) = u_0(x)$, $u^1(0,t) = \mu(t)$, $u_x^1(0,t) = \nu(t)$; $Lu^2 = f(t)h(x,t)$, $u^2(x,0) = 0$, $u^2(0,t) = u_x^2(0,t) = 0$, $lu^2 = \delta(t) - lu^1$. Звідси випливає, що досить дослідити однорідну задачу

$$Lu = f(t)h(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{31}$$
$$u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,H], \tag{32}$$
$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{33}$$
$$(lu)(t) = \delta(t), \qquad t \in [0,T], \quad \delta(0) = 0. \tag{34}$$

Користуючись зображенням (7),(8) розв'язку характеристичної задачі, розв'язок прямої задачі (31)–(33) запишемо у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^x \int_0^t G(x,t,\xi,\tau)h(s,\tau)f(\tau)\,d\tau\,d\xi, \tag{35}$$

де

$$G(x,t,\xi,\tau) = p(x,t,\xi,\tau) + \int_\xi^x \int_\tau^t p(x,t,s,t_1)R(s,t_1,\xi,\tau)\,dt_1\,ds,$$

а $p(x,t,\xi,\tau)$, $R(s,t_1,\xi,\tau)$ — задаються формулою (8). Продиференціювавши (34), враховуючи (35) та умову $G(x,t,s,t)=\omega_2(x,s,t)$, отримуємо

$$(l\psi)(t)\cdot f(t) + \int_0^t G_1(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = \delta'(t), \tag{36}$$

$$\text{де } \psi(x,t) = \int_0^x \omega_2(x,s,t)h(s,t)\,ds, \tag{37}$$

$$G_1(t,\tau) = \gamma_1(t)\int_0^{x_0} G_t(x_0,t,s,\tau)h(s,\tau)\,ds + \gamma_1'(t)\int_0^{x_0} G(x_0,t,s,\tau)h(s,\tau)\,ds +$$
$$+\gamma_2(t)\int_0^H \sigma_1(x,t)\,dx \int_0^x G_t(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,ds + \gamma_2(t)\int_0^H \sigma_{1t}(x,t)\,dx \times$$
$$\times \int_0^x G(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,ds + \gamma_2'(t)\int_0^H \sigma_1(x,t)\,dx \int_0^x G(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,ds.$$

Лема 3. *Нехай виконуються припущення (A) і (C). Якщо (u,f) — розв'язок задачі (31)–(34), то $f(t)$ є розв'язком рівняння (36). Навпаки, якщо $f(t)$ — розв'язок рівняння (36), то (u,f), де u визначається формулою (35), є розв'язком задачі (31)–(34).*

Доведення. Першу частину леми 3 уже доведено. Навпаки, нехай $f(t)$ — розв'язок рівняння (36). Тоді, підставляючи $f(t)$ в (35), отримуємо функцію $u(x,t)$ і перевіркою визначаємо, що функція $u(x,t)$ справджує умови (31)–(33). Потрібно довести, що $(lu)(t)=\delta(t)$. Нехай $(lu)(t)=\delta_1(t)\neq\delta(t)$. Тоді $\delta_1'(t)-\delta'(t)=0$. Згідно з припущенням (C) маємо, що $\delta_1(0)-\delta(0)=0$. Отже, $\delta_1(t)-\delta(t)\equiv 0,\ t\in[0,T]$.

Тому задача (31)–(34) однозначно розв'язна тоді і тільки тоді, коли однозначно розв'язне інтегральне рівняння (36) стосовно $f(t)$. Лему доведено.

Функція $\psi(x,t)$, що визначається формулою (37), є розв'язком задачі Коші:

$$\psi_{xx} + c(x,t)\psi_x - k(x,t)\psi = h(x,t), \quad \psi(0,t)=0, \quad \psi_x(0,t)=0. \tag{38}$$

Якщо $(l\psi)(t)\neq 0,\ \forall t\in[0,T]$, то для $f(t)$ отримуємо рівняння Вольтера другого роду з неперервним ядром $\dfrac{1}{(l\psi)(t)}G_1(t,\tau)$.

Отже, справедлива теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення (A),(C) і $(l\psi)(t)\neq 0,\ \forall t\in[0,T]$. Тоді розв'язок оберненої задачі 1 існує і єдиний.*

Розглянемо тепер задачу 1 при інших крайових умовах, замінивши умову (26) такою

$$u(H,t) = \varphi(t),\ t\in[0,T], \tag{39}$$

де $\varphi \in C^1[0,T]$, $\varphi(0) = u_0(H)$. Оскільки задача 1 лінійна, то для доведення теореми про її розв'язність достатньо довести існування і єдиність розв'язку оберненої задачі відшукання функцій (u, f) з умов

$$Lu = f(t)h(x,t), \tag{40}$$

$$u(x,0) = 0, \tag{41}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{42}$$

$$u(H,t) = 0, \tag{43}$$

$$(lu)(t) = \delta(t). \tag{44}$$

Розв'язок прямої задачі (40)–(43) будемо шукати у вигляді (7),(8)

$$u(x,t) = \lambda(x,t)\nu(t) + \int_0^t k_2(x,t,\tau)\nu(\tau)\,d\tau + \int_0^x \int_0^t G(x,t,s,\tau)h(s,\tau)f(\tau)\,d\tau\,ds, \tag{45}$$

де функція $G(x,t,s,\tau)$ визначається з формули (35).

Підставимо рівність (45) в умову (43). Отримавши рівняння Вольтера другого роду для визначення $\nu(t)$, запишемо розв'язок цього рівняння через резольвенту $R_1(t,\tau)$. Тоді з (45) випливає, що

$$u(x,t) = \int_0^t G_2(x,t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{46}$$

де

$$G_2(x,t,\tau) = \frac{\lambda(x,t)}{-\lambda(H,t)}\int_0^H G(H,t,s,\tau)h(s,\tau)\,ds + \int_0^x G(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,ds +$$
$$+ \int_\tau^t \left[k_2(x,t,\tau_1)\int_0^H \frac{G(H,\tau_1,s,\tau)}{-\lambda(H,\tau_1)}h(s,\tau)\,ds + \frac{\lambda(x,t)}{-\lambda(H,t)}\int_0^H G(H,\tau_1,s,\tau)\times\right.$$
$$\left.\times R(t,\tau_1)h(s,\tau)\,ds + k_2(x,t,\tau_1)\int_0^H \int_\tau^{\tau_1} R_1(\tau_1,\eta)\frac{G(H,\eta,s,\tau)}{-\lambda(H,\eta)}h(s,\tau)\,d\eta\,ds\right]d\tau_1.$$

Диференціюючи (44) за t і враховуючи (46), маємо

$$(l\psi)(t)f(t) + \int_0^t G_3(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = \delta'(t), \tag{47}$$

де

$$\psi(x,t) = G_2(x,t,t) = \frac{\lambda(x,t)}{-\lambda(H,t)}\int_0^H \omega_2(H,s,t)h(s,t)\,ds + \int_0^x \omega_2(x,s,t)h(s,t)\,ds,$$

$$G_3(t,\tau) = \gamma_1(t)G_{2t}(x_0,t,\tau) + \gamma_2(t)\int_0^H \sigma_1(x,t)G_{2t}(x,t,\tau)\,dx + \gamma_1'(t)G_2(x_0,t,\tau)+ \tag{48}$$
$$+\gamma_2(t)\int_0^H \sigma_{1t}(x,t)G_2(x,t,\tau)\,dx + \gamma_2'(t)\int_0^H \sigma_1(x,t)G_2(x,t,\tau)\,dx.$$

Безпосередньою перевіркою можна показати, що функція $\psi(x,t)$ є розв'язком крайової задачі

$$\psi_{xx} + c(x,t)\psi_x - k(x,t)\psi = h(x,t), \quad \psi(0,t) = \psi(H,t) = 0.$$

Оскільки обернена задача (40)–(44) є еквівалентна рівнянню Вольтера другого роду (47), то справедлива така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення (A),(C) і $(l\psi)(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,T]$, де $\psi(x,t)$ визначається за формулою (48). Тоді розв'язок оберненої задачі (24),(25), (27),(28),(39) існує і єдиний.*

Зауважимо, що аналогічно можна отримати умови розв'язності оберненої задачі 1 і при інших крайових умовах. Умови розв'язності, якщо виконуються припущення (A) і (C), полягають в нерівності нулю дії оператора l на функцію $\psi(x,t)$, яка є розв'язком рівняння

$$\psi_{xx} + c(x,t)\psi_x - k(x,t)\psi = h(x,t)$$

і задовольняє відповідні крайові умови.

3.2. Розглянемо задачу 2. Оскільки ця задача лінійна, то досить розглянути задачу

$$Lu = f(x)h(x,t); \tag{49}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = 0; \tag{50}$$

$$(Mu)(t) = \beta(x),\ \beta(0) = \beta'(0) = 0. \tag{51}$$

Двічі диференціюючи умову (51) за x і враховуючи (35) із заміною $f(t)$ на $f(x)$, маємо

$$(M\psi)(x)f(x) + \int_0^x \Omega(x,s)f(s)\,ds = \beta''(x), \tag{52}$$

$$\text{де } \psi(x,t) = \int_0^t \omega_1(t,x,\tau)h(x,\tau)\,d\tau, \tag{53}$$

$$\Omega(x,s) = \alpha_1(x)\int_0^{t_0} G_{xx}(x,t_0,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau + \alpha_2(x)\int_0^T \sigma_2(x,t)\,dt\times$$
$$\times\int_0^t G_{xx}(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau + 2\left[\alpha_1'(x)\int_0^{t_0} G_x(x,t_0,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau+\right.$$
$$\left.+\int_0^T (\alpha_2(x)\sigma_2(x,t))_x\,dt\int_0^t G_x(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau\right] + \alpha_1''(x)\times$$
$$\times\int_0^{t_0} G(x,t_0,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau + \int_0^T (\alpha_2(x)\sigma_2(x,t))_{xx}\,dt\int_0^t G(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau.$$

Лема 4. *Нехай виконуються припущення (A),(C). Якщо (u,f) — розв'язок задачі (49)–(51), то f — розв'язок рівняння (52). Навпаки, якщо f — розв'язок рівняння*

(52), то (u,f) — розв'язок задачі (49)-(51), де u визначається за формулою (35) з заміною $f(t)$ на $f(x)$.

Доведення. Доведення леми 4 аналогічне до доведення леми 3. Покажемо лише, що $(Mu)(x) = \beta(x)$. Нехай $(Mu)(x) = \beta_1(x) \neq \beta(x)$, тоді для $\beta_2(x) = \beta_1(x) - \beta_(x)$ отримуємо задачу $\beta_2''(x) = 0$, $\beta_2(0) = \beta_2'(0) = 0$. Звідси випливає, що $\beta(x) \equiv \beta_1(x), x \in [0,H]$. Лему доведено.

З леми 4 випливає, що достатньо визначити умови розв'язності рівняння (52).

Легко перевірити, що функція $\psi(x,t)$, яка задається формулою (53), є розв'язком задачі Коші:

$$\psi_t(x,t) + \eta(x,t)\psi(x,t) = h(x,t),\ \psi(x,0) = 0.$$

Отже, якщо $(M\psi)(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,H]$, то для знаходження $f(x)$ отримуємо рівняння Вольтера другого роду з неперервними функціями $\dfrac{1}{(M\psi)(x)}\Omega(x,s)$, $\quad \dfrac{1}{(M\psi)(x)}\beta''(x)$. Тому справедлива теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються припущення (A),(C) і $(M\psi)(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,H]$. Тоді розв'язок задачі 2 існує і единий.*

Зауважимо, що для знаходження функції $f(x)$ оберненої задачі 2 з іншими крайовими умовами отримуємо рівняння

$$(M\psi)(x)f(x) + \int_0^x \Omega_1(x,s)f(s)\,ds + \int_0^H \Omega_2(x,s)f(s)\,ds = \beta''(x), \tag{54}$$

де $\psi(x,t)$ — задається формулою (53), $\Omega_1(x,s)$, $\Omega_2(x,s)$ – неперервні задані функції та твердження, аналогічне до леми 4. На підставі цього твердження обернена задача 2 з іншими крайовими умовами еквівалентна рівнянню (54), яке при $(M\psi)(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,H]$ є рівнянням Фредгольма другого роду. Для цих задач вдалося визначити тільки умову фредгольмовості $(M\psi)(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,H]$.

1. Barenblatt G.I.,Zheltov I.P., Kochina I.N. *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks* // J. Appl. Math. Mech.— 1960.—N 24.— P.1286–1303.
2. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.— 352 с.
3. Colton D. *Pseudoparabolic equations in one space variable* // J. Differen. Equattions.— 1972.— N 12.— P. 559–565.
4. Водохова В.А.*Краевая задача с нелокальным условием А.М.Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса* // Дифференц. уравнения.— 1982.—Т.18, N 12.— С. 280–285.
5. Cannon J.R., Yanpinq Lin. *Classical and Weak Solutions for One-Dimensional Pseudo-Parabolic Equations with Typical Boundary Data* // Annali di Matem. Pura ed Applicata.— 1988. — N 152.— P. 375–385.

6. Majchrowski M. *On non–local problems for pseudoparabolic equattions* // Z. Anal. und Anwed.— 1988. — Vol.7, N 4.— P. 377–383.
7. Шхануков М.Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающие при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах* // Дифференц. уравнения.—1982.— Т.18, N 4.— С. 689–698.
8. Шхануков М.Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений* // Дифференц. уравнения.—1983.— Т.19, N 1.—С. 145–152.
9. Аблабеков Б.С. *Одномерные обратные задачи для уравнения фильтрации жидкости в трещиноватой породе и приближенные методы решения* // В сб. Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям.— Фрунзе: 1988. — Вып. 21.— С. 273–280.
10. Аблабеков Б.С., Мамаюсупов О.Ш. *Разностные схемы для обратной задачи фильтрации жидкости в пористой среде* // Матер. 9 респ. конф. молодых ученых.— Фрунзе:, 1987.— С. 42.
11. Majchrowski M. *On inverse problems with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equations and pseudoparabolic equations.* // Demonstr. matem.— 1993. — Vol. 26, N 1, 1993.— P. 255–275.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.96