УДК 517.95

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

М. О. Колінько, С. П. Лавренюк

M. O. Kolinko, S. P. Lavrenyuk. Uniqueness of a solution of the Fourier problem for a nonlinear pseudoparabolic system. In the article some sufficient conditions of uniqueness of the weak solution of the problem without initial data for one nonlinear pseudoparabolic system, independent of the behavior of a solution, when the time approaches to minus infinity are obtained. The case of homogeneous boundary values of Dirichlet and a bounded domain on space variables is considered.

Нехай Ω – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T < \infty$; $S_T = \partial\Omega \times (-\infty, T)$. Розглянемо в Q_T систему рівнянь

$$\mathcal{A}(u) \equiv u_t + \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} H_\alpha(x,t) D^\alpha u -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) u_{x_i t})_{x_i} + \mathcal{B}(u) + G(x,t)u = \sum_{|\alpha| \leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t) \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \dots, l-1, \qquad (2)$$

де $\mathcal{B}(u) = -\sum\limits_{i=1}^{n} (C_i(x)\theta_i(u))_{x_i}$, $l \geqslant 1$, $A_{\alpha\beta}$, B_{ij}, H_α, G — квадратні матриці розміру N; $C_i(x) = \operatorname{diag}\{c_1^i(x), \dots, c_N^i(x)\}$, $\theta_i(u) = \operatorname{colon}(|u_{1,x_i}|^{p-2} u_{1,x_i}, \dots, |u_{N,x_i}|^{p-2} u_{N,x_i})$, $i = 1, \dots, n$; $p > 2$; $u = \operatorname{colon}(u_1, \dots, u_N)$; $F_\alpha = \operatorname{colon}(f_{1\alpha}, \dots, f_{N\alpha})$, $|\alpha| \leqslant 1$; ν — зовнішня нормаль до S_T та

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 12345.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження", грант N APU 061062

Метою нашої праці є визначення умов єдиності розв'язку задачі Фур'є (задачі без початкових умов) (1), (2). Зауважимо, що задачу Фур'є для лінійних еволюційних рівнянь і систем досліджували раніше багато авторів [1 – 11]. У цих працях виділено клас єдиності та існування розв'язків задачі Фур'є у різних функціональних просторах. Зокрема, для єдиності розв'язку потрібно, щоб при $t \to -\infty$ розв'язок зростав не швидше ніж $\exp(-at)$, причому стала a залежить від даних задачі. Для нелінійних параболічних рівнянь у роботах [12 – 13] отримано умови існування і єдиності розв'язку задачі Фур'є незалежно від поведінки при $t \to -\infty$.

Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються такі умови.

Умова (A). *Для всіх* $w \in (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N$

$$\int\limits_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta w, D^\alpha w)dx \geqslant a_0 \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w|^2 dx,$$

де $A_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l$ *та* $a_0 > 0$.

Умова (B). *Для всіх* $\xi_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, \ldots, n$ *і майже скрізь в* Q_T

$$\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)\xi_i, \xi_j) \geqslant b_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad \sum_{i,j=1}^n \Big(B_{ijt}(x,t)\xi_i, \xi_j\Big) \leqslant b_1(t) \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2,$$

де $b_0 > 0$; $B_{ij}, B_{ijt} \in L^\infty(Q_T)$; $B_{ij}(x,t) = B_{ji}(x,t)$; $B_{ij}(x,t) = B^*_{ij}(x,t)$, $i, j = 1, \ldots, n$ *та* $b_1(t) \in L^\infty(-\infty, T)$.

Умова (C). *Нехай* $C_i \in L^\infty(\Omega)$ *та майже скрізь у* Ω *маємо* $c^i_k(x) \geqslant c_0 > 0$, *де* $i = 1, \ldots, n$ *та* $k = 1, \ldots, N$.

Умова (G). *Для всіх* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *і майже скрізь у* Q_T *виконується нерівність*

$$(G(x,t)\xi, \xi) \geqslant g_0(t)|\xi|^2,$$

де $G \in L^\infty(Q_T)$ *та* $g_0 \in L^\infty(-\infty, T)$.

Умова (H). *Нехай для всіх таких* α, *що* $1 \leqslant |\alpha| \leqslant l$, *справедливо* $H_\alpha \in L^\infty(Q_T)$.

Умова (F). *Нехай* $F_\alpha(x,t) \in L^2_{loc}((-\infty, T]; (L^2(\Omega))^N)$ *для* $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$.

Тут через $(\cdot, \cdot)$ позначено скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^N$. Введемо також позначення

$$g_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad g_0(t) \geqslant 0, \\ g_0(t), & \text{якщо} \quad g_0(t) < 0, \end{cases} \quad g_2 = \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} g_1(\tau),$$

$$h_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} \|H_\alpha(x,\tau)\|^2, \quad h_1 = \inf_{(-\infty,T)} h_0(t).$$

Означення. *Функцію $u(x,t)$, яка задовольняє включення*

$$u \in L^2_{loc}((-\infty,T];(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N)\cap L^p_{loc}((-\infty,T];(\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N),\ u_t \in L^2_{loc}((-\infty,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$$

та для всіх функцій $v \in (C_0^\infty(Q_T))^N$ рівність

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[(u_t,v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)u_{x_i t}, v_{x_j}) +$$
$$+\sum_{i=1}^n(C_i(x)\theta_i(u), v_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) + (G(x,t)u,v)\Bigg]\,dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|\leqslant l}(F_\alpha(x,t), D^\alpha v)\,dxdt$$

назвемо узагальненим розв'язком задачі (1),(2).

Зауважимо, що у випадку виконання умови (B) у просторі $(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N$ можна ввести еквівалентні норми:

$$\|u\|^{(1)}_{(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N} = \left(\int\limits_\Omega |u_x|^2\,dx\right)^{\frac12},\quad \text{де } |u_x|^2 = \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2;$$
$$\|u\|^{(2)}_{(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N} = \left(\int\limits_\Omega\left(|u|^2 + \sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)u_{x_i}, u_{x_j})\right)dx\right)^{\frac12}.$$

Надалі використаємо відомі нерівності Фрідріхса ([14], с. 50)

$$\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=j}|D^\alpha v|^2\,dx \leqslant \gamma_{l,j}\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha v|^2\,dx, \tag{3}$$

справедливі для будь-яких $v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$, де $j = 0,\ldots,l,$, а сталі $\gamma_{l,j}$ залежать від Ω, l, n.

Теорема. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови (A), (B), (C), (G), (H), (F) і, крім того,*

$$a_0 - \left(h_1\gamma_{l,0}\sum_{j=1}^l\gamma_{l,j}\right)^{\frac12} - \frac12\,\gamma_{l,1}\inf_{(-\infty,T)}\sup_{(-\infty,t)} b_1(\tau) + \gamma_{l,0}\,g_2 > 0.$$

Тоді задача (1), (2) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Доведення. Нехай задача (1), (2) має два узагальнені розв'язки $u^1(x,t)$ і $u^2(x,t)$. Тоді, очевидно, для функції $u(x,t) = u^1(x,t) - u^2(x,t)$ виконується рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[(u_t, v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)u_{x_i t}, v_{x_j}) + \\ + \sum_{i=1}^n (C_i(x)(\Theta_i^1(u^1) - \Theta_i^2(u^2)), v_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) + (G(x,t)u, v)\Big]\, dxdt = 0 \tag{4}$$

для довільної функції $v \in (C_0^\infty(Q_{t_1,t_2}))^N$ та при довільних фіксованих $t_1, t_2 (-\infty < t_1 < t_2 < T)$. Тут $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$;

$$\Theta_i^j(u^j) = \mathrm{colon}(|u^j_{1,x_i}|^{p-2}u^j_{1,x_i}, \ldots, |u^j_{N,x_i}|^{p-2}u^j_{N,x_i}), \quad j = 1,2; \quad i = 1,\ldots,n.$$

Тоді рівність (4) справджується і для всіх

$$v \in L^2((t_1,t_2); (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N) \cap L^p((t_1,t_2); (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N).$$

Візьмемо в (4) за $v(x,t)$ функцію $u(x,t)$. Тоді отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[(u_t, u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u, D^\alpha u) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)u_{x_i t}, u_{x_j}) + \\ + \sum_{i=1}^n (C_i(x)(\Theta_i^1(u^1) - \Theta_i^2(u^2)), u_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha u, u) + (G(x,t)u, u)\Big]\, dxdt = 0. \tag{5}$$

Перетворюючи й оцінюючи кожний член рівності (5) на підставі умов теореми, маємо

$$\Im_1 = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (u_t, u)\, dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |u|^2\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |u|^2\, dx;$$

$$\Im_2 = \int\limits_{\Omega_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u, D^\alpha u)\, dxdt \geqslant a_0 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2\, dxdt, \quad \Omega_t = Q \cap \{\tau = t\};$$

$$\Im_3 = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)u_{x_i t}, u_{x_j})\, dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t_2)u_{x_i}, u_{x_j})\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t_1)u_{x_i}, u_{x_j})\, dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ijt}(x,t)u_{x_i}, u_{x_j})\, dxdt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t_2)u_{x_i}, u_{x_j})\, dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t_1)u_{x_i}, u_{x_j})\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} b_1(t)\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\, dxdt.$$

Для оцінки інтеграла

$$\Im_4 = \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} (C_i(x)(\Theta_i^1 - \Theta_i^2), u_{x_i})\, dxdt$$

скористаємося умовами (B), (C), лемою 1.2 ([15], с.60) і нерівністю Гельдера

$$\Im_4 \geqslant c_0 2^{2-p} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} |u_{j,x_i}|^p\, dxdt \geqslant \mu_0 \int\limits_{\Omega_t} |u_x|^p\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \mu_1 \Bigg(\int\limits_{\Omega_t} |u_x|^2\, dx \Bigg)^{\frac{p}{2}} \geqslant \mu_2 (\|u\|^{(2)}_{(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N})^p, \quad \mu_2 > 0.$$

Далі

$$\Im_5 = \int\limits_{\Omega_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t) D^\alpha u, u)\, dxdt \leqslant \int\limits_{\Omega_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} \|H_\alpha(x,t)\|\; |D^\alpha u|\, |u|\, dxdt,$$

де $\|H_\alpha(x,t)\|$ — евклідова норма матриці $H_\alpha(x,t)$. Враховуючи нерівність Коші, оцінки (3) і умови теореми, отримаємо

$$\Im_5 \leqslant \left(h_0(t) \gamma_{l,0} \sum_{j=1}^{l} \gamma_{l,j} \right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2\, dx;$$

$$\Im_6 = \int\limits_{\Omega_t} (G(x,t)u, u)\, dxdt \geqslant g_0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} |u|^2\, dx.$$

Перепишемо рівність (5) у вигляді

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_2}} \left[|u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t_2) u_{x_i}, u_{x_j}) \right] dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_1}} \left[|u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t_1) u_{x_i}, u_{x_j}) \right] dx =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \Bigg[\int\limits_{\Omega_t} \Bigg(- \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u, D^\alpha u) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ijt}(x,t) u_{x_i}, u_{x_j}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (C_i(x)(\Theta_i^1 - \Theta_i^2), u_{x_i}) - \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t) D^\alpha u, u) - (G(x,t)u, u) \Bigg) dx \Bigg] dt. \qquad (6)$$

Оскільки (6) справджується для всіх $t_1, t_2 \in (-\infty, T)$, то з неї отримаємо майже для всіх $t \in (-\infty, T)$ рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}y(t)+\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}u,D^{\alpha}u)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ijt}(x,t)u_{x_i},u_{x_j})+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(C_i(x)(\Theta_i^1-\Theta_i^2),u_{x_i})+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u,u)+(G(x,t)u,u)\Bigg]dx=0, \qquad (7)$$

де

$$y(t)=\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[|u|^2+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)u_{x_i},u_{x_j})\Bigg]dx.$$

На підставі оцінок інтегралів $\Im_2,\ldots,\Im_6$ з рівності (7) випливає нерівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}y(t)+\mu_2(y(t))^{\frac{p}{2}}+ \qquad (8)$$
$$+\left[\frac{1}{\gamma_{l,1}}\left(a_0-\left(h_0(t)\gamma_{l,0}\sum_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}\right)^{\frac{1}{2}}+\gamma_{l,0}g_1(t)\right)-\frac{1}{2}b_1(t)\right]\int\limits_{\Omega_t}|u_x|^2\,dx\leqslant 0$$

для майже всіх $t\in(-\infty,T)$. Згідно з умовами теореми існує таке число $\tau_0\in(-\infty,T)$, що для всіх $t\in(-\infty,\tau_0)$ виконується нерівність

$$a_0-\left(h_0(t)\gamma_{l,0}\sum_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}\right)^{\frac{1}{2}}+\gamma_{l,0}g_1(t)-\frac{1}{2}\gamma_{l,1}b_1(t)\geqslant 0.$$

Тому з (8) на проміжку $t\in(-\infty,\tau_0)$ отримуємо диференціальну нерівність

$$\frac{dy(t)}{dt}+2\mu_2(y(t))^{p/2}\leqslant 0.$$

Звідси на підставі леми 1.1 ([12], с.10) випливає, що $y(t)=0$ майже для всіх $t\in(-\infty,\tau_0)$. Далі не складно показати, що $y(t)=0$ майже скрізь у $[\tau_0,T]$. Отже, майже скрізь в Q_T маємо $u(x,t)=0$, тобто єдиність узагальненого розв'язку задачі (1),(2) доведена.

1. Олейник О.А.,Иосифьян Г.А.*Аналог принципа Сен–Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений* //Успехи мат. наук.— 1976.— Т.31, N6.— С.142–166.

2. Ивасишен С.Д. *О параболических граничных задачах без начальных условий* // Укр. мат. журн.— 1982.— Т.34, N5.— С. 547–552.

3. Кадыров Р.Р., Жураев Б.Б.*О классах единственности решений краевых задач без начальных условий для параболических уравнений высшего порядка* //Изв. АН УзССР, сер. физ.– мат. наук.— 1985.— N2.— С.23–29.

4. Лавренюк С.П.*Задача для одного эволюционного уравнения в неограниченном по времени цилиндре* // Укр. мат. журн.— 1990.— Т.42, N11. — С.1481–1486.

5. Лавренюк С.П.*Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единственности* // Нелинейные граничные задачи.— 1993.— Вып. 5.— С. 53–58.

6. Кирилич В.М., Мишкіс А.Д.*Крайова задача без початкових умов для лінійної одновимірної системи рівнянь гіперболічного типу* // Доп. АН УРСР, сер.А.— 1991.— N5.— С.8–10.

7. Ивасишен С.Д.*О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий* // Дифференц. уравнения. - 1978.— Т.14, N 2.— С. 361–363.

8. Олейник О.А.*О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях* // Успехи мат. наук.— 1975.— Т.30, N2.— С. 219–220.

9. Олейник О.А., Радкевич Е.В.*О поведении решений общих параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях* // Докл. АН СССР.— 1975.— Т.220, N5.— С. 1027–1030.

10. Олейник О.А., Радкевич Е.В.*Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений* // Функциональный анализ и его прилож.— 1974.— Т.8, N4.— С. 59–70.

11. Лавренюк С.П.*Про єдиність розв'язку задачі без початкових умов для одного еволюційного рівняння* // Вісн. Львів. ун–ту. Сер. мех.–матем.— 1993.— Вип. 38.— С.3–6.

12. Бокало Н.М.*О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Тр. сем. им. И.Г.Петровского. 1989.— Т.14.— С.3–44.

13. Бокало Н.М.*Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности* // Сиб. мат. журн. – 1993.— Т.34, N4.— С.33–40.

14. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1978.—336 с.

15. Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.— 608 с.

Стаття надійшла до редколегії 03.06.96