УДК 517.946

ТРИТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

І. С. Клюс, Б. Й. Пташник

I. S. Klyus, B. Jo. Ptashnyk. The three-point problem for a wave equation. The classical correctness of the problem about finding of the solution of the uniform equation of fluctuation of the string according to its three photographs has been investigated. The existences and uniquenesses of the solution have been conditionally determined, which have theoretical–numerical character. The investigation of the problem is connected with the problem of small denominators for estimation from below of which the metric approach is used.

1. Формулювання задачі. В області $D = \{(t,x), 0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}\}$ розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

$$u(t_j, x) = g_j(x), \quad j = 1, 2, 3; \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant T, \tag{2}$$

яка полягає в з'ясуванні процесу коливань струни за трьома її фотографіями. Дослідимо питання класичної коректності задачі (1), (2).

Задачу з багатоточковими умовами за часовою змінною в області $Q_p = \{(t,x), 0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^p, p \geqslant 1\}$ для гіперболічних рівнянь n-го порядку, коли задані значення шуканої функції для n моментів часу $t_1, \ldots, t_n$, $n \geqslant 2$, досліджували в працях [1-6]. Ця задача, на відміну від задачі Коші, взагалі, не буде коректною, якщо на розв'язок не накласти ще деяких додаткових умов. Зокрема, задача про визначення розв'язку рівняння (1), коли задані лише дві із вказаних умов (2), є некоректна в класі обмежених функцій [7; 5, гл. 2]. Наприклад, задача з однорідними умовами $u(t_1,x) = u(t_2,x) = 0$ для рівняння (1) має нетривіальні розв'язки вигляду $u(t,x) = p(x+t) - p(x-t+2t_1)$, де $p(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна періодична функція з періодом $2(t_2 - t_1)$, а розв'язок відповідної неоднорідної задачі, якщо він існує, не буде єдиним. Щоб за певних умов на параметри задачі забезпечити єдиність розв'язку, на шуканий розв'язок накладали додаткові умови за змінною x (умови періодичності, майже періодичності) [1–6].

Ми показали, як можна досягти єдиності розв'язку, наклавши додаткову третю умову за змінною t; встановлено умови на функції $g_j(x)$ і числа t_j, $j = 1, 2, 3$, при яких задача (1), (2) є коректна.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L05.

Зауважимо, що наша праця близька до статті [8], де досліджена задача з триточковими умовами за змінною x для псевдопараболічного рівняння $u_t(t,x) = u_{xxt}(t,x) + u_{xx}(t,x)$.

Розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t), \tag{3}$$

де функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ визначаються із системи рівнянь

$$\varphi(x+t_j) + \psi(x-t_j) = g_j(x), \quad j = 1,2,3. \tag{4}$$

2. Єдиність розв'язку. Задача (1), (2) не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли відповідна однорідна задача з умовами

$$u(t_j,x) = 0, \ j = 1,2,3 \tag{5}$$

не має нетривіальних розв'язків. Позначимо: $\ell_1 = t_3 - t_2$, $\ell_2 = t_3 - t_1$, $\ell_3 = t_2 - t_1$, $\alpha_1 = \ell_3/\ell_1$, $\alpha_2 = \ell_3/\ell_2$, $\alpha_3 = \ell_2/\ell_3$, $\beta_1 = t_2/\ell_1$, $\beta_2 = t_1/\ell_2$, $\beta_3 = t_1/\ell_3$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) в просторі $C(D)$ необхідно і достатньо, щоб число α_1 було ірраціональним.*

Доведення. Розв'язок задачі (1), (5) визначається формулою (3), де функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ такі, що задовольняють систему рівнянь

$$\varphi(x+t_j) + \psi(x-t_j) = 0, \ j = 1,2,3. \tag{6}$$

Легко показати, що система (6) рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x+2(t_2-t_1)) - \varphi(x) = 0, \\ \varphi(x+2(t_3-t_2)) - \varphi(x) = 0, \\ \varphi(x+2t_1) + \psi(x) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Розв'язки системи рівнянь (7) мають вигляд

$$\varphi(x) = p(x), \ \psi(x) = -p(x+2t_1), \tag{8}$$

де $p(x) \in C(\mathbb{R})$ – довільна двоякоперіодична функція з періодами $2\ell_1$ і $2\ell_3$.

Якщо відношення ℓ_3/ℓ_1 є числом раціональним, тобто якщо $\alpha_1 = m/k$, $(m,k \in \mathbb{N})$, то система (7) має розв'язки вигляду (8), де $p(x) = v(x) \in C(\mathbb{R})$ – довільна періодична функція з періодом $\omega = 2\ell_3/m = 2\ell_1/k$; для цього випадку задача (1), (5) має нетривіальні розв'язки вигляду

$$u(t,x) = v(x+t) - v(x-t+2t_1).$$

Якщо ж число α_1 є ірраціональним, то неперервна функція $p(x)$, яка має два несумірні періоди, набуває одного і того ж значення в усіх точках вигляду $2\ell_3 m + 2\ell_1 k$ $(k,m \in \mathbb{Z})$, які утворюють всюди щільну множину, і внаслідок неперервності ця функція є константою [9, с. 29; 10, с. 55]. У цьому випадку всі розв'язки системи рівнянь (7) мають вигляд: $\varphi(x) = C$; $\psi(x) = -C$, де C – довільна стала, а задача (1), (5) у класі $C(D)$ має лише тривіальний розв'язок. Теорему доведено.

3. Існування розв'язку. Надалі вважатимемо, що має місце єдиність розв'язку задачі (1), (2), тобто що число α_1 – ірраціональне. Зауважимо, що з ірраціональності числа α_1 випливає ірраціональність чисел α_2 і α_3. Розв'язок задачі (1), (2) можна записати у вигляді

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) + u_3(t,x), \tag{9}$$

де $u_j(t,x)$, $j = 1,2,3$ – розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови

$$u_j(t_q, x) = \delta_{jq} g_j(x), \ q = 1,2,3, \tag{10}$$

δ_{jq} – символ Кронекера.

Знайдемо розв'язок задачі (1), (10) при $j = 1$, тобто функцію $u_1(t,x)$, яка зображається формулою (3), де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначаються із такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x+t_1) + \psi(x-t_1) = g_1(x), \\ \varphi(x+t_2) + \psi(x-t_2) = 0, \\ \varphi(x+t_3) + \psi(x-t_3) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x+t_1) + \psi(x-t_1) = g_1(x), \\ \varphi(x+2(t_3-t_2)) - \varphi(x) = 0, \\ \varphi(x+2t_2) + \psi(x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Два останні рівняння системи (12) задовольняють функції

$$\varphi(x) = p_1(x), \ \psi(x) = -p_1(x+2t_2), \tag{13}$$

де $p_1(x)$ – довільна періодична функція з періодом $2(t_3-t_2)$, яка має вигляд

$$p_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_1(k) \exp(i\pi kx/\ell_1), \tag{14}$$

де $p_1(k)$ – коефіцієнти Фур'є функції $p_1(x)$. Отже, щоб система (12) мала розв'язок, функція $g_1(x)$ повинна бути періодичною з періодом $2\ell_1$, тобто

$$g_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_1(k) \exp(i\pi kx/\ell_1), \tag{15}$$

де $g_1(k)$ – коефіцієнти Фур'є функції $g_1(x)$.

Визначимо $p_1(x)$ так, щоб функції (13) задовольняли систему рівнянь (12). На основі першого рівняння системи (12) та формул (13) – (15) отримуємо, що кожен з коефіцієнтів $p_1(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, визначається відповідно з рівняння

$$p_1(k)\Big(\exp(i\pi kt_1/\ell_1) - \exp(i\pi k(2t_2-t_1)/\ell_1)\Big) = g_1(k). \tag{16}$$

При $k = 0$ рівняння (16) має вигляд $p_1(0) \cdot 0 = g_1(0)$; розв'язок цього рівняння існує і є довільною константою, якщо $g_1(0) = \int_0^{2\ell_1} g_1(x)\,dx = 0$. Для кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ коефіцієнти $p_1(k)$ однозначно визначаються формулами

$$p_1(k) = g_1(k)\Big[\exp(i\pi k t_1/\ell_1) - \exp(i\pi k(2t_2 - t_1)/\ell_1)\Big]^{-1},$$

де знаменники відмінні від нуля, оскільки число α_1 – ірраціональне. Отже, функція $p_1(x)$ визначається (з точністю до довільної сталої $p_1(0)$) формулою

$$p_1(x) = p_1(0) + {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' g_1(k)\frac{\exp(i\pi kx/\ell_1)}{\exp(i\pi k t_1/\ell_1) - \exp(i\pi k(2t_2 - t_1)/\ell_1)}, \tag{17}$$

де штрих біля суми означає, що пропущено доданок для $k = 0$. На основі формул (3), (13) і (17) розв'язок задачі (1), (10) при $j = 1$ зобразимо у вигляді

$$u_1(t, x) = {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' g_1(k)\frac{\Big[\exp(i\pi k(t/\ell_1 - \beta_1)) - \exp(-i\pi k(t/\ell_1 - \beta_1)\Big]}{\exp(-i\pi k\alpha_1) - \exp(i\pi k\alpha_1)}\exp(i\pi kx/\ell_1). \tag{18}$$

Аналогічно знаходимо розв'язок задачі (1), (10) при $j = 2$, який теж має вигляд (3), де функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ визначаються з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x + t_2) + \psi(x - t_2) = g_2(x), \\ \varphi(x + t_3) + \psi(x - t_3) = 0, \\ \varphi(x + t_1) + \psi(x - t_1) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

яка рівносильна системі

$$\begin{cases} \varphi(x + t_2) + \psi(x - t_2) = g_2(x), \\ \varphi(x + 2(t_3 - t_1)) - \varphi(x) = 0, \\ \varphi(x + 2t_1) + \psi(x) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Таким же шляхом, як у випадку $j = 1$, встановлено, що для існування розв'язку системи (20) необхідно, щоб функція $g_2(x)$ була періодичною з періодом $2(t_3 - t_1)$ і щоб $\int_0^{2\ell_2} g_2(x)\,dx = 0$; у цьому випадку показано, що розв'язок задачі (1), (10) при $j = 2$ однозначно визначається формулою

$$u_2(t, x) = {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' g_2(k)\frac{\Big[\exp(i\pi k(t/\ell_2 - \beta_2)) - \exp(-i\pi k(t/\ell_2 - \beta_2)\Big]}{\exp(i\pi k\alpha_2) - \exp(-i\pi k\alpha_2)}\exp(i\pi kx/\ell_2), \tag{21}$$

де $g_2(k)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – коефіцієнти Фур'є функції $g_2(x)$.

Розв'язок задачі (1), (10) при $j = 3$ визначається формулою (3), де функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x+t_3) + \psi(x-t_3) = g_3(x), \\ \varphi(x+2(t_2-t_1)) - \varphi(x) = 0, \\ \varphi(x+2t_1) + \psi(x) = 0, \end{cases} \tag{22}$$

для існування розв'язку якої необхідно, щоб функція $g_3(x)$ була періодичною з періодом $2(t_2 - t_1)$ і щоб $\int_0^{2\ell_3} g_3(x)\,dx = 0$. Розв'язуючи систему (22) за аналогією з випадком $j = 1$, знаходимо, що

$$u_3(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' g_3(k) \frac{\left[\exp(i\pi k(t/\ell_3-\beta_3)) - \exp(-i\pi k(t/\ell_3-\beta_3)\right]}{\exp(i\pi k\alpha_3) - \exp(-i\pi k\alpha_3)} \exp(i\pi kx/\ell_3), \tag{23}$$

де $g_3(k)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – коефіцієнти Фур'є функції $g_3(x)$. Тоді з формул (9), (18), (21) і (23) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^{[j/2]+1} \frac{\left[\exp(i\pi k(t/\ell_j-\beta_j)) - \exp(-i\pi k(t/\ell_j-\beta_j)\right]}{\exp(i\pi k\alpha_j) - \exp(-i\pi k\alpha_j)} g_j(k) \exp(i\pi kx/\ell_j), \tag{24}$$

де

$$g_j(k) = \frac{1}{2\ell_j} \int_0^{2\ell_j} g_j(x) \exp(-i\pi kx/\ell_j)\,dx, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad j = 1,2,3. \tag{25}$$

Величини $|\exp(i\pi k\alpha_j) - \exp(-i\pi k\alpha_j)|$, $j = 1,2,3$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини $k \in \mathbb{Z}$; тому питання про збіжність ряду (24) пов'язане загалом з проблемою малих знаменників.

Якщо функції $g_j(x)$, $j = 1,2,3$ є тригонометричними многочленами вигляду

$$g_j(x) = \sum_{k=-N_j}^{N_j} g_j(k) \exp(i\pi kx/\ell_j), \quad g_j(0) = 0, \quad j = 1,2,3,$$

то розв'язок задачі (1), (2) завжди існує, коли числа α_j, $j = 1,2,3$ є ірраціональні. У загальному випадку справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Нехай числа α_j, $j = 1,2,3$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) пар цілих чисел m і k виконуються нерівності*

$$\left|\alpha_j - \frac{m}{k}\right| \geqslant C|k|^{-(n_j+\varepsilon)}, \ C > 0, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1,2,3, \quad 0 < \varepsilon < 1; \tag{26}$$

нехай $g_j(x)$ – періодична з періодом $2\ell_j$ функція з класу $C^{n_j+3}([0;2\ell_j])$ така, що $\int_0^{2\ell_j} g_j(x)\,dx = 0$, $j = 1,2,3$. Тоді існує розв'язок задачі (1),(2) із класу $C^2(D)$, який неперервно залежить від функцій $g_j(x)$, $j = 1,2,3$, і зображається формулою (24).

Доведення. Зауважимо, що для довільного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ виконуються нерівності

$$|\exp(i\pi k\alpha_j) - \exp(-i\pi k\alpha_j)| = 2|\sin|\pi k\alpha_j - m(k)\pi|| \geqslant 4|k||\alpha_j - m(k)/k|, \ j = 1,2,3, \quad (27)$$

де $m(k)$ – ціле число, що задовольняє нерівність $|k\alpha_j - m(k)| < 1/2$. Оцінки (27) випливають з того, що $\sin x \geqslant 2x/\pi$ для всіх значень $x \in [0;\pi/2]$. За умов теореми з формул (25) випливають оцінки

$$|g_j(k)| \leqslant (\ell_j/\pi)^{n_j+3}|k|^{-(n_j+3)}\|g_j(x)\|_{C^{n_j+3}([0;2\ell_j])}, \quad j = 1,2,3. \quad (28)$$

На основі формули (24) та оцінок (26)-(28) отримуємо нерівність

$$\|u(t,x)\|_{C^2(D)} \leqslant \frac{B}{4C}\sum_{j=1}^{3} A_j\|g_j(x)\|_{C^{n_j+3}([0;2\ell_j])}, \quad (29)$$

де B – сума ряду $\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' 1/k^{2-\varepsilon}$, $A_j = (\ell_j/\pi)^{n_j+1}[2 + (\ell_j/\pi + 1)^2]$, $j = 1,2,3$. З оцінки (29) випливає доведення теореми.

Зауваження 1. *Згідно з теоремою Бореля [5, с. 12] для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел α_j нерівності (26) виконуються для всіх (крім скінченного числа) пар $m, k \in \mathbb{Z}$ при $n_j = 2$, $j = 1,2,3$.*

Наслідок 1. *Нехай функції $g_j(x)$ задовольняють умови теореми 2 при $n_j = 2$, $j = 1,2,3$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел α_j, $j = 1,2,3$ існує класичний розв'язок задачі (1), (2), який неперервно залежить від функцій $g_j(x)$, $j = 1,2,3$.*

Щоб отримати точніший, ніж метричний, опис класу чисел α_j, $j = 1,2,3$, для яких задача (1),(2) є некоректна, можна застосувати розмірність Хаусдорфа, яка дає змогу розрізняти множини нульової міри Лебега.

Лема (Теорема Ярніка-Безіковича [3, с. 21]). *Нехай $A(\omega)$ – множина дійсних чисел α, для яких нерівність*

$$|\alpha - p/q| < q^{-\omega}, \quad \omega > 2$$

має безмежну кількість розв'язків у цілих p і $q > 0$. Тоді розмірність Хаусдорфа множини $A(\omega)$ дорівнює $2/\omega$.

Із теореми 2 та леми випливає таке твердження.

Наслідок 2. *Для всіх чисел α_j, $j = 1,2,3$, крім множиини, розмірність Хаусдорфа якої дорівнює $2/\omega$ ($\omega > 2$), існує розв'язок задачі (1),(2), якщо функції $g_j(x)$ задовольняють умови теореми 2 при $n_j = [\omega]$, $j = 1,2,3$, де $[\omega]$ – ціла частина числа ω.*

Зауваження 2. *Із наслідка 2 бачимо, що за рахунок підвищення гладкості функцій $g_j(x)$, $j = 1,2,3$, можна домогтися того, що задача (1),(2) буде розв'язна для всіх чисел α_j, $j = 1,2,3$, крім множини, розмірність Хаусдорфа якої не перевищує як завгодно малого наперед заданого числа $\delta > 0$.*

Зауваження 3. *Якщо число α_1 – раціональне, то неоднорідна задача (1),(2) не має розв'язку.*

Зауваження 4. *Якщо в (2) взяти більше ніж три умови, тобто задати значення шуканої функції в точках $t_1, t_2, \ldots, t_p$, де $p > 3$, то однорідна задача (1),(5) буде мати лише тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли відрізки $t_2 - t_1, t_3 - t_2, \ldots, t_p - t_{p-1}$ є несумірні, а неоднорідна задача (1),(2), незалежно від розміщення точок t_j, $j = 1,\ldots,p$, не буде мати розв'язку.*

Результати роботи поширені на випадок більш загального гіперболічного рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} - b_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} - b_2\right) u = 0,$$

де λ_1, λ_2, b_1, b_2 – дійсні числа.

1. Пташник Б.Й. *Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами* // Доп. АН УРСР.— 1966.— N10.— С. 1254–1257.

2. Пташник Б.Й. *Аналог n-точечной задачи для гиперболических операторов с постоянными коэфициентами, распадающихся на множители первого порядка* // В сб. Методы приближенного решения дифференциальних уравнений.–К.: Ин-т математики АН УССР, 1973.— С. 230–242.

3. Пташник Б.Й. *Аналог n-точкової задачі для системи гіперболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами* // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1974.— N 8.— С. 709–712.

4. Пташник Б.Й. *Задача типу Валле-Пуссена для лінійних гіперболіних рівнянь із змінними коефіцієнтами* // Там само.— 1967.— N 2.— С. 127–130.

5. Пташник Б.Й. Некорректные граничные граничные задачи для диференциальных уравнений с частными производными.— К.: Наук. думка, 1984.— 264 с.

6. Пташник Б.Й., Штабалюк П.І. *Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних* // Мат. методи і фіз.мех. поля.— 1992.— Вип.35.— С. 210–215.

7. Борок В.М. *Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое* // Докл. АН СССР.— 1968.— Т.183, N5.— С. 995–998.

8. Атаманов Э.Р. *О единственности и устойчивости решения многоточечной задачи для псевдопараболического уравнения* // В сб. Вопр. корректности задач матем. физики.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977.— С. 12–22.

9. Арнольд В.И. *Малые знаменатели. I. Об отображении окружности на себя*// Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1961.— Т.25, N1.— С.21–86.

10. Jacobi C.G.I, *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium abeliarum inititur*// I. fur. Math.— 1835.— XIII.— P. 55–78.

11. Берник В.И., Мельничук Ю.В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа.— Минск: Наука и техника, 1988.— 144 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.06.96