УДК 517.95

ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ПРИ ВЕЛИКИХ ЗНАЧЕННЯХ ЧАСУ

М. О. Оліскевич

M. O. Oliskevytch. The behaviour of a solution of the many-points problem for the hyperbolic equation for the long time. The many-points mixed problem for a hyperbolic equation is considered. With the help of the Green function of a subsidiary problem the conditions of solutions by Liapunov stability for starting equation were obtained.

Розглянемо у смузі $P = (0,1) \times (0,\infty)$ мішану задачу для гіперболічного рівняння

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\gamma_i(x)}\frac{\partial}{\partial x}\right) y(x,t) = \sum_{j=0}^{n-1} R_j(x)\frac{\partial^{(n-1)}y(x,t)}{\partial t^j \partial x^{n-1-j}} + f(x)\,, \tag{1}$$

де $R_j(x)$ — диференційовні функції на $[0,1]$, а $\gamma_i(x)\,,(i=\overline{1,n})$ — дійсні, різні і не обертаються в нуль, причому

$$\gamma_1(x) < \dots < \gamma_p(x) < 0 < \gamma_{p+1}(x) < \dots < \gamma_n(x)\,, \quad p \geqslant n-p\,. \tag{2}$$

У точках відрізка $[0,1]$ задані умови

$$\begin{gathered}\sum_{l=0}^{l_r}\nu_l^r\,\frac{\partial^{(l)}y(0,t)}{\partial x^l} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{l_r}\alpha_{kl}^r\,\frac{\partial^{(l)}y(c_k,t)}{\partial x^l} = 0\,, \quad r=\overline{1,p}\,,\\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{l_r}\alpha_{kl}^r\,\frac{\partial^{(l)}y(c_k,t)}{\partial x^l} + \sum_{l=0}^{l_r}\mu_l^r\,\frac{\partial^{(l)}y(1,t)}{\partial x^l} = 0\,,\ r=\overline{p+1,n}\,,\end{gathered} \tag{3}$$

причому c_k такі, що $0 < c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n < 1$, $l_r = \overline{0,n-1}$ і $l_i \neq l_j$ якщо $i \neq j$. Крім того, задані початкові умови

$$\frac{\partial^{(k)}}{\partial t^k}y(x,0) = \varphi_k(x)\,, \quad k = 0,1,\ldots,n-1\,. \tag{4}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35L35; Secondary 35B35.

Описаним в [1] методом задачу (1),(3),(4) можна звести до відповідної мішаної задачі для системи. Введемо невідомі функції

$$u_i(x,t) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\gamma_j(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) y(x,t) \,, \quad i = \overline{1,n} \,. \tag{5}$$

Звідси похідні $(n-1)$-го порядку можна відшукати як лінійні комбінації від u_j, а саме

$$\frac{\partial^{(n-1)} y(x,t)}{\partial t^k \partial x^{n-k-1}} = \sum_{i=1}^{n} C_{k,i}(x) u_i(x,t) \,, \quad k = \overline{0, n-1} \,, \tag{6}$$

де

$$C_{k,i}(x) = \left(\gamma_i^k(x) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left(\frac{1}{\gamma_i(x)} - \frac{1}{\gamma_j(x)} \right) \right)^{-1} . \tag{7}$$

Підставивши отримані вирази для відповідних похідних у праву частину рівняння (1), отримаємо систему

$$\frac{\partial U}{\partial t} - A(x) \frac{\partial U}{\partial x} = F(x,U) \,, \tag{8}$$

де $A(x) = (\delta_{ij} \frac{1}{\gamma_i(x)})$, $U = (u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t))^T$, $F(x,U) = (f(x,U), \ldots, f(x,U))$, $f(x,U) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} R_j(x) \sum\limits_{i=1}^{n} C_{j,i}(x) u_i(x,t) + f(x)$.

Виразимо $\dfrac{\partial^{(k)} y(x,t)}{\partial t^j \partial x^{k-j}}$ через лінійні комбінації функцій u_j:

$$\frac{\partial^{(k)} y(x,t)}{\partial t^j \partial x^{k-j}} = \frac{\partial^{(k)} y(x,0)}{\partial t^j \partial x^{k-j}} + \int_0^t \frac{d}{d\tau} \frac{\partial^{(k)} y(x,\tau)}{\partial t^j \partial x^{k-j}} \, d\tau =$$

$$= \varphi_j^{(k-j)}(x) + \frac{\partial^{(k+1)} y(x,0)}{\partial t^{j+1} \partial x^{k-j}} t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\partial^{(k+2)} y(x,\tau)}{\partial t^{j+2} \partial x^{k-j}} \, d\xi =$$

$$= \varphi_j^{(k-j)}(x) + \varphi_{j+1}^{(k-j)}(x) t + \int_0^t \int_\xi^t \frac{\partial^{(k+2)} y(x,\xi)}{\partial t^{j+2} \partial x^{k-j}} \, d\tau d\xi =$$

$$= \varphi_j^{(k-j)}(x) + t\, \varphi_{j+1}^{(k-j)}(x) + \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial^{(k+2)} y(x,\tau)}{\partial t^{j+2} \partial x^{k-j}} \, d\tau =$$

$$= \varphi_j^{(k-j)}(x) + t\, \varphi_{j+1}^{(k-j)}(x) - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^{(k+2)} y(x,\tau)}{\partial t^{j+2} \partial x^{k-j}} \, d(t-\tau)^2 =$$

$$= \varphi_j^{(k-j)}(x) + t\, \varphi_{j+1}^{(k-j)}(x) + \frac{1}{2} t^2 \varphi_{j+2}^{(k-j)}(x) + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 \frac{\partial^{(k+3)} y(x,\tau)}{\partial t^{j+3} \partial x^{k-j}} \, d\tau \,.$$

Інтегруємо частинами дот, доки під інтегралом не одержимо похідні $(n-1)$-го порядку від $y(x,t)$. Замінивши їх за формулами (6), отримаємо

$$\frac{\partial^{(k)}y(x,t)}{\partial t^j \partial x^{k-j}} = \sum_{i=0}^{n-2-k} \frac{t^i}{i!}\varphi_{j+i}^{(k-j)}(x) + \\ + \frac{1}{(n-2-k)!}\sum_{i=1}^{n} C_{n-1-(k-j),i}(x)\int_0^t (t-\tau)^{n-2-k}u_i(x,\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Щоб отримати початкові і граничні умови для системи, продиференціюємо r-те рівняння в (3) за змінною t $(n-1-l_r)$ разів $(r=\overline{1,n})$ і j-ту умову в (4) — за змінною x $(n-1-j)$ разів $(j=\overline{0,n-1})$. Замінивши $(n-1)$-ші похідні функції $y(x,t)$ лінійними комбінаціями $u_j(x,t)$ за формулами (6), а похідні нижчих порядків за формулами (9), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n}\Bigg[\nu_{l_r}^r C_{n-1-l_r,j}(0)u_j(0,t) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{kl_r}^r C_{n-1-l_r,j}(c_k)u_j(c_k,t) + \mu_{l_r}^r C_{n-1-l_r,j}(1)u_j(1,t)\Bigg] + \\ + \sum_{l=0}^{l_r-1}\Bigg[\sum_{i=0}^{l_r-l-1}\bigg(\nu_l^r\varphi_{i+n-1-l}^{(l)}(0) + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{kl}^r\varphi_{i+n-1-l}^{(l)}(c_k) + \mu_l^r\varphi_{i+n-1-l}^{(l)}(1)\bigg)\frac{t^i}{i!} + \\ + \frac{1}{(l_r-l-1)!}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t (t-\tau)^{l_r-l-1}\bigg(\nu_l^r C_{n-1-l,i}(0)u_i(0,\tau) + \\ + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{kl}^r C_{n-1-l,i}(c_k)u_i(c_k,\tau) + \mu_l^r C_{n-1-l,i}(1)u_i(1,\tau)\bigg)d\tau\Bigg] = 0\,,\ r=\overline{1,n} \tag{10}$$

(вважаємо, що $\nu_l^r = 0$ для $r=\overline{p,n}$, $\mu_l^r = 0$ для $r=\overline{1,p}$, $l=\overline{0,l_r}$) та

$$\sum_{k=1}^{n} C_{j,k}(x)u_k(x,0) = \varphi_j^{(n-1-j)}(x)\,, \quad j=0,1,\ldots,n-1\,.$$

Припустимо, що $\varphi_{n-1-i}(0)=0$, $\varphi_{n-1-i}(c_k)=0$, $\varphi_{n-1-i}(1)=0$, $(i=\overline{1,m}$, $m=\max\limits_{1\leqslant r\leqslant n} l_r)$. Зауважимо, що $p-1\leqslant m$, оскільки $l_i\neq l_j$ при $i\neq j$. Позначимо

$$I_0 = (\alpha_{ij}^0) = \begin{pmatrix} \nu_{l_1}^1 C_{n-1-l_1,1}(0) & \ldots & \nu_{l_1}^1 C_{n-1-l_1,n}(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \nu_{l_p}^p C_{n-1-l_p,1}(0) & \ldots & \nu_{l_p}^p C_{n-1-l_p,n}(0) \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_{n+1} = (\alpha_{ij}^{n+1}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 0 \\ \mu_{l_{p+1}}^{p+1} C_{n-1-l_{p+1},1}(1) & \dots & \mu_{l_{p+1}}^{p+1} C_{n-1-l_{p+1},n}(1) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \mu_{l_n}^{n} C_{n-1-l_n,1}(1) & \dots & \mu_{l_n}^{n} C_{n-1-l_n,n}(1) \end{pmatrix},$$

$I_k = (\alpha_{ij}^k) = (\alpha_{k,l_i}^i C_{n-1-l_i,j}(c_k))\,,(i,j = \overline{1,n}\,,\, k = \overline{1,n}),\quad U_0(x) = C^{-1}(x)\Phi(x)$, де $\Phi(x) = (\varphi_0(x),\dots,\varphi_{n-1}(x))$, і запишемо (3),(4) у векторному вигляді

$$\begin{gathered} I_0U(0,t) + \sum_{i=1}^{n} I_iU(c_i,t) + I_{n+1}U(1,t) + \sum_{l=0}^{l_r-1}\frac{1}{(l_r-l-1)!}\times \\ \times\int_0^t (t-\tau)^{l_r-l-1}\left(I_0^lU(0,\tau) + \sum_{k=1}^{n} I_k^lU(c_k,\tau) + I_{n+1}^lU(1,\tau)\right)d\tau = 0\,, \end{gathered} \tag{11}$$

$$U(x,0) = U_0(x)\,, \tag{12}$$

(I_0^l, I_k^l, $(k=\overline{1,n})$, I_{n+1}^l — матриці, побудовані з відповідних коефіцієнтів в (12)).

Нехай $L_BU = A(x)U_x + B(x)U$ — лінійний диференціальний оператор, $B(x) = (b_{ij}(x))\,,(i,j=\overline{1,n})\,,\quad b_{ij}(x)$ — диференційовні функції на $[0,1]$. Покажемо, що спектр оператора L_B обмежений праворуч, тобто існує $\varkappa_B = \sup\operatorname{Re}\lambda_k\,,\quad (\lambda_k$ — власні значення оператора L_B). Для цього розглянемо у смузі P мішану задачу для лінійної гіперболічної системи

$$U_t - L_BU = 0\,,\quad (x,t)\in P\,. \tag{13}$$

Застосувавши перетворення Лапласа за змінною t, отримуємо крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$(L_B - \lambda I)v(x,\lambda) = -U_0(x)\,, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} I_0v(0,\lambda) + I_1v(c_1,\lambda) + \dots + I_nv(c_n,\lambda) + I_{n+1}v(1,\lambda) + \\ + \sum_{l=0}^{l_r-1}\left(I_0^lv(0,\lambda) + \sum_{k=1}^{n} I_k^lv(c_k,\lambda) + I_{n+1}^lv(c_k,\lambda)\right)\lambda^{l-l_r} = 0\,, \end{gathered} \tag{15}$$

де $v(x,\lambda) = [v_1(x,\lambda),\dots,v_n(x,\lambda)]^T$, $v_i(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty u_i(x,t)e^{-\lambda t}\,dt$, неперервно диференційовний розв'язок якої записують у вигляді

$$v(x,\lambda) = -\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)U_0(\xi)\,d\xi$$

($G(x,\xi,\lambda)$ — функція Гріна оператора $L_B - \lambda I$). Тоді розв'язок задачі (13),(11),(12) знайдемо за формулою

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} v(x,\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda\,,$$

де $\sigma > \varkappa_B$.

Запишемо зображення функції Гріна $G(x,\xi,\lambda)$ в правому секторі

$$|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon\,,$$

припустивши що

$$\nu^i_{l_i} \neq 0\,, \quad i=\overline{1,p}, \qquad \mu^i_{l_i} \neq 0\,, \quad i=\overline{p+1,n}. \tag{16}$$

Теорема 1. *Функцію Гріна $G(x,\xi,\lambda)$ оператора $L_B - \lambda I$, де $L_B = A\dfrac{d}{dx} + B$, при виконанні умов (2),(11),(16) в секторі $|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ з довільним ε для $|\lambda| \to \infty$ можна асимптотично зобразити*

$$G_{ij}(x,\xi,\lambda) = e^{\lambda f_{ij}(x,\xi)}\left[V_{ij}(x,\xi) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\,, \tag{17}$$

причому функції $f_{ij}(x,\xi) < 0$ для всіх $x \geqslant 0, \xi \leqslant 1$, за винятком точок $x=\xi$, де деякі $f_{ij}=0$.

Доведення. У праці [2] доведено, що матрицю $Y(x,\lambda)$ фундаментальних розв'язків системи $Ly - \lambda y = 0$ можна зобразити у вигляді

$$Y_{ij}(x,\lambda) = e^{\lambda\Gamma_j(x)+B_j(x)}\left(\delta_{ij} + \frac{p^1_{ij}(x)}{\lambda} + \cdots + \frac{p^{k+1}_{ij}(x)}{\lambda^{k+1}} + \frac{\overline{w}^{k+1}_{ij}(x,\lambda)}{\lambda^{k+1}}\right), \quad i,j=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Тут

$$\Gamma_j(x) = \int_0^x \gamma_j(\theta)d\theta\,, \quad B_j(x) = -\int_0^x b_{jj}(\theta)\gamma_j(\theta)d\theta\,,$$

а функції $\overline{w}^{k+1}_{ij}(x,\lambda)$ неперервно диференційовні за змінною $x \in [0,1]$, аналітичні за λ в областях $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ для $|\lambda| > N$, і $|\overline{w}^{k+1}_{ij}(x,\lambda)| \leqslant B$, де стала B залежить від

$$\max_{ij}\left(\|b_{ij}\|_{C^{k+1}}, \|\gamma_i(x)\|_{C^{k+1}}\right)\,,$$

а функції $p^m_{ij}(x)$ належать простору $C^{k+2-m}[0,1]$, $m=1,\ldots,k+1$. Будемо позначати $[f] = f + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ для великих $|\lambda|$. Тоді (18) можна переписати у вигляді

$$Y_{ij}(x,\lambda) = e^{\lambda\Gamma_j(x)+B_j(x)}[\delta_{ij}]\,, \tag{19}$$

а елементи оберненої матриці —

$$Z_{ij}(x,\lambda) = e^{-\lambda\Gamma_i(x)-B_i(x)}[\delta_{ij}]\,.$$

Врахувавши зображення (19) і використавши результати праці [3,§1], функцію Гріна можна зобразити у вигляді

$$G(x,\xi) = \overline{G}(x,\xi) - Y(x,\lambda)F^{-1}\times\big(I_0\overline{G}(0,\xi) + I_1\overline{G}(c_1,\xi) + \cdots + I_n\overline{G}(c_n,\xi) + I_{n+1}\overline{G}(1,\xi)\big)\,,$$

де $F = I_0Y(0) + I_1Y(c_1) + \cdots + I_nY(c_n) + I_{n+1}Y(1)\,,$

$$\overline{G}(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2}Y(x,\lambda)Z(\xi,\lambda) & \text{для } \xi < x\,, \\ -\frac{1}{2}Y(x,\lambda)Z(\xi,\lambda) & \text{для } \xi > x\,. \end{cases}$$

Позначимо $c_0 = 0$ і $c_{n+1} = 1$. Тоді для кожного $l = 0,1,\dots,n+1$ в прямокутнику $P_l = \{(x,\xi)|c_l < \xi < c_{l+1}\,, 0 < x < 1\}$ функція Гріна має вигляд

$$G(x,\xi,\lambda) = Y(x,\lambda)\bigg[\pm\frac{1}{2} - \frac{1}{2}F^{-1}\bigg(-\sum_{j=0}^{l} I_jY(c_j) + \sum_{j=l+1}^{n+1} I_jY(c_j)\bigg)\bigg] \times Z(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi)\,.$$

Введемо символи

$$\delta_{ij}^{*} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{для } \operatorname{Re}\lambda\gamma_j \leqslant 0 \\ 0 & \text{для } \operatorname{Re}\lambda\gamma_j > 0 \end{cases}, \quad \delta_{ij}^{**} = \begin{cases} 0 & \text{для } \operatorname{Re}\lambda\gamma_j \leqslant 0 \\ \delta_{ij} & \text{для } \operatorname{Re}\lambda\gamma_j > 0 \end{cases},$$

а матриці, побудовані з них, позначимо $I^*(\lambda)$ і $I^*(\lambda)$ відповідно.

Позначимо

$$\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}F^{-1}\left(-\sum_{j=0}^{l} I_jY(c_j) + \sum_{j=l+1}^{n+1} I_jY(c_j)\right) \equiv I^* + U_1,$$

$$-\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}F^{-1}\left(-\sum_{j=0}^{l} I_jY(c_j) + \sum_{j=l+1}^{n+1} I_jY(c_j)\right) \equiv -I^{**} + U_2\,.$$

Тоді для $(x,\xi) \in P_l \quad (l = \overline{0,n+1})$ матимемо

$$U = U_1 = U_2 = F^{-1}\left[\sum_{j=0}^{l} I_jY(c_j)I^{**} - \sum_{j=l+1}^{n+1} I_jY(c_j)I^*\right]$$

і функцію $G(x,\xi,\lambda)$ можемо записати у вигляді

$$G(x,\xi,\lambda) = G_1(x,\xi,\lambda) + G_2(x,\xi,\lambda)\,, \tag{20}$$

де

$$G_1(x,\xi,\lambda) = Y(x,\lambda)\left[\left\{\begin{array}{ll} -I^{**}(\lambda) & \text{для } \xi < x\,, \\ I^{*}(\lambda) & \text{для } \xi > x \end{array}\right.\right] Z(\xi)A^{-1}(\xi)\,,$$

$$G_2(x,\xi,\lambda) = Y(x,\lambda)U(\lambda)Z(\xi)A^{-1}(\xi)\,.$$

Розглянемо асимптотичну поведінку $G(x,\xi,\lambda)$ в правому секторі

$$|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon\,.$$

Дослідимо визначник матриці $F(\lambda)$

$$K(\lambda) = \det|F(\lambda)| = [\alpha_{ij}^0] + \sum_{k=1}^{n}[\alpha_{ij}^k]e^{\lambda\Gamma_j(c_k)+B_j(c_k)} + [\alpha_{ij}^{n+1}]e^{\lambda\Gamma_j(1)+B_j(1)}\,.$$

Позначимо $\Gamma_j = \Gamma_j(1)\,, B_j = B_j(1)\,, E^i(x) = e^{\lambda\Gamma_i(x)+B_i(x)}$. Якщо знехтувати малими доданками, то $K(\lambda)$ можна записати у вигляді

$$\left|\begin{array}{cccc} [\alpha_{11}^0] & \dots & [\alpha_{1,p+1}^n]E^{p+1}(c_n) & \dots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dots & [\alpha_{p,p}^0] & \dots & [\alpha_{p,n}^n]E^n(c_n) \\ [\alpha_{p+1,1}^1]E^1(c_1) & \dots & [\alpha_{p+1,p+1}^{n+1}]E^{p+1}(1) & \dots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dots & [\alpha_{n,p}^1]E^p(c_1) & \dots & [\alpha_{n,n}^{n+1}]E^{p+1}(1) \end{array}\right|.$$

Звідси видно, що існує $s > 0$ таке, що для $\operatorname{Re}\lambda > s$ детермінант $K(\lambda)$ не має коренів, і розгортаючи його за мінорами останніх $n-p$ рядків, отримаємо

$$K(\lambda) = e^{\lambda\sum\limits_{k=p+1}^{n}\Gamma_k + \sum\limits_{k=p+1}^{n}B_k}\left[\ \|\alpha_{ij}^0\|_{i,j\leqslant p}\ \|\alpha_{ij}^{n+1}\|_{i,j>p} + \varepsilon\ \right],$$

де ε — функція, що спадає до нуля при $\operatorname{Re}\lambda \to \infty$. Припустимо, що

$$\det|\alpha_{ij}^0|_{i,j\leqslant p} \neq 0\,, \quad \det|\alpha_{ij}^{n+1}|_{i,j>p} \neq 0\,.$$

Якщо враховувати вигляд елементів матриць I_0 і I_{n+1}, легко перевірити, що ці умови еквівалентні умовам

$$\nu_{l_i}^i \neq 0\,, \quad i = \overline{1,p}, \quad \mu_{l_i}^i \neq 0\,, \quad i = \overline{p+1,n},$$

$$\left|\begin{array}{ccc} \gamma_1^{l_1}(0) & \dots & \gamma_p^{l_1}(0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1^{l_p}(0) & \dots & \gamma_p^{l_p}(0) \end{array}\right| \neq 0\,, \quad \left|\begin{array}{ccc} \gamma_{p+1}^{l_{p+1}}(1) & \dots & \gamma_n^{l_{p+1}}(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{p+1}^{l_n}(1) & \dots & \gamma_n^{l_n}(1) \end{array}\right| \neq 0\,.$$

Останні два визначники не дорівнюють нулю, оскільки ми припустили, що $l_i \neq l_j$ для $i \neq j$. Алгебраїчні доповнення K_{ij} елементів F_{ij} матриці $F(\lambda)$ будуть такі:

$$K_{ij}(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda \sum\limits_{k=p+1}^{n} \Gamma_k} [V_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda \left(\Gamma_{p+1}(c_n) + \sum\limits_{k=p+2}^{n} \Gamma_k \right)} [V_{ij}] & \text{для } i > p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda \left(\Gamma_p(c_1) + \sum\limits_{k=p+1, k\neq j}^{n} \Gamma_k \right)} [V_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j > p\,, \\ e^{\lambda \sum\limits_{k=p+1, k\neq j}^{n} \Gamma_k} [V_{ij}] & \text{для } i > p, j > p \end{cases}$$

(будемо позначати через V_{ij} числа чи функції від x, ξ значення яких, нас не цікавлять).

Тепер можна обчислити елементи матриці $F^{-1}(\lambda) = (\Phi_{ij}(\lambda))$:

$$\Phi_{ij}(\lambda) = \begin{cases} [V_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda(\Gamma_p(c_1) - \Gamma_i)} [V_{ij}] & \text{для } i > p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda(\Gamma_{p+1}(c_n) - \Gamma_{p+1})} [V_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j > p\,, \\ e^{-\lambda \Gamma_i} [V_{ij}] & \text{для } i > p, j > p\,. \end{cases}$$

Обчисливши

$$\sum_{j=1}^{l} I_j Y(c_j) I^{**} - \sum_{j=l+1}^{n+1} I_j Y(c_j) I^{*} =$$

$$= \begin{pmatrix} [\alpha_{1,1}^1] E^1(c_{l+1}) & \dots & [\alpha_{1,p+1}^l] E^{p+1}(c_l) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & [\alpha_{n,p}^1] E^p(c_{l+1}) & \dots & [\alpha_{n,n}^l] E^n(c_l) \end{pmatrix},$$

знаходимо

$$U(\lambda) = F^{-1}(\lambda) \left[\sum_{j=1}^{l} I_j Y(c_j) I^{**} - \sum_{j=l+1}^{n+1} I_j Y(c_j) I^{*} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} [v] e^{\lambda \Gamma_1(c_{l+1})} & \dots & [v] e^{\lambda \Gamma_{p+1}(c_l)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & [v] e^{\lambda(\Gamma_p(c_{l+1}) - \Gamma_n)} & \dots & [v] e^{\lambda(\Gamma_n(c_l) - \Gamma_n)} \end{pmatrix}.$$

Отже, другий доданок функції Гріна можна записати у вигляді

$$g_{ij}^{(2)}(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} e^{\lambda(\Gamma_j(c_{l+1}) - \Gamma_j(\xi) + \Gamma_i(x)} [v_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda(\Gamma_j(c_l) - \Gamma_j(\xi) + \Gamma_i(x)} [v_{ij}] & \text{для } i > p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda(\Gamma_j(c_{l+1}) - \Gamma_i + \Gamma_i(x) - \Gamma_j(\xi))} [v_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j > p\,, \\ e^{\lambda(\Gamma_j(c_l) - \Gamma_i + - \Gamma_j(\xi) + \Gamma_i(x)} [v_{ij}] & \text{для } i > p, j > p\,. \end{cases}$$

Звідси видно, що всі показники від'ємні для всіх $(x,\xi) \in P_l$ за можливим винятком точок $x = 0, \xi = c_l$, $x = 0, \xi = c_{l+1}$, $x = 1, \xi = c_l$ і $x = 1, \xi = c_{l+1}$.

Розглянемо перший доданок функції Гріна в зображенні (20)

$$G_1(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} -Y(x,\lambda)I^{**}(\lambda)Z(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi) & \text{для } x < \xi\,, \\ \;\;Y(x,\lambda)I^{*}(\lambda)Z(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi) & \text{для } x > \xi\,. \end{cases}$$

Тут всі елементи g^1_{ij} містять множники $e^{\lambda(\Gamma_i(x)-\Gamma_i(\xi))}$, причому якщо $x < \xi$, то $i > p$, а якщо $x > \xi$, то $i \leqslant p$, тобто вони всі від'ємні. Отже, теорему доведено.

На основі теореми 1 методом, описаним у [4], можна довести таку теорему.

Теорема 2. *Нехай $A(x) \in C^2([0,1])$, $\varkappa_B < -\gamma(\gamma > 0)$ і $R_j(x) \in C^2([0,1])$, $j = \overline{0, n-1}$. Тоді нульовий розв'язок задачі (9),(10),(11) експоненціально стійкий з показником $\gamma - \varepsilon$ (ε — довільне число таке, що $\gamma - \varepsilon > 0$) в просторі $C^1([0,1])$, тобто існує $\delta > 0$ для довільної функції $U_0(x) \in C^1([0,1])$, яка задовольняє умови узгодженості нульового і першого порядку, а також оцінку $\|U_0(x)\|_{C^1[0,1]} \leqslant \delta$, для всіх t існує єдиний класичний розв'язок $U(x,t)$, причому*

$$\|U(x,t)\|_{C^1([0,1])} \leqslant Ke^{-(\gamma-\varepsilon)t}\|U_0(x)\|_{C^1([0,1])}\,,$$

де K не залежить від $t, U_0(x)$.

Прийнявши $k = 0$ в (9), отримаємо розв'язок рівняння у вигляді

$$y(x,t) = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{t^i}{i!}\varphi_i(x) + \frac{1}{(n-2)!}\sum_{j=0}^{n} C_{n-1,j}(x)\int_0^t (t-\tau)\,u_j(x,\tau)\,d\tau\,,$$

зростання якого буде визначатися першим доданком. Тобто розв'язок зростає як многочлен.

Якщо ж виконуються умови

$$\varphi_i(x) = 0 \qquad \text{для} \quad i = 0, 1, \ldots, n-2\,, \tag{21}$$

то розв'язок задачі (1),(3),(4) експоненціально стійкий, тобто справедливий

Наслідок. *Якщо $A(x), R_j(x) \in C^2([0,1])\,, (j = \overline{0, n-1})$ і $\varkappa_B < -\gamma$, то при виконанні умов (21) розв'язок задачі (1),(3),(4) експоненціально стійкий з показником $\gamma - \varepsilon$ в просторі $C^1([0,1])$, тобто*

$$\|y(x,t)\|_{C^1([0,1])} \leqslant K\,e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\|A(x)\|_{C^1([0,1])}\,\|\varphi_{n-1}(x)\|_{C^1([0,1])}\,,$$

де K не залежить від $t, \varphi_{n-1}(x)$.

1. Кирилич В. М. *Про одну нелокальну задачу типу Дарбу для строго гіперболічного рівняння довільного порядку.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.–мат. — 1987. — Вип.28. — С. 27–31.

2. Birkhoff G.D., Lander R.E. *The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order.* // Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.— 1923.— V.58, N2.— P.51–128.

3. Кравчук М. О. *Стійкість за Ляпуновим однієї гіперболічної системи.* // Деп. в ДНТБ України — N 2044 — Ук 95 від 04.09.95 р.

4. Елтышева Н.А. *О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости.* // Матем. сб.— 1988.— Т.135 (177),N2.— С.186–209.

5. Брушлинский К.В. *О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций.* // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1956.— Т.23.—С.893–912.

Стаття надійшла до редколегії 11.06.96