УДК 517.95

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВІДНОСТІ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

С. М. Ковальчук

S. M. Koval'chuk. Determination of temperature conductivity coefficient of rectangular plate. Inverse prblems in rectangle with the integral overspesified conditions are considered. The unknown temperature conductivity coefficient is only time dependent. Existence and unique conditions for the solutions of this problems are established.

У праці розглянуто обернені задачі визначення залежного лише від часу коефіцієнта температуропровідності прямокутної пластини з класичними крайовими умовами першого та другого роду. Умови перевизначення задані в інтегральній формі. Одновимірні задачі з інтегральними умовами перевизначення досліджуються в [1].

1. В області $D = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : x \in (0,l),\ y \in (0,h), t \in (0,T)\}$ розглянемо задачу знаходження функцій $(u(x,y,t), a(t)) \in C^{2,2,1}(D) \cap C^{1,1,0}(\overline{D}) \times C[0,T]$ [2], $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, які задовольняють рівняння

$$u_t = a(t)\,\Delta u, \qquad (x,y,t) \in D, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \qquad x \in [0,l],\ y \in [0,h], \tag{2}$$

крайові умови

$$u_x(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u_x(l,y,t) = \mu_2(y,t), \quad y \in [0,h],\ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u_y(x,0,t) = \nu_1(x,t), \quad u_y(x,h,t) = \nu_2(x,t), \quad x \in [0,l],\ t \in [0,T] \tag{4}$$

та умову перевизначення

$$\int_0^l u(x,0,t)\,dx + \int_0^h u(l,y,t)\,dy - \int_0^l u(x,h,t)\,dx - \int_0^h u(0,y,t)\,dy = \varkappa(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35R30; Secondary 35K20.

Припустимо, що виконуються такі умови

Умова (A). $\mu_1(y,0)=\varphi_x(0,y),\quad \mu_2(y,0)=\varphi_x(l,y),\qquad y\in[0,h],$
$\nu_1(x,0)=\varphi_y(x,0),\quad \nu_2(x,0)=\varphi_y(x,h),\qquad x\in[0,l].$

Умова (B). $\varphi(x,y)\in C^2([0,l]\times[0,h]),\quad \nu_i(x,t)\in C^{0,1}([0,l]\times[0,T]),$
$\mu_i(y,t)\in C^{0,1}([0,h]\times[0,T]),\ i=1,2;\quad \varkappa(t)\in C^1[0,T].$

Зведемо задачу (1)–(5) до еквівалентного операторного рівняння. Для цього за допомогою функції Гріна знаходимо розв'язок $u(x,y,t)$ задачі (1)–(4)

$$\begin{aligned}u(x,y,t)=&\int_0^l d\xi\int_0^h\varphi(\xi,\eta)G(a,x,y,t,\xi,\eta,0)\,d\eta+\\&+\int_0^t a(\tau)\,d\tau\int_0^h(\mu_2(\eta,\tau)G(a,x,y,t,l,\eta,\tau)-\mu_1(\eta,\tau)G(a,x,y,t,0,\eta,\tau))\,d\eta+\\&+\int_0^t a(\tau)\,d\tau\int_0^l(\nu_2(\xi,\tau)G(a,x,y,t,\xi,h,\tau)-\nu_1(\xi,\tau)G(a,x,y,t,\xi,0,\tau))\,d\xi,\end{aligned}\tag{6}$$

де

$$\begin{aligned}&G(a,x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\\&=\frac{1}{4\pi(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right)+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right)\right)\times\\&\times\left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right)+\exp\left(-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right)\right),\qquad \Theta(t)=\int_0^t a(\tau)\,d\tau,\end{aligned}$$

та підставляємо його в умову (5). Отримуємо рівняння стосовно $a(t)$, яке після диференціювання за t та нескладних перетворень зведемо до вигляду

$$a(t)=Pa(t),\tag{7}$$

де оператор P визначається формулою

$$\begin{aligned}Pa(t)=\sqrt{\pi}\varkappa'(t)\Bigg(&\frac{1}{\sqrt{\Theta(t)}}\int_0^{h/2}\psi_1(\eta)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\eta+nh)^2}{4\Theta(t)}\right)d\eta-\\&-\frac{1}{\sqrt{\Theta(t)}}\int_0^{l/2}\psi_2(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\xi+nl)^2}{4\Theta(t)}\right)d\xi+\\&+\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\Theta(t)-\Theta(\tau)}}\int_0^{h/2}M_1(\eta,\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{(\eta+nh)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right)d\eta-\end{aligned}$$

$$-\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\Theta(t)-\Theta(\tau)}} \int_0^{l/2} M_2(\xi,\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+nl)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) d\xi +$$

$$+\int_0^t \frac{s_1(\tau)}{\sqrt{\Theta(t)-\Theta(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 l^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) d\tau -$$

$$-\int_0^t \frac{s_2(\tau)}{\sqrt{\Theta(t)-\Theta(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) d\tau \Bigg)^{-1}.$$

У попередній формулі використані позначення

$$\psi_1(y) = \int_0^l (\varphi_{yy}(x,y) - \varphi_{yy}(x,h-y))\,dx + \varphi_x(l,y) - \varphi_x(0,y) - \varphi_x(l,h-y) + \varphi_x(0,h-y),$$

$$\psi_2(x) = \int_0^h (\varphi_{xx}(x,y) - \varphi_{xx}(l-x,y))\,dy + \varphi_y(x,h) - \varphi_y(x,0) - \varphi_y(l-x,h) + \varphi_y(l-x,0),$$

$$M_1(y,t) = \mu_{2_t}(y,t) - \mu_{1_t}(y,t) - \mu_{2_t}(h-y,t) + \mu_{1_t}(h-y,t),$$

$$M_2(x,t) = \nu_{2_t}(x,t) - \nu_{1_t}(x,t) - \nu_{2_t}(l-x,t) + \nu_{1_t}(l-x,t),$$

$$s_1(t) = \int_0^h (\mu_{1_t}(y,t) + \mu_{2_t}(y,t))\,dy, \qquad s_2(t) = \int_0^l (\nu_{1_t}(x,t) + \nu_{2_t}(x,t))\,dx.$$

У цьому випадку було враховано, що для $p \geqslant 0$

$$\int_0^l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4p}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4p}\right)\right) dx = 2\sqrt{\pi p}, \quad \xi \in [0,l],$$

$$\int_0^l \psi(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+nl)^2}{p}\right) d\xi =$$
$$= \int_0^{l/2} (\psi(\xi) - \psi(l-\xi)) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+nl)^2}{p}\right) d\xi.$$

Якщо пара функцій $u(x,y,t)$ та $a(t)$ є розв'язком задачі (1)–(5), то $a(t)$ є розв'язком рівняння (7) і, навпаки, якщо $a(t)$ – неперервний і додатний на [0,T] розв'язок рівняння (7), то знайшовши $u(x,y,t)$ з (6), отримуємо розв'язок $(u(x,y,t), a(t))$ задачі (1)–(5).

Нехай виконується

Умова(С). $\psi_1(y) \geqslant 0,\ \psi_2(x) \leqslant 0,\ (\psi_1(y))^2 + (\psi_2(x))^2 > 0,\ x \in [0,l/2],\ y \in [0,h/2];$
$M_1(y,t) \geqslant 0,\ M_2(x,t) \leqslant 0,\ x \in [0,l/2],\ y \in [0,h/2],\ t \in [0,T];$
$\varkappa'(t) > 0,\ \ t \in [0,T];\quad s_1(t) \geqslant 0,\ s_2(t) \leqslant 0,\ t \in [0,T].$

Використовуючи теорему Шаудера про нерухому точку [3], покажемо, що існує неперервний додатний на $[0,T]$ розв'язок рівняння (7). Спочатку встановимо оцінки розв'язків цього рівняння. Будемо вважати, що $\psi_1(y) > 0$, якщо $y \in [0, h/2]$. Тоді з рівняння (7) отримуємо нерівність

$$\min_{[0,T]} a(t) \geqslant \frac{C_0}{C_1 + C_2 \min\limits_{[0,T]} a(t)^{-1/2}} \tag{8}$$

з константами

$$C_0 = \min_{[0,T]} \varkappa'(t), \quad C_2 = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \left(\max_{[0,T]} s_1(t) - \min_{[0,T]} s_2(t) \right),$$
$$C_1 = \max_{[0,h/2]} \psi_1(y) - \min_{[0,l/2]} \psi_2(x) + T \left(\max_{[0,h/2]\times[0,T]} M_1(y,t) - \min_{[0,l/2]\times[0,T]} M_2(x,t) \right).$$

З нерівності (8) отримуємо оцінку для $a(t)$ знизу:

$$0 < A_0 \leqslant a(t), \quad \text{де } A_0 = \frac{1}{4C_1^2} \left(\sqrt{C_2^2 + 4C_0C_1} - C_2 \right)^2.$$

Оцінюючи $a(t)$ зверху, з рівняння (7) маємо

$$a(t) \leqslant \frac{C_3}{I(\Theta(t))}, \tag{9}$$

де $C_3 = \max\limits_{[0,T]} \varkappa'(t) / \min\limits_{[0,h/2]} \psi_1(y)$ та

$$I(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int_0^{h/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\eta + nh)^2}{4s} \right) d\eta.$$

Покажемо, що $I(\Theta(t)) > 0$. Для цього спочатку оцінимо величину $\Theta(t)$ зверху. Замінивши в нерівності (9) змінну t на τ і проінтегрувавши за τ в межах від 0 до t, одержимо нерівність

$$\int_0^t I(\Theta(\tau)) a(\tau)\, d\tau \leqslant C_3\, t,$$

яку після заміни $s = \Theta(\tau)$ під знаком інтеграла запишемо так:

$$\int_0^{\Theta(t)} I(s)\, ds \leqslant C_3\, t. \tag{10}$$

Функція $r(\sigma) = \int_0^\sigma I(s)\, ds$ є неперервною монотонно зростаючою, тому існує обернена до неї неперервна монотонно зростаюча функція $r^{-1}(\sigma)$, визначена на деякому відрізку $[0, b]$.

Знайдемо число b. Для цього розглянемо допоміжну задачу

$$v_\sigma = v_{yy} + 1, \qquad y \in (0, h/2),\ \sigma > 0,$$
$$v(y,0) = 0, \quad y \in [0, h/2], \qquad v_y(0,\sigma) = v(h/2,\sigma) = 0, \quad \sigma \geqslant 0,$$

розв'язок якої визначимо за допомогою функції Гріна у вигляді

$$v(y,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_0^{h/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+nh)^2}{4s}\right) + \exp\left(-\frac{(y+\eta+nh)^2}{4s}\right)\right) d\eta.$$

Оскільки $r(\sigma) = v(0,\sigma)$, то використовуючи метод Фур'є для знаходження $v(y,\sigma)$, отримуємо

$$r(\sigma) = \frac{4h^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \left(1 - \exp\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{h^2}\sigma\right)\right).$$

Звідси $b = \lim\limits_{\sigma\to\infty} r(\sigma) = h^2/8$.

Отже, з нерівності (10) маємо оцінку для $\Theta(t)$:

$$\Theta(t) \leqslant r^{-1}(C_3 t), \quad t \in [0, t_0],$$

де $t_0 = \min\{T, b/C_3\}$. Для того, щоб оцінити $I(\Theta(t))$ знизу, скористаємося задачею

$$w_t = w_{yy}, \qquad y \in (0, h/2), \quad t \in (0,T),$$
$$w(y,0) = 1, \quad y \in [0, h/2], \qquad w_y(0,t) = 0, \quad w(h/2,t) = 1, \quad t \in [0,T].$$

Єдиним розв'язком цієї задачі є функція $w(y,t) \equiv 1$. З іншого боку, записавши $w(y,t)$ за допомогою функції Гріна, отримуємо рівність

$$w(0,t) = I(\Theta(t)) + \frac{h}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a(\tau)}{(\Theta(t)-\Theta(\tau))^{3/2}} \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{(n+1/2)^2 h^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) d\tau = 1.$$

Звідси

$$I(\Theta(t)) = 1 - \frac{h}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\Theta(t)} \frac{1}{\sigma^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{(n+1/2)^2 h^2}{4\sigma}\right) d\sigma \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \frac{h}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{r^{-1}(C_3 t)} \frac{1}{\sigma^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{(n+1/2)^2 h^2}{4\sigma}\right) d\sigma \geqslant C_4 > 0.$$

Повертаючись до (9), отримуємо оцінку розв'язків рівняння (7) зверху:

$$a(t) \leqslant A_1 < \infty, \quad \text{де } A_1 = C_3/C_4.$$

Із встановлених оцінок та умов (B), (C) випливає, що оператор P переводить опуклу замкнену множину $\mathcal{N} = \{a(t) \in C[0,t_0] : 0 < A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1 < \infty\}$ у себе. З того, що

$$\lim_{t\to 0} Pa(t) = \frac{\varkappa'(0)}{\psi_1(0) - \psi_2(0)}$$

і для всіх $t > 0$ є незалежна від $a(t) \in \mathcal{N}$ оцінка

$$|Pa(t+\delta) - Pa(t)| < C(\delta),$$

де $C(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, випливає, що множина $\{P\mathcal{N}\}$ є одностайно неперервною. Згідно з теоремою Шаудера рівняння (7) має хоча б один розв'язок $a(t) \in \mathcal{N}$. Підставляючи $a(t)$ в (6), отримуємо функцію $u(x,y,t)$ з потрібною гладкістю в області D та на її межі.

Існування розв'язку $(u(x,y,t), a(t))$ задачі (1)–(5) встановлено, доведемо його єдиність.

Якщо $(u_i(x,y,t), a_i(t))$, $i = 1,2$ — два різні розв'язки задачі (1)–(5), то функції $u(x,y,t) = u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t)$, $a(t) = a_1(t) - a_2(t)$ задовольняють такі умови:

$$u_t = a_1(t)\,\Delta u + a(t)\,\Delta u_2, \qquad (x,y,t) \in D, \tag{11}$$

$$u(x,y,0) = 0, \quad x \in [0,l], \quad y \in [0,h], \tag{12}$$

$$u_x(0,y,t) = u_x(l,y,t) = \\ = u_y(x,0,t) = u_y(x,h,t) = 0, \quad x \in [0,l],\, y \in [0,h],\, t \in [0,T], \tag{13}$$

$$\int_0^l u(x,0,t)dx + \int_0^h u(l,y,t)dy - \int_0^l u(x,h,t)dx - \int_0^h u(0,y,t)dy = 0,\ t \in [0,T]. \tag{14}$$

За допомогою функції Гріна знаходимо розв'язок $u(x,y,t)$ задачі (11)–(13):

$$u(x,y,t) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau \int_0^l d\xi \int_0^h \Delta u_2(\xi,\eta,\tau) G(a_1,x,y,t,\xi,\eta,\tau)\,d\eta. \tag{15}$$

Підставивши (15) в (14) та продиференціювавши отриману рівність за t, одержуємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду стосовно $a(t)$:

$$a(t) = \int_0^t K(t,\tau) a(\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

де ядро інтегрального оператора має вигляд

$$K(t,\tau) = \frac{a_1(t)a_2(t)}{2\varkappa'(t)(\Theta_1(t) - \Theta_1(\tau))^{3/2}} \times$$
$$\times \left(\int_0^{l/2} (g_{1_\xi}(\xi,\tau) + (g_{1_\xi}(l-\xi,\tau)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\xi + nl) \exp\left(-\frac{(\xi+nl)^2}{4(\Theta_1(t) - \Theta_1(\tau))} \right) d\xi - \right.$$
$$\left. - \int_0^{h/2} (g_{2_\eta}(\eta,\tau) + (g_{2_\eta}(h-\eta,\tau)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\eta + nh) \exp\left(-\frac{(\eta+nh)^2}{4(\Theta_1(t) - \Theta_1(\tau))} \right) d\eta \right),$$

де $\Theta_1(t) = \int_0^t a_1(\tau)\,d\tau$, $g_1(x,t) = \int_0^h u_{2_{xx}}(x,y,t)dy + u_{2_y}(x,h,t) - u_{2_y}(x,0,t)$,

$g_2(y,t) = \int_0^l u_{2_{yy}}(x,y,t)dx + u_{2_x}(l,y,t) - u_{2_x}(0,y,t)$.

Ядро $K(t,\tau)$ оцінюють таким чином:

$$|K(t,\tau)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{t-\tau}}, \qquad \text{де} \quad M > 0,$$

тому воно є інтегровним на $[0,t]$. Отже, рівняння (16) має лише тривіальний розв'язок $a(t) \equiv 0$. З (15) знаходимо, що $u(x,y,t) \equiv 0$.

Отже, твердження доведене.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (A), (B), (C), то при досить малому $T > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(5).*

2. У попередній задачі додаткову умову (5) ми задавали у вигляді криволінійного інтеграла від температури по всій межі прямокутника $[0,l] \times [0,h]$. Розглянемо тепер задачу знаходження функцій $(u(x,y,t), a(t))$ з умов (1)–(4) та умови перевизначення

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,y_0,t)dx = \varkappa(t), \; 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant l, \; 0 \leqslant y_0 \leqslant h, \; t \in [0,T]. \tag{17}$$

Використовуючи (17), зведемо рівняння (1) до вигляду

$$a(t) = \frac{\varkappa'(t)}{\int_{x_1}^{x_2} \Delta u(x,y_0,t)\,dx}\,. \tag{18}$$

Функція $z(x,y,t) = \Delta u(x,y,t)$ є розв'язком задачі

$$\begin{gathered}
z_t = a(t)\Delta z, \qquad (x,y,t) \in D,\\
z(x,y,0) = \Delta\varphi(x,y),\\
a(t)z_x(0,y,t) = \mu_{1_t}(y,t), \qquad a(t)z_x(l,y,t) = \mu_{2_t}(y,t),\\
a(t)z_y(x,0,t) = \nu_{1_t}(x,t), \qquad a(t)z_y(x,h,t) = \nu_{2_t}(x,t),\\
x \in [0,l], \quad y \in [0,h], \quad t \in [0,T],
\end{gathered}$$

з якої за допомогою функції Гріна знаходимо

$$\begin{gathered}
z(x,y,t) = \int_0^l d\xi \int_0^h \Delta\varphi(\xi,\eta)G(a,x,y,t,\xi,\eta,0)\,d\eta +\\
+ \int_0^t d\tau \int_0^h (\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)G(a,x,y,t,l,\eta,\tau) - \mu_{1_\tau}(\eta,\tau)G(a,x,y,t,0,\eta,\tau))\,d\eta +\\
+ \int_0^t d\tau \int_0^l (\nu_{2_\tau}(\xi,\tau)G(a,x,y,t,\xi,h,\tau) - \nu_{1_\tau}(\xi,\tau)G(a,x,y,t,\xi,0,\tau))\,d\xi.
\end{gathered}$$

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* (A), (B) *та*
$\Delta\varphi(x,y) > 0,\ (x,y) \in [0,l] \times [0,h],$
$\varkappa'(t) > 0,\ t \in [0,T],$
$\mu_{1_t}(y,t) \leqslant 0,\ \mu_{2_t}(y,t) \geqslant 0, \qquad y \in [0,h],\ t \in [0,T],$
$\nu_{1_t}(x,t) \leqslant 0,\ \nu_{2_t}(x,t) \geqslant 0, \qquad x \in [0,l],\ t \in [0,T],$
то існує єдиний розв'язок задачі (1)–(4),(17).

Умови теореми гарантують додатність розв'язків рівняння (18). Існування розв'язку встановлюють за допомогою принципу Шаудера про нерухому точку, єдиність доводять аналогічно до доведення єдиності в теоремі 1.

У випадку $x_1 = 0,\ x_2 = l$ достатньо взяти $\varphi(x,y)$ з класу $C^{1,2}([0,l] \times [0,h])$ і замінити умову $\Delta\varphi(x,y) > 0$ на $\int_0^l \varphi_{yy}(x,y)dx + \varphi_x(l,y) - \varphi_x(0,y) > 0$.

3. У випадку визначення функцій $u(x,y,t)$ та $a(t)$, які справджують рівняння (1), початкову умову (2), крайові умови

$$\begin{aligned} u(0,y,t) &= \mu_1(y,t), \qquad u(l,y,t) = \mu_2(y,t), \qquad y \in [0,h],\ t \in [0,T], \\ u(x,0,t) &= \nu_1(x,t), \qquad u(x,h,t) = \nu_2(x,t), \qquad x \in [0,l],\ t \in [0,T] \end{aligned}$$

та одну з умов перевизначення

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} u(x,y_0,t)\,dx &= \varkappa(t), \quad 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant l,\ \ 0 < y_0 < h,\ t \in [0,T], \\ a(t)\int_{x_1}^{x_2} u_y(x,y_0,t)\,dx &= \varkappa(t), \quad 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant l,\ 0 \leqslant y_0 \leqslant h,\ t \in [0,T], \\ \int_0^l dx \int_0^h u(x,y,t)\,dy &= \varkappa(t), \quad t \in [0,T], \\ \int_0^l u_y(x,0,t)\,dx &= \varkappa(t), \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

теорему існування і єдиності розв'язку кожної із задач доводять методами, подібними до розглянутих.

1. Иванчов Н.И. *Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями* // Укр. мат. журн.— 1993.—Т.45, N 8.— С.1066–1071.

2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.— 736 с.

3. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969.— 448 с.

Стаття надійшла до редколегії 05.06.96