УДК 517.956

ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА З НЕЛОКАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Г. І. Берегова

G. I. Beregova. The hyperbolic Stefan problem with unlocal boundary conditions. The problem with an unknown boundary for general hyperbolic system of equations of second order is considered. Unlocal boundary conditions are specified. The theorem of correct solvability of problem for local t is proved.

1. Формулювання задачі. Нехай $G = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t \leqslant T,\, a_1(t) < x < a_2(t),\, a_i(0) = a_i$ – відомі константи, $i = 1,2,\, a_1 < a_2\}$, причому функції $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$ наперед невідомі. В G розглянемо систему строго гіперболічних рівнянь другого порядку

$$\sum_{i=0}^{2} A_i^s\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^s = f^s(x,t), \tag{1}$$

де A_i^s – лінійний однорідний диференціальний оператор порядку i для кожного $s = 1,2$

$$A_i^s\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^s \equiv \sum_{j=0}^{i} A_{ij}^s(x,t)\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j \partial t^{i-j}},$$

коефіцієнти A_{ij}^s якого є квадратними матрицями другого порядку, причому $A_{20}^s \equiv I$.

Нехай $\lambda_j^s(x,t)$ $(j,s = 1,2)$ — характеристичні числа оператора $A_2^s\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$. Припустимо, що при всіх $t \in [0,T]$ вирази $\lambda_j^s(a_1(t),t) - a_1'(t)$ та $\lambda_j^s(a_2(t),t) - a_2'(t)$ не мають нулів. Позначимо

$$I_1^{s+} = \{j : \lambda_j^s(a_1(t),t) - a_1'(t) > 0\}, \quad I_1^{s-} = \{j : \lambda_j^s(a_1(t),t) - a_1'(t) < 0\}.$$

Аналогічно вводимо множини I_2^{s+} та I_2^{s-}. Причому $I_i^{\pm} = \bigcup\limits_{s=1}^{2} I_i^{s\pm}$ $(i = 1,2)$.

Розглянемо таку задачу: для деякого $\varepsilon > 0$ потрібно знайти вектор–функцію $a(t)$ і у відповідній області $G_\varepsilon = \{(x,t) \in R^2 : 0 < t \leqslant \varepsilon,\, a_1(t) < x < a_2(t),\, a_i(0) = a_i,\, i = 1,2\}$ розв'язок $u^s(x,t)$ системи (1) так, щоб задовольнялись умови

$$\frac{\partial^i u^s}{\partial t}(x,0) = g_i^s(x), \quad x \in [a_1,a_2], \quad i = 0,1, \quad s = 1,2, \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35R35; Secondary 35L99.

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}\left\{\sum_{q=1}^{2} B_{qik}^{sj}(t)\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j \partial t^{i-j}}\bigg|_{x=a_q(t)} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)} C_{ik}^{sj}(\xi,t)\frac{\partial^i u^s(\xi,t)}{\partial \xi^j \partial t^{i-j}}\,d\xi\right\} = h_k(t), \quad k=\overline{1,N_0}, \quad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}\int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)} C_{ik}^{sj}(\xi,t)\frac{\partial^i u^s(\xi,t)}{\partial \xi^j \partial t^{i-j}}\,d\xi = h_k(t), \quad k=\overline{N_0+1,N}, \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

де $g_i(x)$, B_{qik}^{sj}, C_{ik}^{sj} та $h_k(t)$ — задані функції, $0\leqslant N_0\leqslant N$, N — кількість елементів множини $I_1^+\cup I_2^-$.

Додатково задаються умови на невідомі межі

$$\begin{gathered} a_i''(t) = F_i\left(t, a(t), a'(t), u(a(t),t)\right), \\ a_i(0)=a_i, \quad a_i'(0)=\alpha_i, \quad i=1,2, \quad \forall t\in[0,T], \end{gathered} \tag{5}$$

де F_i — також задані функції, $u=\operatorname{col}(u^1,u^2)$.

2. Розв'язність задачі. Перед означенням узагальненого розв'язку задачі (1)–(5) попередньо її перетворимо, припустивши, що шуканий розв'язок є двічі неперервно диференційовний і всі рівності (1)–(4) задовольняються. При кожному $s=1,2$ розглянемо оператор [1]

$$M_i^s\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^s = \sum_{l=1}^{2} b_{il}^s(x,t)\frac{\partial u^s}{\partial x^{2-l}\partial t^{l-1}}, \quad i,s=1,2 \tag{6}$$

з характеристичною формою

$$\sum_{l=1}^{2} b_{il}^s(x,t)\lambda^{l-1}\xi^{2-l} = \lambda-\lambda_j^s(x,t)\xi, \quad i\neq j,\ i=1,2.$$

Для кожного $s=1,2$ оператори M_i^s становлять базис у просторі лінійних однорідних диференціальних операторів першого порядку і в цьому випадку

$$\frac{\partial u^s}{\partial x^{2-i}\partial t^{i-1}} = \sum_{l=1}^{2} c_{il}^s(x,t)M_l^s\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^s, \quad i=1,2, \tag{7}$$

де

$$c_{il}^s(x,t) = \frac{\left(\lambda_l^s(x,t)\right)^{i-1}}{\lambda_l^s(x,t)-\lambda_j^s(x,t)}, \quad l\neq j,\ j=1,2.$$

Приймемо

$$v_j^s(x,t) = M_j^s\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^s(x,t), \quad j,s=1,2. \tag{8}$$

Тоді систему (1) можна переписати в такому вигляді:

$$\frac{\partial v_j^s}{\partial t} + \lambda_j^s(x,t)\frac{\partial v_j^s}{\partial x} = \sum_{l=1}^{2} a_{jl}^s(x,t)v_l^s(x,t) + S_j^s(x,t)u^s + f^s(x,t), \quad j,s=1,2, \tag{9}$$

де коефіцієнти $a_{jl}^s(x,t)$ та $S_j^s(x,t)$ визначаються через коефіцієнти системи (1).

Нехай $l : y = \psi(\tau;x,t)$ – довільна гладка крива, яка з'єднує точку $(x,t)\in\overline{G_\varepsilon}$ з відрізком $[a_1,a_2]$, повністю лежить в $\overline{G_\varepsilon}$ і $\psi(t;x,t)=x$.

Виразимо u^s через v_j^s. Для цього в очевидній рівності

$$u^s(x,t) = u^s(\psi(0;x,t),0) + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\big(u^s(\psi(\tau,x,t),\tau)\big)\,d\tau$$

розпишемо підінтегральний доданок за формулою похідної від складної функції. В результаті отримаємо зображення

$$u^s(x,t) = g_0^s(\psi(0;x,t)) + \int_0^t \sum_{l=1}^{2} G_l^s(\tau,x,t)v_l^s\big(\psi(\tau;x,t),\tau\big)\,d\tau, \quad s=1,2. \tag{10}$$

Підставляючи (10) у рівняння (9), одержуємо систему інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v_j^s}{\partial t} + \lambda_j^s(x,t)\frac{\partial v_j^s}{\partial x} = \sum_{l=1}^{2} a_{jl}^s(x,t)v_l^s(x,t) + S_j^s(x,t)g_0^s(\psi(0;x,t)) + \\ + \int_0^t \sum_{l=1}^{2} Q_{jl}^s(\tau,x,t)v_l^s\big(\psi(\tau;x,t),\tau\big)\,d\tau + f^s(x,t), \quad j,s=1,2.\end{gathered} \tag{11}$$

Початкові умови (2) з врахуванням (8) дають рівності

$$v_j^s(x,0) = \sum_{i=1}^{2} b_{j,3-i}^s(x,0)\frac{d^{i-1}g_{2-i}^s(x)}{dx^{i-1}} = \psi_j^s(x), \quad j,s=1,2. \tag{12}$$

Умови (3),(4) з врахуванням (6), (8), (10) мають такий вигляд:

$$\sum_{l,s=1}^{2}\sum_{j=0}^{1}\left\{\sum_{q=1}^{2} B_{q1k}^{sj}(t)c_{2-j,l}^{s}(x,t)v_l^s(x,t)\Big|_{x=a_q(t)} + \right. \tag{13}$$

$$\left. + \int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)} C_{1k}^{sj}(\xi,t)c_{2-j,l}^{s}(\xi,t)v_l^s(\xi,t)\,d\xi\right\} = H_k^1(t;v), \quad k=\overline{1,N_0},$$

$$\sum_{l,s=1}^{2}\sum_{j=0}^{1}\int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)} C_{1k}^{sj}(\xi,t)c_{2-j,l}^{s}(\xi,t)v_l^s(\xi,t)\,d\xi = H_k^2(t;v), \quad k=\overline{N_0+1,N}, \tag{14}$$

де H_k^i – відомі величини, побудовані з коефіцієнтів та вільних членів задачі (1)–(4).
Для кожного $s=1,2$ введемо матриці

$$\alpha^{1s}(t) = \left\|\sum_{j=0}^{1} B_{11k}^{sj}(t)c_{2-j,l}^{s}(a_1(t),t)\right\|, \quad k=\overline{1,N_0}, \quad l\in I_1^{s+};$$

$$\alpha^{2s}(t) = \left\|\sum_{j=0}^{1} B_{21k}^{sj}(t)c_{2-j,l}^{s}(a_2(t),t)\right\|, \quad k=\overline{1,N_0}, \quad l\in I_2^{s-};$$

$$\alpha^{3s}(t) = \left\|\sum_{j=0}^{1} C_{1k}^{sj}(a_1(t),t)c_{2-j,l}^{s}(a_1(t),t)\big(\lambda_l^s(a_1(t),t)-a_1'(t)\big)\right\|, \; k=\overline{N_0+1,N},\; l\in I_1^{s+};$$

$$\alpha^{4s}(t) = \left\|-\sum_{j=0}^{1} C_{1k}^{sj}(a_2(t),t)c_{2-j,l}^{s}(a_2(t),t)\big(\lambda_l^s(a_2(t),t)-a_2'(t)\big)\right\|, \; k=\overline{N_0+1,N},\; l\in I_2^{s-}$$

(тут індекс l відповідає номеру стовпця, k – номеру рядка). Побудуємо квадратну матрицю $\beta(t)$ порядку N

$$\beta(t) = \left\|\begin{matrix} \alpha^{11}(t) & \alpha^{12}(t) & \alpha^{21}(t) & \alpha^{22}(t) \\ \alpha^{31}(t) & \alpha^{32}(t) & \alpha^{41}(t) & \alpha^{42}(t)\end{matrix}\right\|.$$

Припустимо, що виконується умова

$$\det\beta(t)\neq 0, \qquad \forall t\in[0,T], \tag{15}$$

яка є аналогом умови Лопатинського для задачі, яку розглядаємо.
Для кожного $s=1,2$ введемо додаткові невідомі функції

$$v_j^s(a_1(t),t)=\mu_j^s(t), \quad j\in I_1^{s+}, \qquad v_j^s(a_2(t),t)=\nu_j^s(t), \quad j\in I_2^{s-}. \tag{16}$$

Нехай $x = \varphi_j^s(t;\xi,\tau)$ – розв'язок характеристичного рівняння $dx\,/\,dt = \lambda_j^s(x,t)$ з початковими умовами $x(\tau) = \xi$, де $(\xi,\tau) \in \overline{G_\varepsilon}$. Через $L_j^s(\xi,\tau)$ позначимо відповідну характеристику, що проходить через (ξ,τ) і продовжена в бік спадання t до перетину з межею G_ε. Нехай $t_j^s(\xi,\tau)$ – найменше значення t для точок такої характеристики. Очевидно, що $0 \leqslant t_j^s(\xi,\tau) \leqslant \tau$. Область G_ε розіб'ємо на три частини:

$$
\begin{aligned}
G_j^{s0} &= \big\{(\xi,\tau) : t_j^s(\xi,\tau) = 0\big\},\\
G_j^{s1} &= \big\{(\xi,\tau) : t_j^s(\xi,\tau) > 0, \quad \varphi_j^s(t_j^s(\xi,\tau);\xi,\tau) = a_1(t_j^s(\xi,\tau))\big\},\\
G_j^{s2} &= \big\{(\xi,\tau) : t_j^s(\xi,\tau) > 0, \quad \varphi_j^s(t_j^s(\xi,\tau);\xi,\tau) = a_2(t_j^s(\xi,\tau))\big\}.
\end{aligned}
$$

Довільна з множин G_j^{s1} або G_j^{s2} може бути порожньою.

Враховуючи (12) та (16), проінтегруємо (11) уздовж характеристик. У результаті отримаємо

$$
\begin{aligned}
v_j^s(x,t) = \Omega_j^s(x,t) + \int\limits_{t_j^s(x,t)}^{t} \Bigg[\sum_{l=1}^{2} a_{jl}^s(\varphi_j^s(\tau;x,t),\tau) v_l^s(\varphi_j^s(\tau;x,t),\tau) +\\
+ S_j^s(\varphi_j^s(\tau;x,t),\tau) g_0^s\big(\psi(0;\varphi_j^s(0;x,t),t)\big) + \int\limits_0^{\tau} \sum_{l=1}^{2} Q_{jl}^s(\eta,\varphi_j^s(\eta;x,t),t) \times\\
\times v_l^s\big(\psi(\eta;\varphi_j^s(\eta;x,t),t),\eta\big)\,d\eta + f^s(\varphi_j^s(\tau;x,t),\tau)\Bigg]\,d\tau, \quad j,s = 1,2,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

де

$$
\Omega_j^s(x,t) = \begin{cases} \psi_j^s(\varphi_j^s(0;x,t)), & \text{при } (x,t) \in G_j^{s0},\\ \mu_j^s(t_j^s(x,t)), & \text{при } (x,t) \in G_j^{s1},\\ \nu_j^s(t_j^s(x,t)), & \text{при } (x,t) \in G_j^{s2}. \end{cases}
$$

Для того, щоб функції $v_j^s(x,t)$ під час переходу з G_j^{s0} в G_j^{s1} і G_j^{s2} були неперервно диференційовні, необхідно, щоб для кожного $s = 1,2$ виконувались умови узгодження нульового та першого порядків відповідно

$$
\begin{aligned}
\mu_j^s(0) = \psi_j^s(a_1), \quad j \in I_1^{s+}, \qquad \nu_j^s(0) = \psi_j^s(a_2), \quad j \in I_2^{s-};\\
\mu_j^{s\prime}(0) = \psi_j^{s\prime}(a_1)\big(\alpha_1 - \lambda_j^s(a_1,0)\big), \quad j \in I_1^{s+},\\
\nu_j^{s\prime}(0) = \psi_j^{s\prime}(a_2),\big(\alpha_2 - \lambda_j^s(a_2,0)\big), \quad j \in I_2^{s-}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) будемо називати неперервно диференційовну функцію $u = \operatorname{col}(u^1,u^2)$, для якої виконується (10), де вектор-функція v є узагальненим розв'язком задачі (11), (12)–(14), тобто v – це неперервно диференційовна функція, яка задовольняє при всіх (x,t) інтегро-функціональне рівняння (17) і умови (12)–(14).*

Означення 2. *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(5) будемо називати набір функцій* $a_i(t) \in C^2([0,\varepsilon]), i = 1,2$ *для деякого* $\varepsilon > 0$ *та узагальнений (у сенсі означення 1) розв'язок* $u(x,t)$ *в* $\overline{G_\varepsilon}$ *задачі (1)–(4), які задовольняють умову (5) для всіх* $t \in [0,\varepsilon]$.

Теорема. *Нехай*

1) функції $A^s_{2j}(x,t) \in C^2(\overline{G_0})$, $A^s_{ij}(x,t), f^s(x,t) \in C^1(\overline{G_0})$, $g^s_i(x) \in C^{2-i}([a_1,a_2])$, *де* $\overline{G_0} = \{(x,t) : a_1 - \alpha_1\varepsilon_0 \leqslant x \leqslant a_2 + \alpha_2\varepsilon_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0\}$ *для деякого* $\varepsilon_0 > 0$, $i = 0,1$, $j = \overline{0,2}$, $s = 1,2$;

2) при $k = \overline{1,N_0}$ *функції* $B^{sj}_{qik}(t), h_k(t) \in C^1([0,\varepsilon_0])$, $C^{sj}_{ik}(x,t) \in C^1(\overline{G_0})$;

3) при $k = \overline{N_0+1,N}$ *функції* $C^{sj}_{1k}(x,t) \in C^2(\overline{G_0})$, $C^{sj}_{0k}(x,t)$ *неперервно диференційовні за двома змінними та двічі неперервно диференційовні за* t *в* $\overline{G_0}$;

4) функції $F_i(t,x,y,z)$ *визначені та неперервні за всіма аргументами в* $P = [0,\varepsilon_0]\times [a-\alpha\varepsilon_0, a+\alpha\varepsilon_0]\times[-\alpha,\alpha]\times\mathbb{R}^4$ *і задовольняють умову Ліпшиця за всіма змінними зі сталою* M;

5) виконуються умови узгодження в точках $(a_1,0)$ *та* $(a_2,0)$

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}\left\{\sum_{q=1}^{2} B^{sj}_{qik}(0)g^{s(j)}_{i-j}(a_q) + \int\limits_{a_1}^{a_2} C^{sj}_{ik}(\xi,0)g^{s(j)}_{i-j}(\xi)\,d\xi\right\} = h_k(0), \quad k = \overline{1,N_0},$$

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}\int\limits_{a_1}^{a_2} C^{sj}_{ik}(\xi,0)g^{s(j)}_{i-j}(\xi)\,d\xi = h_k(0), \quad k = \overline{N_0+1,N},$$

$$a_i''(0) = F_i\left(0,a,\alpha,g_0(a)\right), \quad i = 1,2,$$

де $a = (a_1,a_2)$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$;

6) виконується умова (15).

Тоді існує таке значення $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, *що задача (1)–(5) має в* $\overline{G_\varepsilon}$ *єдиний узагальнений розв'язок, визначений для всіх* $t \in [0,\varepsilon]$.

Доведення. Позначимо через $Q^{h,d}_\varepsilon$ множину функцій $a(t) = (a_1(t),a_2(t)) \in \left[C^2[0,\varepsilon]\right]^2$, для яких

$$|a_i(t) - a_i| < \varepsilon(\alpha+1), \quad \left|a_i'(t) - \alpha_i\right| < h, \quad \left|a_i''(t) - a_i''(0)\right| < d, \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \quad i = 1,2.$$

Будемо вважати ε, h і d настільки малими, щоб для всіх таких функцій виконувалася умова (15). Для кожної фіксованої функції $a(t) \in Q^{h,d}_\varepsilon$ маємо задачу (1)–(4), розв'язок якої $u^s(x,t)$ є значенням деякого оператора на $a(t)$.

Використовуючи методику [2] для перетворення умов (13), (14), одержимо систему рівнянь, яку запишемо в операторній формі

$$\big(\beta\nu\big)(t) = \big(K\nu\big)(t) + \big(Lv\big)(t) + \big(\tilde{L}f\big)(t) + \tilde{h}(t), \tag{19}$$

де $\nu(t)$ – вектор-стовпець, який складається відповідно з $\mu^s_j(t)$ для $j \in I^{s+}_1$ та $\nu^s_j(t)$ для $j \in I^{s-}_2$; K – матричний лінійний інтегральний оператор типу Вольтерра, елементами якого для кожного $s = 1, 2$ є лінійна комбінація інтегралів вигляду

$$\int\limits_0^t R_{jk}^{s1}(\tau, t)\mu_j^s(\tau)\, d\tau, \qquad j \in I_1^{s+}, \quad k = \overline{1, N_0},$$

$$\int\limits_0^t (R_{jk}^{s2}(\tau, t)\mu_j^s(\tau)\, d\tau, \qquad j \in I_1^{s+}, \quad k = \overline{N_0 + 1, N};$$

$$\int\limits_0^t R_{jk}^{s2}(\tau, t)\nu_j^s(\tau)\, d\tau, \qquad j \in I_2^{s-}, \quad k = \overline{1, N_0},$$

$$\int\limits_0^t R_{jk}^{s4}(\tau, t)\nu_j^s(\tau)\, d\tau, \qquad j \in I_2^{s-}, \quad k = \overline{N_0 + 1, N}$$

з неперервними відомими ядрами R_{jk}^{sl} ; L та $\tilde{L}$ – матричні лінійні інтегральні оператори типу Вольтерра, елементи яких мають неперервні ядра і які діють відповідно на вектор-функцію v з компонентами $v_j^s(x, t)$ та вектор-функцію f з компонентами f^s; $\tilde{h}(t)$ – стовпець висотою N з елементами $\tilde{h}_k(t)$, які містять функції $h_k(t), h'_k(t)$ та ще деякі вирази з відомими функціями, залежними від t.

На підставі умови (15) рівняння (19) перепишемо у вигляді

$$\nu(t) = \beta^{-1}\big(K\nu + Lv + \tilde{L}f + \tilde{h}\big)(t)$$

або

$$\big(\big[I - \beta^{-1}K\big]\nu\big)(t) = \beta^{-1}\big(Lv + \tilde{L}f + \tilde{h}\big)(t). \tag{20}$$

Оскільки K – інтегральний оператор типу Вольтерра, норма якого при достатньо малому $\varepsilon > 0$ як завгодно мала, то ми можемо перейти до рівняння

$$\nu(t) = \big[B\big(Lv + \tilde{L}f + \tilde{h}\big)\big](t), \tag{21}$$

де $B = (I - \beta^{-1}K)^{-1}\beta^{-1}$.

З іншого боку, рівняння (17) в операторній формі буде мати вигляд

$$v(x, t) = \big(Q\nu\big)(x, t) + \big(L_1 v\big)(x, t) + \big(\tilde{L}_1 f\big)(x, t) + \tilde{f}(x, t), \tag{22}$$

де Q – оператор зсуву, який діє за формулами

$$\big(Q\mu_j^s\big)(t) = \mu_j^s(t_j^s(a_2(t), t)), \quad j \in I_1^{s+},$$
$$\big(Q\nu_j^s\big)(t) = \nu_j^s(t_j^s(a_1(t), t)), \quad j \in I_2^{s-},\ s = 1, 2;$$

L_1 та $\tilde{L}_1$ – матричні інтегральні оператори типу Вольтерра з неперервними ядрами. Для того, щоб оператор Q був однозначно визначений і при неперервно диференційовній вектор-функції $\nu(t)$ давав неперервно диференційовну вектор-функцію $\big(Q\nu\big)(x, t)$

необхідно і достатньо, щоб виконувались умови узгодження (18). З умови *5* теореми випливає, що функції $\mu_j^s(t)$ та $\nu_j^s(t)$, виражені співвідношенням (21), задовольняють умови (18) для довільного v.

Підставивши (21) в (22), одержимо співвідношення

$$\big([I - QBL - L_1]v\big)(x,t) = \big[(QB\tilde{L} + \tilde{L}_1)f\big](x,t) + \big(QB\tilde{h} + \tilde{f}\big)(x,t). \tag{23}$$

Отже, система рівнянь (12)–(14), (17) еквівалентна системі рівнянь (23), в якій нема ν.

Оскільки L і L_1 – інтегральні оператори типу Вольтерра, то (23) можна переписати у вигляді

$$v(x,t) = \big(I - QBL - L_1\big)^{-1}\big[(QB\tilde{L} + \tilde{L}_1)f + \big(QB\tilde{h} + \tilde{f}\big)\big](x,t). \tag{24}$$

Отже, ми знайшли розв'язок задачі (11)–(14). Відповідно, враховуючи (10), маємо зображення розв'язку задачі (1)–(4) для кожної функції $a(t)$. Потрібно лише із всієї множини допустимих функцій $a(t)$ вибрати ту, для якої виконуються умови (5). Кожній функції $a \in Q_\varepsilon^{h,d}$ відповідає узагальнений розв'язок у $\overline{G}_\varepsilon = \overline{G}_{\varepsilon,a}$ відповідної задачі (1)–(4); цей розв'язок ми позначимо через $U(x,t;a)$ (його значення для фіксованих x,t є функціоналом щодо a).

Для кожного $s = 1,2$ залежність $U^s(a(t),t;a)$ у метриці рівномірного відхилення від a як елемента $C^2[0,\varepsilon] \times C^2[0,\varepsilon]$ задовольняє умову Ліпшиця: $\exists L \geqslant 0 \quad \forall a^1, a^2 \in Q_\varepsilon^{h,d}$:

$$\begin{aligned} &\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}\big|U^s(a^1(t),t;a^1) - U^s(a^2(t),t;a^2)\big| \leqslant \\ &\leqslant L\big[\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}\big|a^1(t) - a^2(t)\big| + \max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}\big|a^{1\prime}(t) - a^{2\prime}(t)\big| + \max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}\big|a^{1''}(t) - a^{2''}(t)\big|\big]. \end{aligned} \tag{25}$$

Щоб перевірити співвідношення (25), зауважимо, що з (10), (24) можна вивести апріорні оцінки для розв'язку та його похідних $\dfrac{\partial u^s}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u^s}{\partial t}$ через задані функції, з яких зокрема випливає, що

$$\big|U^s(x,t;a)\big| \leqslant U_0 = \text{const}, \quad \big|U_x^{s\prime}(x,t;a)\big| \leqslant U_1 = \text{const}, \quad \big|U_t^{s\prime}(x,t;a)\big| \leqslant U_2 = \text{const}$$
$$(s = 1,2, \quad (x,t) \in \overline{G_\varepsilon}, \quad a \in Q_\varepsilon^{h,d}).$$

Тому і на лініях $x = a_i(t) (i = 1,2)$ залежність розв'язку задачі (1)–(4) від функціонального параметра a задовольняє умову Ліпшиця, звідки і випливає (25).

Розглянемо на $Q_\varepsilon^{h,d}$ оператор A, який задається системою рівнянь

$$\begin{cases} a(t) = a + \alpha t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau F\big(\eta, a(\eta), a'(\eta), U(a(\eta),\eta;a(\eta))\big)\,d\eta, \\ a'(t) = \alpha + \int_0^t F\big(\tau, a(\tau), a'(\tau), U(a(\tau),\tau;a(\tau))\big)\,d\tau, \quad t \in [0,\varepsilon], \end{cases}$$

де $F = (F_1, F_2)$. З умов *4, 5* теореми та того, що $U_j^s(a(t),t;a)$ задовольняє умову Ліпшиця по a, випливає, що при достатньо малому ε оператор A відображає $Q_\varepsilon^{h,d}$ в себе і в метриці $C^2[0,\varepsilon] \times C^2[0,\varepsilon]$ є стиском. Тому з принципу стисних відображень випливає існування та єдиність нерухомої точки оператора, тобто шуканого розв'язку, який можна отримати методом ітерацій. Теорему доведено.

1. Мельник З.О., Кирилич В.М. *Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой* // Укр. мат. журн.— 1983.— Т.35, N6.— С. 722–727.

2. Кирилич В.М. *Нелокальная задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка* // Укр. мат. журн.— 1988.— Т.40, N1.— С. 121–123.

3. Мельник З.О. *Змішана задача з невідомою границею для загального двовимірного гіперболічного рівняння другого порядку* // Доп. АН УРСР.— 1982.— N8.— С. 13–15.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.96