УДК 517.927.25+512.928.5

ПРО ПОМІРНО СИНГУЛЯРНІ СІМ'Ї КОМПАКТНИХ ОПЕРАТОРІВ У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ СИЛЬНО НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

Ю. Д. Головатий

Yu.D. Holovatyĭ. Moderately singular families of compact operators in problems of non-homogeneous medium theory. Singular perturbed eigenvalue problems which deal with the non-homogeneous vibrating systems are considerated. The classification of families of compact operators $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ which apear in such problems is proposed. Some results for so-called moderately singular families are obtained and illustrated by examples.

Ми вивчали один клас сингулярно збурених задач на власні значення, які виникають в теорії сильно неоднорідних середовищ. Нові моделі, запропоновані для композитних матеріалів, дали змогу математично описати специфічні ефекти, властиві лише сильно неоднорідним коливним ситемам [1–10]. Наприклад, математично описано *ефект локальних коливань*, отриманий раніше тільки експериментально: для системи з локальними збуреннями густини характерні власні коливання, які зосереджуються в околі області збурення і загасають поза цим околом.

Під час дослідження таких задач з'являються сім'ї компактних операторів $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ із сингулярною залежністю від малого параметра ε, а основною проблемою є побудова асимптотики їхнього спектра при $\varepsilon \to 0$. Ми запропонували певну класифікацію таких сімей та загальну схему побуви й обгрунтування асимптотики у випадку помірно сингулярних збурень. Отримані результати проілюстровані прикладами конкрентних коливних систем, які ми дослідили в попередніх працях.

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^N$ з гладкою границею $\partial\Omega$, а γ — гладкий замкнений многовид вимірності $k < N$, який лежить в Ω. Через ω_ε позначимо ε-окіл γ. Введемо в області Ω додатну функцію $p(x)$ та послідовність невід'ємних функцій $q_\varepsilon(x)$, для яких $\operatorname{supp} q_\varepsilon = \bar{\omega}_\varepsilon$.

Розглянемо задачу на власні значення

$$\mathcal{P}(x,\partial_x)u_\varepsilon - \lambda^\varepsilon(p(x) + \varepsilon^{-m} q_\varepsilon(x))u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\mathcal{B}_j(x,\partial_x)u_\varepsilon = 0, \qquad j = 1,\dots,S \qquad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

де $\mathcal{P}$ — еліптичний оператор порядку $2S$, $\mathcal{B}_j$ — оператори граничних умов, λ^ε — спектральний параметр, $m \in \mathbb{R}$. За деяких додаткових умов на оператори $\mathcal{P}$ і $\mathcal{B}_j$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A75; Secondary 35B25.

знаходження асимптотики власних значень та власних функцій задачі (1),(2) зводиться до вивчення сім'ї компактних операторів $A(\varepsilon, m)$, породжених у відповідних просторах С.Л.Соболєва білінійними формами

$$a_{\varepsilon,m}(u,v) = (pu,v)_{L_2(\Omega)} + \varepsilon^{-m}(q_\varepsilon v, v)_{L_2(\omega_\varepsilon)}.$$

Зауважимо, що хоча параметр m набуває довільних дійсних значень, кількість випадків різної асимптотичної поведінки при $\varepsilon \to 0$ власних елементів операторів $A(\varepsilon, m)$ скінченна.

1. Регулярні, помірно та сильно сингулярні сім'ї операторів. Нехай H — сепарабельний гільбертовий простір з скалярним добутком (u, v) та нормою $\|u\|$. Розглянемо в H сім'ю самоспряжених, додатно визначених, компактних операторів $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, які неперервно залежать від малого параметра ε. Нас буде цікавити асимптотична поведінка спектра $\sigma(B_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Оскільки у загальному випадку біфуркаційна картина власних значень $\mu(\varepsilon)$ операторів B_ε досить складна, то недоцільно впорядковувати їх за зростанням. Ми будемо вивчати асимптотику пар власних елементів $(\mu(\varepsilon), u_{\mu(\varepsilon)})$, які неперервно залежать від ε. Виберемо пари так, щоб власні вектори всіх пар при фіксованому ε утворювали ортонормовану базу в H. Така множина пар існує, хоча її вибір неоднозначний. Уведемо позначення: $S_0 = \{\mu(\varepsilon) : \mu(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0\}, S_\infty = \{\mu(\varepsilon) : \mu(\varepsilon) \to \infty, \varepsilon \to 0\}$, а через S_b позначимо множину решти власних значень $\mu(\varepsilon)$.

Розглянемо лінійний многовид

$$V = \{v \in H : \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}(B_\varepsilon v, v) < +\infty\},$$

за властивостями якого класифікуємо сім'ї B_ε. Можливі три ситуації: $V = H$, V — замкнений підпростір в H або V — незамкнений H.

У першому випадку оператори B_ε рівномірно обмежені, тобто $\|B_\varepsilon\| \leqslant M$ для деякої сталої $M > 0$ і всіх $\varepsilon > 0$, а множина S_∞ порожня. Таку сім'ю операторів будемо називати *регулярною*. Якщо оператори B_ε збігаються до деякого оператора B_0 в H, то, як відомо, відстань між спектрами цих операторів визначається величиною $\|B_\varepsilon - B_0\|$. Нижче ми сформулюємо строгий результат.

Нехай V — гільбертів підпростір, який не збігається з H. Тоді сім'ю B_ε будемо називати *помірно сингулярною.* Для такої сім'ї ми запропонуємо загальну схему побудови та обгрунтування асимптотики власних значень $\mu(\varepsilon) \in S_b$ та відповідних власних підпросторів.

Зауваження 1. *Оскільки під час дослідження конкретної задачі кожне її власне значення $\mu(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, відповідною заміною спектрального параметра можна перевести у множину S_b, то лише ця серія власних значень буде об'єктом нашого дослідження.*

У випадку, коли V – незамкнений лінійний многовид у H, будемо говорити про *сильно сингулярну* сім'ю операторів B_ε. Це, як звичайно, найскладніший для дослідження, але одночасно найцікавіший клас сингулярно збурених спектральних задач.

Позначимо через $\sigma(B)$ спектр оператора B, через $N(\mu, B)$ – власний підпростір, який відповідає власному значенню $\mu \in \sigma(B)$. *Розхилом* між підпросторами U та V простору H назвемо величину

$$\Theta_H(U, V) = \|P_U - P_V\|,$$

де P_U та P_V — відповідні ортопроектори.

Нехай $\{\mu_s\}_{s=1}^{\infty}$ — послідовність власних значень оператора B_0, перерахованих з урахуванням кратності.

Теорема 1. *Якщо сім'я операторів B_ε регулярна і $B_\varepsilon \to B_0$, то множину S_b можна записати у вигляді такої послідовності неперервних власних значень $\{\mu_s(\varepsilon)\}_{s=1}^{\infty}$, що*

$$|\mu_s(\varepsilon) - \mu_s| \leqslant \|B_\varepsilon - B_0\|.$$

Нехай $\mu \in \sigma(B_0) \setminus \{0\}$, а $N_\varepsilon(\mu) = \bigoplus N(\mu_k(\varepsilon), B_\varepsilon)$, де сумування проводиться для всіх k, для яких $\mu_k(\varepsilon) \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді

$$\Theta_H(N(\mu, B_0), N_\varepsilon(\mu)) \leqslant d^{-1}\|B_\varepsilon - B_0\|,$$

де $d = \inf_{\mu_s \neq \mu} |\mu_s - \mu|$ [8,11].

2. Схема дослідження асимптотики спектра помірно сингулярної сім'ї операторів. Нехай B_ε — помірно сингулярна сім'я, а $P : H \to V$ — ортопроектор на відповідний підпростір V.

Лема 1. *Сім'я операторів $PB_\varepsilon P$ є рівномірно обмежена в просторі H.*

Доведення. Нехай $\|PB_\varepsilon P\| \to \infty, \varepsilon \to 0$. Згідно з принципом фіксації особливості [12] існує такий вектор $v \in H$, що $\|PB_\varepsilon Pv\| \to \infty, \varepsilon \to 0$. Але тоді

$$(PB_\varepsilon Pv, v) = (B_\varepsilon Pv, Pv) \to \infty,$$

а отже, вектор Pv не належить простору V. Отримали суперечність. Лему доведено.

Оскільки власні вектори $u_{\mu(\varepsilon)}$ нормовані, то існує така підпослідовність $\varepsilon' \to 0$, що $u_{\mu(\varepsilon')} \to v$ слабко в H для деякого вектора $v \in H$. Однак для класу задач, які ми вивчаємо, завжди вдається показати, що тоді $\|u_{\mu(\varepsilon')}\| \to \|v\|$, тобто є сильна збіжність підпослідовності $u_{\mu(\varepsilon')}$ при $\varepsilon' \to 0$. Тому зробимо таке припущення: *слабко збіжна підпослідовність послідовності $\{u_{\mu(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ є сильно збіжна в H.*

Також нехай виконуються умови.

Умова (А). *Для кожного власного значення $\mu(\varepsilon) \in S_b$ маємо*

$$\|(I - P)u_{\mu(\varepsilon)}\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Умова (B). *Для всіх власних векторів $u_{\mu(\varepsilon)}$, де $\mu(\varepsilon) \in S_b$, справедливо*

$$\|PB_\varepsilon(I-P)u_{\mu(\varepsilon)}\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Умова (C). *У просторі V існує такий оператор A_0, що $PB_\varepsilon|_V \to A_0$. Крім того, для кожного власного вектора v_μ, який відповідає власному значенню μ оператора A_0, існує такий вектор w_ε, що $\|w_\varepsilon\| \to 0$ і*

$$\|B_\varepsilon(v_\mu + w_\varepsilon) - \mu v_\mu\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Зауваження 2. *Для обгрунтування асимптотики власних значень часто використовують таке твердження:*

Нехай B — самоспряжений компактний оператор у гільбертовому просторі H. Якщо існує число $\mu > 0$ і вектор $u \in H, ||u|| = 1$, такі що $||Bu - \mu u|| \leqslant \alpha, \quad \alpha > 0$, то знайдеться таке власне значення μ_k оператора B, що $|\mu_k - \mu| \leqslant \alpha$. Крім того, для будь-якого $d > \alpha$ існує вектор U, що $||u - U|| \leqslant 2\alpha d^{-1}, \quad ||U|| = 1$, і U є лінійна комбінація власних векторів оператора B, які відповідають власним значенням B з інтервалу $[\mu - d, \mu + d]$ [13].

Пару (μ, u) будемо називати майже-власними елементами оператора B. У конкретних задачах теорії сильно неоднорідних середовищ не завжди власне значення μ оператора A_0 та відповідний власний вектор v_μ забезпечують прямування величини $\|B_\varepsilon v_\mu - \mu v_\mu\|$ до нуля. Однак можна побудувати такий нескінченно малий коректор w_ε, що

$$\|B_\varepsilon(v_\mu + w_\varepsilon) - \mu(v_\mu + w_\varepsilon)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Умова (C) гарантує існування такого коректора.

Як і в теоремі 1 позначимо через $N_\varepsilon(\mu)$ підпростір, породжений тими власними векторами $u_{\mu(\varepsilon)}$, для яких $\mu(\varepsilon) \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2. *Нехай $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — помірно сингулярна сім'я операторів, яка справджує умови (A),(B),(C). Тоді кожне власне значення $\mu(\varepsilon) \in S_b$ має скінченну границю μ_0 при $\varepsilon \to 0$, причому $\mu_0 \in \sigma(A_0)$. Якщо μ_0 — r-кратне власне значення оператора A_0, то в кожному достатньо малому околі μ_0 лежать рівно r (з урахуванням кратності) власних значень $\mu_k(\varepsilon) \in S_b, k = 1, \ldots, r$, і*

$$\Theta_H(N(\mu_0, A_0), N_\varepsilon(\mu_0)) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Доведення теореми міститься в лемах 2–5.

Лема 2. *Нехай $\mu(\varepsilon) \in S_b$ та $u_{\mu(\varepsilon)} \to u_0$ в H по деякій підпослідовності $\varepsilon' \to 0$. Тоді власне значення $\mu(\varepsilon)$ має скінченну границю μ_0, коли $\varepsilon \to 0$, причому $\mu_0 \in \sigma(A_0)$, а u_0 є відповідним власним вектором.*

Доведення. Покажемо спочатку, що вектор u_0 належить простору V та $B_\varepsilon u_{\mu(\varepsilon)} \to A_0 u_0$ в H при $\varepsilon' \to 0$. Те, що $u_0 \in V$, є безпосереднім наслідком умови (A). Далі, справедлива тотожність

$$B_\varepsilon u_{\mu(\varepsilon)} - A_0 u_0 = B_\varepsilon(I-P)u_{\mu(\varepsilon)} + \mu(\varepsilon)(I-P)u_{\mu(\varepsilon)} + (R_\varepsilon - A_0)u_0 + R_\varepsilon(u_{\mu(\varepsilon)} - u_0),$$

де $R_\varepsilon = PB_\varepsilon P$. Згідно з умовами *(A),(B)* та означенням оператора A_0 перші три доданки правої частини тотожності прямують до нуля при $\varepsilon' \to 0$. Останній доданок нескінченно малий згідно з лемою 1.

Припустимо, що власне значення $\mu(\varepsilon)$ має скінченну границю μ_0 при $\varepsilon \to 0$. Перейшовши до границі в рівності $B_\varepsilon u_{\mu(\varepsilon)} - \mu(\varepsilon) u_{\mu(\varepsilon)} = 0$, отримаємо $A_0 u_0 - \mu_0 u_0 = 0$. Оскільки $u_0 \neq 0$, то $\mu_0 \in \sigma(A_0)$.

Нехай $\mu_* = \underline{\lim}\mu(\varepsilon) < \overline{\lim}\mu(\varepsilon) = \mu^*$, тоді для будь-якого $\mu \in [\mu_*, \mu^*]$ існувала б така послідовність $\varepsilon'' \to 0$, що $\mu(\varepsilon'') \to \mu$ і відповідно $u_{\mu(\varepsilon'')} \to u_1$. Повторивши міркування попереднього абзацу, ми б отримали, що $[\mu_*, \mu^*] \subset \sigma(A_0)$. Лему доведено.

Лема 3. *Для всіх $\mu \in \sigma(A_0) \setminus \{0\}$ простір $N_\varepsilon(\mu)$ скінченновимірний.*

Доведення. Припустимо, що в просторі $N_\varepsilon(\mu)$ існує зліченна ортонормована система $\{f_k(\varepsilon)\}_{k=1}^{\infty}$ власних векторів оператора B_ε. Оскільки за деякою підпослідовністю $B_\varepsilon f_k(\varepsilon) \to A_0 f_k$ і $f_l(\varepsilon) \to f_l$, то

$$\delta_{kl} = (f_k(\varepsilon), f_l(\varepsilon)) = (\mu_k(\varepsilon))^{-1}(B_\varepsilon f_k(\varepsilon), f_l(\varepsilon)) \to \mu^{-1}(A_0 f_k, f_l) = \delta_{kl}, \tag{3}$$

де δ_{kl} – символ Кронекера. Отже, власний підпростір $N(\mu, A_0)$ оператора A_0 містить зліченну ортонормовану систему $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, що неможливо для компактного оператора. Лему доведено.

Наступна лема — основна для обгрунтування асимптотики власних значень множини S_b.

Лема 4. *Нехай μ – ненульове власне значення оператора A_0, якому відповідає власна функція v, $\|v\| = 1$. Тоді існує таке власне значення $\mu(\varepsilon) \in S_b$ оператора B_ε, а також вектор $v_\varepsilon \in N_\varepsilon(\mu)$, що*

$$\mu(\varepsilon) \to \mu \quad \text{та} \quad \|v_\varepsilon - v\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Згідно з умовою *(C)* для v існує такий коректор $w_\varepsilon \in H$, що величина

$$\alpha(\varepsilon) = \|B_\varepsilon(v + w_\varepsilon) - \mu(v + w_\varepsilon)\|$$

є нескінченно мала при $\varepsilon \to 0$. На площині $R^2_{\varepsilon\lambda}$ введемо конус $K_\mu(h) = \{(\varepsilon, \lambda) : 0 < \varepsilon < h, |\lambda - \mu| < \alpha(\varepsilon)\}$. Згідно з твердженням, сформульованим у зауваженні 2, для кожного ε з інтервалу $(0, h)$, існує таке власне значення $\lambda(\varepsilon) \in \sigma(B_\varepsilon)$, що точка $(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ належить конусу $K_\mu(h)$, тобто

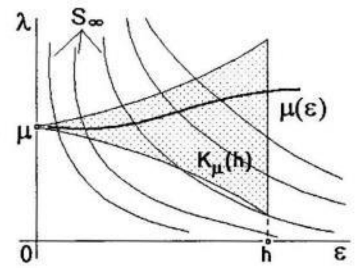
$$|\mu - \lambda(\varepsilon)| \leqslant \alpha(\varepsilon). \tag{4}$$

Виберемо число d таким, щоб інтервал $I = [\mu - d, \mu + d]$ не містив відмінних від μ точок спектра оператора A_0. Тоді існує така нормована лінійна комбінація v_ε власних векторів, які відповідають власним значенням оператора B_ε з визначеного відрізка, що

$$\|v - v_\varepsilon\| \leqslant \|(v + w_\varepsilon) - v_\varepsilon\| + \|w_\varepsilon\| \leqslant 2d^{-1}\alpha(\varepsilon) + \|w_\varepsilon\| = \alpha_1(\varepsilon). \tag{5}$$

Однак нерівність (4) ще не гарантує існування власного значення $\mu(\varepsilon)$ з множини S_b, яке збігається до μ. В тому разі, коли множина S_∞ нескінченна, ця умова може справджуватися лише за рахунок власних значень серії S_∞, які потрапляють у конус $K_\mu(h)$ при як завгодно малих ε, хоча кожне з них покидає цей конус при $\varepsilon \to 0$ (див. рисунок).

Припустимо, що множина S_∞ для даної сім'ї операторів B_ε є нескінченна. У випадку, коли S_∞ порожня або скінченна, обґрунтувати асимптотику власних значень можна методами, запропонованими в працях [1,3,5].



Доведемо це від супротивного. Нехай конус $K_\mu(h)$ не містить власного значення $\mu(\varepsilon) \in S_b$. Покажемо, що тоді всупереч (4) власний вектор v не вдається апроксимувати лише лінійними комбінаціями власних векторів $u_{\lambda(\varepsilon)}$, де $\lambda(\varepsilon) \in S_\infty$. Довільним чином перелічимо власні значення множини S_∞, позначивши через $\{e_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$ ортонормовану систему відповідних власних векторів.

Існує така підпослідовність $\varepsilon' \to 0$, що $e_k(\varepsilon') \to e_k$ в H. Нехай $\mathcal{L}$ – лінійний підпростір, породжений векторами $\{e_k\}_{k=1}^\infty$. Розглянемо два випадки, коли $v \perp \mathcal{L}$ або $v \in \mathcal{L}$. Загальна ситуація зводиться до них. Позначимо через $J(\varepsilon)$ множину тих індексів j, для яких власне значення вектора $e_j(\varepsilon)$ є в інтервалі I. Тоді

$$v_\varepsilon = \sum_{j \in J(\varepsilon)} \gamma_j(\varepsilon) e_j(\varepsilon).$$

У першому випадку очевидно, що величина (v, v_ε) прямує до нуля. З іншого боку, згідно з (5) маємо

$$(v, v_\varepsilon) = (v, v) + (v, v_\varepsilon - v) = 1 + O(\alpha_1(\varepsilon)), \quad \varepsilon \to 0.$$

Тепер нехай v належить підпростру $\mathcal{L}$, а, отже, $v = \sum\limits_{k=1}^\infty \beta_k e_k$, де $\sum\limits_{k=1}^\infty \beta_k^2 = 1$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\beta_1 \neq 0$. Справедлива така оцінка

$$\alpha_1(\varepsilon) \geqslant \|v - v_\varepsilon\| \geqslant \left\| \sum_{k=1}^\infty \beta_k e_k - \sum_{j \in J(\varepsilon)} \gamma_j(\varepsilon) e_j(\varepsilon) \right\| \geqslant$$

$$\geqslant \left\| \sum_{k=1}^N \beta_k e_k(\varepsilon) - \sum_{j \in J(\varepsilon)} \gamma_j(\varepsilon) e_j(\varepsilon) \right\| - \left\| \sum_{k=1}^N \beta_k (e_k(\varepsilon) - e_k) \right\| - \left\| \sum_{k=N+1}^\infty \beta_k e_k \right\|.$$

Числа N та ε' можна вибрати такими, що

$$\alpha_1(\varepsilon') < \frac{\beta_1}{3}, \quad N \max_{k=1,\ldots N} \|e_k(\varepsilon') - e_k\| < \frac{\beta_1}{3}, \quad \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k e_k \right\| < \frac{\beta_1}{3},$$

а також, щоб множина $J(\varepsilon')$ не містила індексів від 1 до N. Тоді

$$\left\| \beta_1 e_1(\varepsilon') + \sum_{k=2}^{N} \beta_k e_k(\varepsilon') - \sum_{j \in J(\varepsilon')} \gamma_j(\varepsilon') e_j(\varepsilon') \right\| < \beta_1,$$

що не можливо, оскільки в лівій частині немає векторів $e_r(\varepsilon')$ з однаковими індексами. Лему доведено.

Лема 5. $\dim N(\mu, A_0) = \dim N_\varepsilon(\mu)$.

Доведення. Оскільки згідно з лемою 4 кожний вектор $v \in N(\mu, A_0)$ апроксимується векторами з простору $N_\varepsilon(\mu)$, то $\dim N(\mu, A_0) \leqslant \dim N_\varepsilon(\mu)$. Виконавши граничний перехід (3) в умовах ортогональності, отримаємо, що $\dim N(\mu, A_0) \geqslant \dim N_\varepsilon(\mu)$. Лему доведено.

У теорії сильно неоднорідних середовищ виникають помірно сингулярні сім'ї компактних операторів, для яких не виконується умова *(B)*. В таких задачах граничний оператор можна побудовати не лише з використанням сім'ї B_ε та простору V, але й деяких апріорних результатів щодо поведінки власних векторів $u_{\mu(\varepsilon)}$. Оскільки для сім'ї абстрактних операторів таких апріорних властивостей власних векторів ми не маємо, то змушені неконструктивним шляхом увести оператор, спектр якого буде граничним для серії власних значень S_b.

Умова (D). *Існує такий самоспряжений компактний оператор $A_0 : V \to V$, що для всіх $\mu(\varepsilon) \in S_b$*

$$P_V B_\varepsilon u_{\mu(\varepsilon)} \to A_0 u_0 \text{ в } H, \quad \varepsilon \to 0,$$

де $u_{\mu(\varepsilon)} \to u_0$.

Зауваження 3. Умови *(B)* та *(D)* зручніше перевіряти для квадратичних форм $b_\varepsilon(u, u) = (B_\varepsilon u, u)$. У теоремі 2 оператор A_0 відповідає формі b_0, яку отримують у результаті граничного переходу

$$b_\varepsilon(v, v) \to b_0(v, v), \quad \varepsilon \to 0 \text{ для } v \in V.$$

Умова ж *(D)* стверджує, що оператор A_0 повинна породжувати така форма b_1, що

$$b_\varepsilon(u_{\mu(\varepsilon)}, v) \to b_1(u_0, v), \quad \varepsilon \to 0 \text{ для } v \in V.$$

У разі виконання умови *(B)* форми b_0 та b_1 рівні.

Теорема 3. *Нехай $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — помірно сингулярна сім'я операторів, яка справджує умови (A),(D),(C). Тоді всі власні значення $\mu(\varepsilon) \in S_b$ збігаються при $\varepsilon \to 0$ до власних значень оператора A_0 з урахуванням їхньої алгебраїчної кратності. Крім того, для кожного $\mu \in \sigma(A_0)$ маємо*

$$\Theta_H(N(\mu_0, A_0), N_\varepsilon(\mu_0)) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Доведення аналогічне до доведення теореми 2, за винятком того, що у лемі 2 не треба обгрунтовувати справедливість граничного переходу $B_\varepsilon u_{\mu(\varepsilon)} \to A_0 u_0$, оскільки він постулюється умовою *(D)*.

3. Приклади регулярних, помірно та сильно сингулярних сімей операторів. 1°. Розглянемо задачу про власні коливання закріпленої пластини із приєднаною масою. В задачі (1),(2) приймемо $N = 2$, $\mathcal{P} = \Delta^2$, $\mathcal{B}_1 = I$, $\mathcal{B}_2 = \partial_\nu$, де ν – зовнішня нормаль на $\partial\Omega$. У цьому випадку многовид γ є точкою $x_0 \in \Omega$ і $m = 2$. Відповідна сім'я операторів $\{A(\varepsilon, 2)\}_{\varepsilon>0}$ буде регулярною і збігатиметься до оператора A_0, породженого в просторі $H_0^2(\Omega)$ білінійною формою

$$a(u, v) = (pu, v)_{L_2(\Omega)} + q_* u(x_0) v(x_0),$$

де сталу q_* визначають з фукнції $q_\varepsilon(x) = q(\varepsilon^{-1}(x - x_0))$. Як показано в [5], власні значення λ_k^ε збуреної задачі справджують оцінку

$$|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k| \leqslant C(k)\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2},$$

а також

$$\Theta_{H_0^2(\Omega)}(N(\lambda^{-1}, A_0), N_\varepsilon(\lambda^{-1})) \leqslant C\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2},$$

де λ_k та λ – власні значення задачі

$$\Delta^2 v - \lambda(p(x) + q_*\delta(x - x_0))v = 0, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$v(x) = \partial v / \partial\nu(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{7}$$

Тут $\delta(x)$ – функція Дірака.

2°. Розглянемо цю ж задачу для випадку $m > 2$. Сім'я $A(\varepsilon, m)$ вже не є рівномірно обмеженою при $\varepsilon \to 0$, однак оператори $\varepsilon^{m-2} A(\varepsilon, m)$ утворюють регулярну сім'ю, множина S_b якої містить лише одне власне значення. Справді, граничний оператор A_0 породжує в просторі $H_0^2(\Omega)$ форма

$$a_0(u, v) = q_* u(x_0) v(x_0),$$

а його спектр складається лише з двох точок $\{0, \mu\}$, де $\mu > 0$. Отже, при $m > 2$ перше власне значення такої задачі має асимптотику $\lambda_1^\varepsilon = (\mu)^{-1}\varepsilon^{m-2} + o(\varepsilon^{m-2})$, $\varepsilon \to 0$.

3°. Нехай модель (1),(2) описує власні частоти та власні коливання закріпленого на кінцях стержня із сингулярно збуреною в околі точки густиною [5], тобто $N = 1$, $\Omega = (\alpha, \beta)$, $\mathcal{P} = d^4/dx^4$, $\gamma = \{x_0\}$, $q_\varepsilon(x) = q((x - x_0)/\varepsilon)$. У випадку $1 < m < 3$ сім'я операторів $A(\varepsilon, m)$ є помірно сингулярною, а простір $V = \{v \in H_0^2(\alpha, \beta) : v(x_0) = 0\}$. Оператор A_0 породжується в просторі V білінійною формою $a(u, v) = (pu, v)_{L_2(\Omega)}$. Умова *(A)* виконується, оскільки справедлива апріорна оцінка

$$|u_{\mu(\varepsilon)}(x_0)| \leqslant C\varepsilon^{d(m)}, \quad d(m) > 0. \tag{8}$$

Умова ж *(B)* в цьому випадку рівносильна прямуванню до нуля інтеграла

$$\varepsilon^{-m} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} q_\varepsilon(x) u_{\mu(\varepsilon)} \psi \, dx, \quad \psi \in V.$$

Але цей інтеграл нескінченно малий при $\varepsilon \to 0$ і $m \in (1, 3)$, оскільки $\psi(x_0) = 0$ та виконується (8). Отже, головними членами асимптотики розв'язку задачі (1),(2) є власні значення та власні функції такої задачі

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \lambda p(x) v = 0, \quad x \in \Omega \quad v(\alpha) = v'(\alpha) = v(\beta) = v'(\beta) = 0, \tag{9}$$

$$v(x_0) = 0, \quad [v']_{x_0} = [v'']_{x_0} = 0. \tag{10}$$

4°. Наведемо приклад помірно сингулярної сім'ї, для якої не виконується умова *(B)*. Приймемо в попередній задачі $m = 3$. Можна показати, що тоді

$$\varepsilon^{-3} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} q_\varepsilon(x) u_{\mu(\varepsilon)} \psi \, dx \to h u_0'(x_0) \psi'(x_0),$$

де h – деяка додатня стала, $\mu(\varepsilon) \in S_b$ та $\psi \in V$. У цьому випадку власні значення множини S_b прямують до спектра оператора, породженого формою

$$a_1(u, v) = (pu, v)_{L_2(\Omega)} + h u'(x_0) v'(x_0)$$

в просторі $V = \{v \in H_0^2(\alpha, \beta) : v(x_0) = 0\}$. Форму a_1 можна побудувати, лише врахувавши специфічну поведінку функції $u_{\mu(\varepsilon)}$ в околі точки x_0. Отже, для $m = 3$ в граничній задачі (9),(10) треба замінити умови (10) на такі:

$$v(x_0) = 0, \quad [v']_{x_0} = 0, \quad [v'']_{x_0} + \lambda h v'(x_0) = 0.$$

5°. Деколи для сильно сингулярної сім'ї вдається побудувати граничний оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ в деякому просторі $\mathcal{H}$, який ніяк не пов'язаний з вихідним простором H [4,8]. Але це не завжди так. Розглянемо задачу про власні коливання закріпленої пластини з густиною, збуреною в околі одновимірного многовиду. Нехай оператори $\mathcal{P}$ та $\mathcal{B}_j$ такі, як у прикладі 1, а γ – гладка замкнена крива. Сім'я $\varepsilon^{m-4} A(\varepsilon, m)$ при $m > 4$ є сильно сингулярною. Введемо локальні координати (s, n), де s – довжина дуги на γ, а n – відстань до γ вздовж нормалі. Нехай $q_\varepsilon(x) = q(\frac{n}{\varepsilon})$, $\kappa(s)$ – кривина кривої γ. Наступна двопараметрична спектральна задача

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}(s,\xi) - \mu_1 q(\xi) w(s,\xi) = 0, \quad \xi \in (-1,1),\ s \in \gamma,$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(s,\pm 1) = \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3}(s,\pm 1) = 0,$$
$$\Delta^2 v(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$
$$v|_\gamma = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{\gamma \pm 0} = \frac{\partial w}{\partial \xi}(s,\pm 1),$$
$$\Big[\frac{\partial \overline{v}}{\partial n}\Delta v\Big]_\gamma + 2\kappa(s) Re \int_{-1}^{1} \overline{w}\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} d\xi + \mu_2 \int_{-1}^{1} q(\xi)|w|^2 d\xi = 0,$$

де $\xi = n/\varepsilon$ відіграє роль граничної. Точки (μ_1, μ_2) дискретного спектра відповідного матричного оператора дають одночасно два члени асимптотичного розкладу власних значень збуреної задачі

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{m-4}(\mu_1 + \varepsilon\mu_2 + o(\varepsilon)), \quad \varepsilon \to 0.$$

1. Olejnik O.A. *Homogenization problems in elasticity.Spectrum of singularily perturbed operators.* Non-classical continuum mechanics. 1987. Lecture Notes series,122.— Cambridge University Press.— P.188-205.

2. Олейник О.А. *О собственных колебаниях тел с концентрированными массами*// В сб. Совр. проблемы прикладной математики и математической физики.— М.: Наука, 1988.— С.101-128.

3. Sanchez-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses*// Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Berlin: Springer-Verlag,1984.— P.346-368.

4. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. *Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями* // Тр. Матем. ин–та им. В.А.Стеклова.— 1990.— Т.192.— С.42–60

5. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний* // Тр. Москов. мат. об–ва.— 1992.— Т.54.— С.29–72.

6. Nazarov S.A. *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions*// Math. Model. Numer. Anal.— 1993.— Vol.27, N.6.— P.777-799.

7. Sanchez-Palensia E., Tchatat H. *Vibration de systems elastiques avec des masses concentrees* // Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino.— 1984.— V.42, N3.— P.43-63.
8. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред.— М.: Изд-во МГУ, 1990.— 311 с.
9. Lobo M., Perez E. *On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary.* // Math.Models Methods Appl. Sci.– 1995. – Vol.3,No.2. – P. 249–273.
10. Lobo M., Perez E. *Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary* // Math.Models Methods Appl. Sci.– 1995. – Vol.5,No.5. – P.565–585.
11. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.— 740 с.
12. Садовничий А.С. Теория операторов.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.— 368 с.
13. Вишик М.И., Люстерник А.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи матем. наук. – 1957.— Т.12, N5.— С.3–122.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.96