УДК 517.927.25+512.928.5

СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ІЗ СИНГУЛЯРНИМ ЗБУРЕННЯМ ГУСТИНИ

Г. Є. Грабчак

H. Ye. Hrabchak. The spectral Neumann problem for a linear elasticity system with the singular perturbed density. In a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^3$ the eigenvalue problem for the elasticity system with constant coefficients, Neumann boundary conditions and a singular perturbed density is considered. The density of a vibration system is perturbed in an ε-neighbourhood of a point. The behaviour as $\varepsilon \to 0$ of the eigenelements of the problem is studied. The first terms of the asymptotic expansion in ε for the eigenvalues and eigenvectors are obtained. Estimates for remainder terms of the corresponding asymptotic expansions are established.

З виникненням нових технологій, зокрема пов'язаних зі створенням перфорованих та композитних матеріалів, за останнє десятиріччя значно підвищився інтерес до задач теорії сильно неоднорідних середовищ. Ця проблематика знайшла своє втілення у виникненні та розвитку теорії усереднення диференціальних операторів та в асимптотичному аналізі задач про власні коливання пружних систем з концентрованими масами. З відповідною бібліографією можна ознайомитись в монографіях [1,2].

Ми дослідили асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних частот та форми власних коливань пружного однорідного анізотропного тіла з вільною границею та сингулярно збуреною густиною $\rho_\varepsilon(m,x)=p(x)+\varepsilon^{-m}q(x/\varepsilon)$, $(m\in\mathbb{R})$ в околі деякої його внутрішньої точки. Функція q має носій в області збурення густини, ε — характерний розмір цієї області. Причому, розглядаємо, на нашу думку, найбільш цікавий з фізичного і математичного погляду випадок, коли при достатньо великій приєднаній масі виникає відомий з експериментів *ефект локальних коливань:* власні коливання системи зосереджені поблизу області збурення густини і швидко загасають поза околом цієї області. Мабуть, уперше цей ефект математично описано в [3,4], де досліджено поведінку при $\varepsilon \to 0$ спектра аналогічної задачі для оператора Лапласа [3] та системи рівнянь теорії пружності [4] з крайовими умовами Діріхле і $m = n \geqslant 3$, де n — розмірність простору. У новій моделі коливних систем [5] з концентрованими масами (введення дійсного параметра m) сформульовано задачу вивчення поведінки при $\varepsilon \to 0$ власних значень та власних функцій системи для різних значень параметра m. У рамках цієї моделі вдалося дослідити спектральні властивості багатьох

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A75; Secondary 49R05, 35B25.

класичних коливних систем [1,6 – 13]. У праці [6] сформульовано та доведено теореми збіжності і побудовано повні асимптотичні розвинення власних елементів задачі для оператора Лапласа з крайовою умовою Діріхле. У [7,8] доведені теореми збіжності у випадку спектральних задач Неймана для оператора Лапласа з однією та, відповідно, кількома приєднаними масами, а в [10,11] побудовано повні асимптотичні розвинення власних значень та власних функцій цих задач.

Виникнення локальних коливань у системі, яка описується рівняннями теорії пружності, відповідає випадку $m > 2$. Його ми і будемо розглядати.

1. Позначення та деякі попередні відомості. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ будемо позначати точки через $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $\overline{G}$ — замикання в $\mathbb{R}^3$ множини G.

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^3$. Через $H^1(\Omega)$ позначимо гільбертів простір, отриманий поповненням простору $C^1(\overline{\Omega})$ за нормою

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Якщо $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор-стовпці, то через (u, v) позначимо суму $u_i v_i$, і, як звичайно, $|u| = (u, u)^{1/2}$. Тут і надалі, якщо не обумовлено протилежне, припускаємо сумування за індексами, які повторюються, від 1 до 3. Для матриць $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ приймемо $(A, B) = a_{ij} b_{ij}$, $|A| = (A, A)^{1/2}$. Нехай усі компоненти векторів u, v, чи елементи матриць A, B належать гільбертовому простору H зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_H$. Позначимо

$$(u, v)_H = (u_i, v_i)_H, \quad \|u\|_H = (u, u)^{1/2}_H; \qquad (A, B)_H = (a_{ij}, b_{ij})_H, \quad \|A\|_H = (A, A)^{1/2}_H$$

і будемо писати $u, v \in H$, $A, B \in H$ замість $u, v \in H^3$, $A, B \in H^9$. Через ∇u та $e(u)$ позначимо матриці з елементами $(\nabla u)_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ та $e_{ij} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)$. У теорії пружності вектор u називають вектором переміщень, а матрицю $e(u)$ — тензором деформацій.

Надалі нам будуть потрібні такі твердження та теореми.

Лема 1.1 (Нерівність Пуанкаре) [1]. *Нехай Ω — обмежена в $\mathbb{R}^3$ область з ліпшицевою межею. Тоді для функцій $u \in H^1(\Omega)$, таких що $\int_\Omega \rho u \, dx = 0$, справджується нерівність*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.1}$$

де C — стала, яка залежить лише від Ω; $\rho(x)$ — додатна обмежена вимірна функція на Ω.

Лема 1.2 (Нерівність Харді) [1,14]. *Для функцій $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ виконується нерівність*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |x|^{-2} |u(x)|^2 \, dx \leqslant C \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{1.2}$$

де стала C не залежить від u.

Нехай H та V — гільбертові простори з нормами $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_V$ та скалярними добутками $(\cdot, \cdot)_H$, $(\cdot, \cdot)_V$ відповідно.

Лема 1.3 [15,с.186]. *Нехай простір H неперервно та компактно вкладається в V. Тоді оператор $A : H \to H$, який визначається співвідношенням*

$$(Au, v)_H = (u, v)_V, \quad u, v \in H,$$

є обмежений, додатний, самоспряжений та компактний.

Лема 1.4 [16]. *Нехай $A : H \to H$ — самоспряжений додатний компактний оператор, а вектор $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times H$ такий, що $\|Au - \mu u\|_H \leqslant \beta$, $\|u\|_H = 1$, $\beta = \mathrm{const} > 0$. Тоді для довільного $d > \beta$ існує пара $(\mu_i, \widetilde{u}) \in \mathbb{R} \times H$, де μ_i — власне значення оператора A, $\|\widetilde{u}\|_H = 1$, така, що*

$$|\mu_i - \mu| \leqslant \beta, \qquad \|u - \widetilde{u}\|_H \leqslant 2d^{-1}\beta$$

і $\widetilde{u}$ є лінійною комбінацією власних векторів оператора A, які відповідають власним значенням A з інтервалу $[\mu - d, \mu + d]$.

Означення 1.1. *Нехай M і N — підпростори гільбертового простору H, а P_M і P_N — відповідні ортопроектори. Розхилом між підпросторами M і N назвемо величину*

$$\Theta_H(M, N) = \|P_M - P_N\| = \sup_{\|u\|_H = 1} \|(P_M - P_N)u\|_H.$$

Лема 1.5 [9]. *Нехай $\dim M = \dim N = r < \infty$ і для довільного вектора $u \in M$, $\|u\|_H = 1$, існує вектор $v \in M$, $\|v\|_H = 1$ такий, що $\|u - v\|_H \leqslant \beta$, де $0 < \beta < r^{-1}$. Тоді $\Theta_H(M, N) \leqslant C\beta$, де стала C залежить лише від r.*

Наведемо тепер деякі властивості коефіцієнтів системи рівнянь теорії пружності [1]. В області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ розглянемо оператор лінійної теорії пружності

$$\mathcal{L}(\partial_x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A^{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\right), \tag{1.3}$$

де A^{jl} — сталі матриці, елементи a_{ik}^{jl} яких задовольняють умови

$$a_{ik}^{jl} = a_{jk}^{il} = a_{ki}^{lj}; \quad \varkappa_1 \eta_{ij}\eta_{ij} \leqslant a_{ik}^{jl}\eta_{ij}\eta_{kl} \leqslant \varkappa_2 \eta_{ij}\eta_{ij}, \quad \varkappa_1, \varkappa_2 = \mathrm{const} > 0 \tag{1.4}$$

для довільної симетричної матриці $\{\eta_{ij}\}$ з дійсними елементами.

Набору матриць A^{jl} поставимо у відповідність лінійне перетворення $\mathfrak{A}$ в просторі матриць, яке переводить матрицю $\xi = \{\xi_{ij}\}$ в матрицю $\mathfrak{A}\xi = \{a_{ik}^{jl}\xi_{ij}\}$.

Лема 1.6 [1]. *Для довільних дійсних матриць $\xi = \{\xi_{ij}\}$ та $\eta = \{\eta_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ справедливі співвідношення:*

$$(\mathfrak{A}\xi, \eta) = (\xi, \mathfrak{A}\eta),$$
$$(\mathfrak{A}\xi, \eta) \leqslant \frac{\varkappa_2}{4}|\xi + \xi^\top||\eta + \eta^\top|,$$
$$|\xi + \xi^\top|^2 \leqslant \frac{4}{\varkappa_1}(\mathfrak{A}\xi, \xi),$$

де $\top$ позначає символ транспонування, сталі $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ті ж, що і в (1.4).

Нехай $\widetilde{\Psi}(x)$ — (3×3)–матриця, стовпцями якої є векторні добутки вектора x на орти осей координат. Розглянемо матрицю $\Psi(x) = (E, \widetilde{\Psi}(x))$ розміром (3×6), перші три стовпці якої утворюють одиничну матрицю E, а останні — матрицю $\widetilde{\Psi}(x)$.

Означення 1.2. *Жорстким переміщенням називається вектор-функція вигляду* $\Psi(x)\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^6$. *Лінеал* $G_0 = \{\Psi(x)\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^6\}$ *будемо називати простором жорстких переміщень.*

У випадку доведення розв'язності основних крайових задач теорії пружності й отримання оцінок розв'язків фундаментальну роль відіграють нерівності Корна [1,14]. Сформулюємо теореми про нерівності Корна в потрібній нам формі.

Теорема 1.1 (Нерівність Корна) [1,14]. *Нехай* Ω *— обмежена область в* $\mathbb{R}^3$ *з ліпшицевою межею і* U *— замкнений підпростір вектор-функцій із* $H^1(\Omega)$ *такий, що* $U \cap G_0 = \{0\}$, *де* G_0 *— простір жорстких переміщень. Тоді для довільної* $u \in U$ *виконується нерівність*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|e(u)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.5}$$

де стала C *залежить лише від* Ω.

Теорема 1.2 (Нерівність Корна в просторі) [14]. *Для довільної вектор-функції* $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, *такої що* $\|e(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3))} < \infty$ *і* $|u(x)| = o\,(1)$ *при* $|x| \to \infty$, *справедлива нерівність*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|e(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{1.6}$$

де стала C *не залежить від* u.

2. Формулювання задачі. Нехай Ω і ω — області в $\mathbb{R}^3$ з компактними замиканнями та гладкими межами. Вважаємо, що обидві області містять початок координат. Через ω_ε будемо позначати множину $\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$. Дійсний параметр $\varepsilon > 0$ виберемо настільки малим, щоб $\overline{\omega}_\varepsilon \subset \Omega$. Розглянемо спектральну задачу Неймана для системи рівнянь лінійної теорії пружності

$$\mathcal{L}(\partial_x)u_\varepsilon + \lambda(\varepsilon)\rho_\varepsilon(x,m)u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega; \tag{2.1}$$

$$\sigma_\nu(\partial_x)u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.2}$$

де $\mathcal{L}$ — оператор лінійної теорії пружності (1.3), коефіцієнти якого задовольняють умови (1.4); $\sigma_\nu(\partial_x) = \nu_j(x)A^{jl}\dfrac{\partial}{\partial x_l}$ — оператор напружень; $\nu(x)$ — орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$ в точці x; $u_\varepsilon(x) = (u_1(\varepsilon,x), u_2(\varepsilon,x), u_3(\varepsilon,x))$, $\lambda(\varepsilon)$ — спектральний параметр; $\rho_\varepsilon(x,m) = p(x) + \varepsilon^{-m}q(x/\varepsilon)$, $m \in \mathbb{R}$. Функції $p(x)$ і $q(x)$ — додатні, вимірні, обмежені на множинах $\overline{\Omega}$ та ω відповідно, і $q(x)$ продовжена нулем поза область ω.

На межі $\partial\omega_\varepsilon$ поділу двох середовищ необхідно задавати умови неперервності переміщень та напружень

$$[u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = [\sigma_\nu u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = 0,$$

де $[f]_{\partial G}$ — стрибок функції f під час переходу через межу ∂G області $G \subset \mathbb{R}^3$ вздовж нормалі.

Означення 2.1. *Число $\lambda(\varepsilon)\in\mathbb{C}$ і вектор-функцію $u_\varepsilon(x)\in H^1(\Omega)$, $u_\varepsilon\not\equiv 0$, будемо називати власним значенням та відповідним йому власним вектором задачі (2.1),(2.2), якщо вони задовольняють інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{\Omega}(\mathfrak{A}\nabla u_\varepsilon,\nabla\varphi)\;dx=\lambda(\varepsilon)\Big(\int\limits_{\Omega}p(x)u_\varepsilon\varphi\,dx+\varepsilon^{-m}\int\limits_{\omega_\varepsilon}q(x/\varepsilon)u_\varepsilon\varphi\,dx\Big) \tag{2.3}$$

для довільної вектор-функції $\varphi\in H^1(\Omega)$.

Як відомо, задача (2.1),(2.2) має послідовність $\{\lambda_s(\varepsilon)\}_{s=1}^\infty$ невід'ємних дійсних власних значень з точкою нагромадження в нескінченності. Всі вони мають скінченну кратність, причому нуль є шестикратним власним значенням, якому відповідає власний підпростір G_0 жорстких переміщень. Відповідні власні вектори $\{u_\varepsilon^{(s)}(x)\}_{s=1}^\infty$ утворюють ортонормований базис у $H^1(\Omega)$.

Наша мета — *дослідити поведінку при $\varepsilon\to 0$ власних значень $\lambda(\varepsilon)$ та власних векторів u_ε задачі (2.1),(2.2) для різних значень $m>2$.* Виявилося, що є п'ять різних випадків такої поведінки, а саме: $2<m<3$; $m=3$; $3<m<5$; $m=5$; $m>5$. Розглянемо їх.

3. Зведення задачі до операторного рівняння. Задачу (2.1),(2.2) розглянемо в змінних $\xi=\varepsilon^{-1}x$, увівши новий спектральний масштаб $\mu(\varepsilon)=\varepsilon^{2-m}\lambda(\varepsilon)$:

$$\mathcal{L}(\partial_\xi)w_\varepsilon+\mu(\varepsilon)\left(\varepsilon^m p(\varepsilon\xi)+q(\xi)\right)w_\varepsilon=0,\quad \xi\in\Omega^\varepsilon; \tag{3.1}$$

$$\sigma_\nu(\partial_\xi)w_\varepsilon(\xi)=0,\quad \xi\in\partial\Omega^\varepsilon, \tag{3.2}$$

де $\Omega^\varepsilon=\{\xi\in\mathbb{R}^3_\xi\mid \varepsilon\xi=x\in\Omega\}$, $\nu(\xi)$ — орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega^\varepsilon$ у точці ξ. Функції $u_\varepsilon(x)$ та $w_\varepsilon(\xi)$ пов'язані співвідношенням

$$w_\varepsilon(\xi)=\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon(\varepsilon\xi). \tag{3.3}$$

Нормувальний множник $\varepsilon^{1/2}$ вибрано так, що $\|\nabla_\xi w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}=\|\nabla_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$. Відповідна інтегральна тотожность (2.3) набуває вигляду

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\mathfrak{A}\nabla w,\nabla\varphi)\;d\xi-\mu(\varepsilon)\Big(\varepsilon^m\int\limits_{\Omega^\varepsilon}p(\varepsilon\xi)w\varphi\,d\xi+\int\limits_{\omega}q(\xi)w\varphi\,d\xi\Big)=0, \tag{3.4}$$
$$w,\ \varphi\in H^1(\Omega^\varepsilon).$$

Розглянемо білінійну форму $\mathfrak{a}_\varepsilon(u,v)=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\mathfrak{A}\nabla u,\nabla v)\;d\xi$, $u,v\in H^1(\Omega^\varepsilon)$. Зазначимо, що простір жорстких переміщень G_0 збігається з підпростором $\{u\in H^1(\Omega^\varepsilon)|\;\mathfrak{a}_\varepsilon(u,v)=0,\ v\in H^1(\Omega^\varepsilon)\}$. Позначимо через $\mathcal{H}_\varepsilon$ підпростір у $H^1(\Omega^\varepsilon)$

$$\mathcal{H}_\varepsilon=\{v\in H^1(\Omega^\varepsilon)\mid\ (p(\varepsilon\xi)v,g)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}=0,\ g\in G_0\}.$$

Зауваження 3.1. *$\mathcal{H}_\varepsilon$ — замкнений підпростір у $H^1(\Omega^\varepsilon)$; довільну вектор-функцію $u\in H^1(\Omega^\varepsilon)$ можна однозначно записати у вигляді*

$$u = v + \Psi(\xi)\alpha, \quad v \in \mathcal{H}_\varepsilon,\ \alpha \in \mathbb{R}^6. \tag{3.5}$$

Крім того, в нерівностях Харді (1.2) і Корна (1.5) після заміни $\xi = \varepsilon^{-1}x$ стала C не змінюється, а нерівність Пуанкаре (1.1) для функцій $w(\xi) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, таких що $\int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)w(\xi)\,d\xi = 0$, набуває вигляду

$$\|w\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|\nabla_\xi w\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{3.6}$$

де стала C не залежить від ε та w. Надалі під нерівністю Пуанкаре будемо розуміти нерівність (3.6).

Використовуючи лему 1.6, нерівності Пуанкаре та Корна, можна легко показати, що форма $\mathfrak{a}_\varepsilon$ є симетрична обмежена і коерцитивна на $\mathcal{H}_\varepsilon$. Тоді вона визначає на $\mathcal{H}_\varepsilon$ скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \mathfrak{a}_\varepsilon(\cdot,\cdot)$, еквівалентний скалярним добуткам $(\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$ та $(\nabla\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$.

Власний вектор w_ε задачі (3.1),(3.2), який відповідає власному значенню $\mu(\varepsilon)$, запишемо у вигляді (3.5)

$$w_\varepsilon(\xi) = v_\varepsilon(\xi) + \Psi(\xi)\alpha(\varepsilon), \quad v_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon,\ \alpha_\varepsilon \in \mathbb{R}^6. \tag{3.7}$$

Тоді $\mu(\varepsilon)$ та вектор-функція v_ε є розв'язком задачі на власні значення

$$\mathcal{L}v_\varepsilon + \mu(\varepsilon)\left((\varepsilon^m p(\varepsilon\xi)+q(\xi))v_\varepsilon - (\varepsilon^m p(\varepsilon\xi)+q(\xi))\,\Psi(\xi)J^{-1}(\varepsilon)\tau(v_\varepsilon)\right) = 0, \quad \xi \in \Omega^\varepsilon; \tag{3.8}$$

$$\sigma_\nu v_\varepsilon(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega^\varepsilon; \qquad \left(p(\varepsilon\xi)v_\varepsilon, g\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = 0, \quad g\in G_0, \tag{3.9}$$

де для вектор-функції $f \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ через $\tau(f)$ позначаємо шестикомпонентний вектор $\tau(f) = \int\limits_\omega q(\xi)\Psi^\top(\xi)f(\xi)\,d\xi$; $J(\varepsilon) = \varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \rho_\varepsilon(\varepsilon\xi, m)\Psi^\top\Psi\,d\xi$ — симетрична додатно визначена матриця. В цьому можна переконатися, підставивши вирази (3.5) для вектор-функцій w, і φ в тотожність (3.4). Тоді в $\mathcal{H}_\varepsilon$ отримаємо інтегральну тотожність

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\mathfrak{A}\nabla v, \nabla\psi)\;d\xi - \mu(\varepsilon)\Big(\varepsilon^m\int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)v\psi\,d\xi + \int\limits_\omega q(\xi)v\psi\,d\xi -\\ -(J^{-1}(\varepsilon)\tau(v),\tau(\psi))_{\mathbb{R}^6}\Big) = 0,\end{aligned} \tag{3.10}$$

яка відповідає задачі (3.8),(3.9). Якщо в тотожність (3.4) замість w підставити вираз (3.5), а за функцію φ почергово взяти шість базисних функцій простору G_0 вигляду $\Psi e^{(k)}$, де $\{e^{(k)}\}_{k=1}^6$ — канонічний базис в $\mathbb{R}^6$, то отримаємо лінійну алгебраїчну систему шести рівнянь

$$J(\varepsilon)\alpha(\varepsilon) = -\tau(v). \tag{3.11}$$

Матриця $J(\varepsilon)$ є матрицею Грама системи функцій $\{\Psi(\xi)e^{(k)}\}_{k=1}^{6}$ стосовно вагового скалярного добутку $(\varepsilon^m \rho_\varepsilon(\varepsilon\xi, m)\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$.

Отже, задачу (3.1),(3.2) ми звели до задачі (3.8),(3.9), власні значення якої збігаються з додатними власними значеннями задачі (3.1),(3.2). Власний вектор w_ε останньої реконструюється за відповідним власним вектором v_ε задачі (3.8),(3.9) формулою (3.7), де $\alpha(\varepsilon)$ — розв'язок системи (3.11).

Задача (3.8),(3.9) еквівалентна спектральному рівнянню

$$B_\varepsilon v_\varepsilon = \mu^{-1}(\varepsilon) v_\varepsilon, \quad v_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$$

для обмеженого додатного самоспряженого компактного оператора B_ε в $\mathcal{H}_\varepsilon$, який визначається рівністю

$$\begin{aligned}(B_\varepsilon u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \varepsilon^m \left(p(\varepsilon\xi)u, v\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left(q(\xi)u, v\right)_{L^2(\omega)} - \\ - \left(J^{-1}(\varepsilon)\tau(u), \tau(v)\right)_{\mathbb{R}^6}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Те, що рівність (3.12) визначає оператор зі згаданими властивостями, випливає з леми 1.3, оскільки простір $H^1(\Omega^\varepsilon)$ компактно вкладається в $L^2(\Omega^\varepsilon)$, а білінійну форму, яка є в правій частині (3.12), можна взяти як скалярний добуток у просторі $L^2(\Omega^\varepsilon)$, еквівалентний стандартному скалярному добутку. Пояснення потребує лише додатність цієї форми. Її ми покажемо трохи пізніше.

4. Гранична (при $\varepsilon \to 0$) задача та її спектральні властивості. Щоб перейти в тотожності (3.10) до границі при $\varepsilon \to 0$, встановимо асимптотику розв'язку $\alpha(\varepsilon)$ системи (3.11). Для цього детальніше розглянемо структуру матриці $J(\varepsilon)$. Враховуючи вигляд матриці Ψ та густини $\rho_\varepsilon(m, x)$, маємо

$$J(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{m-3} J_p^0 & \varepsilon^{m-4} J_p^1 \\ -\varepsilon^{m-4} J_p^1 & \varepsilon^{m-5} J_p^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_q^0 & J_p^q \\ -J_q^1 & J_q^2 \end{pmatrix} \equiv J_p(\varepsilon) + J_q, \tag{4.1}$$

де для обмеженої вимірної функції $f(x)$ на Ω через J_f^k, $k = 0, 1, 2$, позначаємо (3×3)-матриці

$$J_f^0 = \int\limits_\Omega f(x) E\, dx, \quad J_f^1 = \int\limits_\Omega f(x)\widetilde{\Psi}(x)\, dx, \quad J_f^2 = \int\limits_\Omega f(x)\widetilde{\Psi}(x)\widetilde{\Psi}^\top(x)\, dx.$$

Матриці $J_p(\varepsilon)$ та J_q в зобаженні (4.1) симетричні і додатно визначені. Використовуючи асимптотичні методи та враховуючи структуру матриці $J(\varepsilon)$, можна довести таку лему.

Лема 4.1. *Для розв'язку $\alpha(\varepsilon)$ системи (3.11) справедлива асимптотика*

$$\alpha(\varepsilon) = -K(m)\tau(v) + O(\varepsilon^{\gamma(m)}), \quad \varepsilon \to 0, \tag{4.2}$$

де

$$K(m)=\begin{cases}\mathbb{O}, & 2<m<3;\\ \operatorname{diag}\left((J_q^0+F_p)^{-1},\ \mathbb{O}\right), & m=3;\\ \operatorname{diag}\left((J_q^0)^{-1},\ \mathbb{O}\right), & 3<m<5;\\ \left(J_q+\operatorname{diag}(\mathbb{O},J_p^2)\right)^{-1}, & m=5;\\ J_q^{-1}, & m>5;\end{cases} \tag{4.3}$$

матриця

$$F_p=J_q^0+J_p^1\left(J_p^2\right)^{-1}J_p^1 \tag{4.4}$$

симетрична і додатно визначена;

$$\gamma(m)=\begin{cases}1, & m=3,4,5;\\ 3-m, & 2<m<3;\\ \min\{m-3,\ 4-m\}, & 3<m<4;\\ \min\{m-4,\ 5-m\}, & 4<m<5;\\ m-5, & m>5.\end{cases} \tag{4.5}$$

Позначимо через $\mathcal{H}$ гільбертів простір, отриманий поповненням множини $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ за нормою

$$\|u\|^2=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(|\xi|^{-2}|u(\xi)|^2+|\nabla u(\xi)|^2\right)d\xi.$$

Зауваження 4.1. *Для вектор-функцій з $\mathcal{H}$ виконуються нерівність Корна в просторі та нерівність Харді, а тому рівність $\|u\|^2_{\mathcal{H}}=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\mathfrak{A}\nabla u,\nabla v\right)d\xi$ визначає на $\mathcal{H}$ норму, еквівалентну нормам $\|\cdot\|$ та $\|\nabla\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.*

Розглянемо в $\mathbb{R}^3$ спектральну задачу

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(\partial_\xi)v+\mu q(\xi)\left(v-\Psi(\xi)K(m)\tau(v)\right)d\xi=0,\\ |v(\xi)|=O(|\xi|^{-1})\quad\text{при}\quad|\xi|\to\infty,\end{gathered} \tag{4.6}$$

де матриця $K(m)$ визначена в (4.3).

Під власним вектором задачі (4.6) розуміємо вектор-функцію $v\in\mathcal{H}$, $v\not\equiv 0$, яка при деякому $\mu\in\mathbb{C}$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\mathfrak{A}\nabla v,\nabla\psi\right)d\xi-\mu\Big(\int\limits_{\omega}q(\xi)v\psi\,d\xi-\left(K(m)\tau(v),\tau(\psi)\right)_{\mathbb{R}^6}\Big)=0 \tag{4.7}$$

для довільної вектор-функції $\psi\in\mathcal{H}$.

Лема 4.2. *Для вектор-функцій $u \in \mathcal{H}$ справджується нерівність*

$$\|u(\xi)\|_{L^2(\omega)} \leqslant C\|u(\xi)\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.8}$$

де стала C не залежить від u.

Доведення. Використовуючи нерівність Харді, маємо

$$\int\limits_{\omega} |\xi|^2|\xi|^{-2}|u|^2\,d\xi \leqslant C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2}|u|^2\,d\xi \leqslant C_2\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3\|u\|^2_{\mathcal{H}},$$

що й треба було довести.

Розглянемо білінійну форму

$$\mathcal{D}(u,v) = (q(\xi)u,v)_{L^2(\omega)} - (K(m)\tau(u),\tau(v)) \quad u,v \in \mathcal{H}. \tag{4.9}$$

Лема 4.3. *Білінійна форма (4.9) симетрична, обмежена і невід'ємна на $\mathcal{H}$.*

Доведення. Симетричність форми (4.9) очевидна, обмеженість випливає з нерівностей Коші–Буняковського, Гельдера та леми 4.2. Доведемо її невід'ємність. Для $2<m<3$ цей факт тривіальний. Нехай $3\leqslant m<5$. Оскільки матриця $F_p \geqslant 0$ (див. (4.4)), то $\left(J_q^0+F_p\right)^{-1} \leqslant \left(J_q^0\right)^{-1} = q_0^{-1}E$, де $q_0 = \int\limits_{\omega} q(\xi)\,d\xi$. Тоді

$$\mathcal{D}(v,v) \geqslant (q(\xi)v,v)_{L^2(\omega)} - q_0^{-1}\Big(\int\limits_{\omega} qv\,d\xi\Big)^2 \geqslant 0$$

для довільної функції $v\in\mathcal{H}$. Нехай $m\geqslant 5$. Оскільки $K(m)\equiv J_q^{-1}\geqslant K(5)$ при $m>5$, то досить довести нерівність

$$\mathcal{D}(v,v) \equiv (q(\xi)v,v)_{L^2(\omega)} - \left(J_q^{-1}\tau(v),\tau(v)\right) \geqslant 0 \quad v \in \mathcal{H}. \tag{4.10}$$

Нехай

$$\mathcal{H}_0 = \{v \in \mathcal{H} \mid v_{|\omega} \in G_0\},$$
$$\mathcal{H}_1 = \{v \in \mathcal{H} \mid (q(\xi)v,w)_{L^2(\omega)} = 0,\ w \in \mathcal{H}_0\}.$$

Тоді довільну вектор-функцію $v \in \mathcal{H}$ можна однозначно з точністю до функції, що дорівнює нулю на множині ω, записати у вигляді $v = v^{(0)} + v^{(1)}$, $v^{(0)} \in \mathcal{H}_0$, $v^{(1)} \in \mathcal{H}_1$. Підставляючи цей вираз у нерівність (4.10), безпосередньо переконуємось в її справедливості. Лему доведено.

Зауваження 4.2. *Білінійна форма в правій частині (3.12) додатна, оскільки відповідна квадратична форма оцінюється знизу через форму (4.10).*

Лема 4.4. *Співвідношення* $(Bv, w)_{\mathcal{H}} = \mathcal{D}(v, w)$, $v, w \in \mathcal{H}$, *визначає в* $\mathcal{H}$ *лінійний обмежений самоспряжений невід'ємний компактний оператор* B.

Доведення. Всі властивості оператора B, крім компактності, є наслідком леми 4.3. Доведемо компактність оператора B. Нехай послідовність $\{v_s\}$ — слабко збіжна в $\mathcal{H}$ до нуля при $s \to \infty$. Тоді вона обмежена в $\mathcal{H}$, звідки $\{v_{s|\omega}\}$ обмежена в $H^1(\omega)$. Справді, використовуючи лему 4.2, маємо

$$\|v_s\|^2_{L^2(\omega)} + \|\nabla v_s\|^2_{L^2(\omega)} \leqslant C_1\|v_s\|^2_{\mathcal{H}} + \|\nabla v_s\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2\|v_s\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant C_3.$$

Згідно з компактністю вкладення простору $H^1(\omega)$ в $L^2(\omega)$ існує підпослідовність $\{v_{s'|\omega}\}$, сильно збіжна в $L^2(\omega)$ до нуля. Покажемо, знову використовуючи лему 4.2 (для функції $Bv_{s'}$), що $Bv_{s'} \to 0$ при $s \to \infty$. Це випливає з оцінки

$$\|Bv_{s'}\|^2_{\mathcal{H}} = (qv_{s'}, Bv_{s'})_{L^2(\omega)} - (K(m)\tau(v_{s'}), \tau(Bv_{s'}))_{\mathbb{R}^6} \leqslant C_1\|v_{s'}\|_{L^2(\omega)}\|Bv_{s'}\|_{\mathcal{H}}.$$

Лему доведено.

Отже, оператор B має дискретний невід'ємний дійсний спектр і відповідну ортонормовану в $\mathcal{H}$ систему власних векторів. Оператор B має нескінченновимірне ядро, а власні підпростори, які відповідають ненульовим власним значенням, скінченновимірні. Причому величини, обернені до ненульових власних значень оператора B (характеристичні числа), є власними значеннями задачі (4.6), яка еквівалентна спектральному рівнянню

$$Bv = \mu^{-1}v \tag{4.11}$$

в просторі $\mathcal{H}$.

Лема 4.5. *Будь-який розв'язок* $v(\xi) \in \mathcal{H}$ *рівняння (4.6) допускає асимптотичне зображення*

$$|v(\xi)| = O(|\xi^{-1}|), \quad |\nabla v(\xi)| = O(|\xi^{-2}|), \qquad |\xi| \to \infty. \tag{4.12}$$

Доведення. Нехай $K \subset \mathbb{R}^3$ — куля з центром у початку координат така, що $\omega \subset K$. Поза кулею K рівняння (4.6) має вигляд $\mathcal{L}(\partial_\xi)v = 0$, а отже, його розв'язки в $\mathbb{R}^3 \backslash K$ гладкі (внутрішня гладкість розв'язків еліптичних задач) і, крім того, мають обмежений інтеграл Діріхле. Тоді, згідно з [17], такі розв'язки допускають в околі нескінченності зображення $v(\xi) = c + v^0(\xi)$, де $c \in \mathbb{R}^3$ — сталий вектор-стовпець, а для $v^0(\xi)$ справедливі асимптотики (4.12) при $|\xi| \to \infty$. Для нашого випадку, оскільки $v \in \mathcal{H}$, константа $c = 0$. Лему доведено.

5. Основні результати. Визначимо, як співвідносяться задачі (3.8),(3.9) та (4.6). Зв'язок між ними описують такі дві леми.

Лема 5.1. *Нехай* $\mu(\varepsilon)$ *та* $v_\varepsilon(\xi)$ *— власне значення та відповідний йому власний вектор задачі (3.8),(3.9), нормований умовою* $\|v_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = 1$. *Нехай* $\mu(\varepsilon) \to \mu^* \neq 0$ *при* $\varepsilon \to 0$

і для деякої підпослідовності $\varepsilon' \to 0$ справджується умова: для будь–якого компакта $K \subset \mathbb{R}^3$ підпослідовність $v_{\varepsilon'}(\xi)$ слабко збіжна при $\varepsilon' \to 0$ в $H^1(K)$ до $v_*(\xi)$. Тоді μ_* та $v_*(\xi)$ — власне значення та відповідний йому власний вектор задачі (4.6).

Доведення. Штрих біля ε будемо опускати. За умовою леми пара $(\mu(\varepsilon), v_\varepsilon)$ задовольняє інтегральну тотожність (3.10):

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\mathfrak{A}\nabla v_\varepsilon, \nabla\varphi)\, d\xi - \mu(\varepsilon)\Big(\varepsilon^m \left(p(\varepsilon\xi)v_\varepsilon, \varphi\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (q(\xi)v_\varepsilon, \varphi)_{L^2(\omega)} - \\ -(J^{-1}(\varepsilon)\tau(v_\varepsilon), \tau(\varphi))_{\mathbb{R}^6}\Big) = 0 \tag{5.1}$$

для будь–якої вектор-функції $\varphi \in \mathcal{H}_\varepsilon$. Візьмемо довільну функцію $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ і $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливе включення $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega^\varepsilon$. Тоді згідно з умовою леми

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\mathfrak{A}\nabla v_\varepsilon, \nabla\psi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\mathfrak{A}\nabla v_\varepsilon, \nabla\psi)\, d\xi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\mathfrak{A}\nabla v_*, \nabla\psi)\, d\xi. \tag{5.2}$$

Оскільки послідовність $\{v_\varepsilon(\xi)\}$ обмежена в $\mathcal{H}_\varepsilon$, то тоді послідовність $\{v_{\varepsilon|\omega}\}$ сильно збіжна в $L^2(\omega)$, (а отже, і в $L^1(\omega)$) до $v_{*|\omega}$. Звідси, враховуючи ще лему 4.1, маємо

$$\begin{aligned} (q(\xi)v_\varepsilon, \psi)_{L^2(\omega)} &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (q(\xi)v_*, \psi)_{L^2(\omega)}, \\ \tau(v_\varepsilon) &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \tau(v_*), \\ J^{-1}(\varepsilon)\tau(v_\varepsilon) &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} K(m)\tau(v_*). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Нарешті, згідно з нерівністю Пуанкаре

$$\varepsilon^m |(p(\varepsilon\xi)v_\varepsilon, \psi)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}| \leqslant C_1\varepsilon^{m-2}\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_2\varepsilon^{m-2}\|\psi\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.4}$$

Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$ в тотожності (5.1) (з урахуванням (5.2)–(5.4) і щільності $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ в $\mathcal{H}$) отримаємо твердження леми.

Залишилось довести, що $v_* \not\equiv 0$. Справді, взявши в тотожності (5.1) $\psi = v_\varepsilon$ та перейшовши в ній після цього до границі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$1 = \mu_*\Big((q(\xi)v_*, v_*)_{L^2(\omega)} - (K(m)\tau(v_*), \tau(v_*))_{\mathbb{R}^6} \Big),$$

звідки випливає, що $v_* \not\equiv 0$ на ω. Лему доведено.

Нехай число μ та функція $v(\xi)$ є розв'язком задачі (4.6). Розглянемо функцію $w_\varepsilon(\xi) = v(\xi) - h_\varepsilon(\xi)$, де вектор-функція $h_\varepsilon \in \mathcal{H}$ має асимптотику (4.12) в околі нескінченності, дорівнює нулю в околі області ω, і така, що $w_{\varepsilon|\Omega^\varepsilon} \in \mathcal{H}_\varepsilon$. За таку поправку до функції v візьмемо функцію

$$h_\varepsilon(\xi) = |\xi|^{-1}\phi(\varepsilon\xi)\Psi\left(\xi/|\xi|\right)\beta(\varepsilon),$$

де $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ — скалярна функція, що дорівнює нулю на $\overline{\omega}_\varepsilon$ та одиниці поза деяким фіксованим околом області ω_ε, $|\phi| \leqslant 1$. Вектор $\beta(\varepsilon)$ є розв'язком лінійної алгебраїчної системи рівнянь $M(\varepsilon)\beta(\varepsilon) = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)\Psi^\top(\xi)v(\xi)\,d\xi$ з матрицею

$$M(\varepsilon) = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)|\xi|^{-1}\phi(\xi/|\xi|)\Psi^\top(\xi)\Psi(\xi)\,d\xi.$$

Легко переконатись у тому, що справджуються нерівності $|\beta(\varepsilon)| \leqslant C$ та

$$\|h_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \tag{5.5}$$

Через V_μ позначимо власний підпростір, який відповідає r–кратному власному значенню μ задачі (4.6) і нехай $\{v^{(k)}\}_{k=1}^r$ — ортонормований базис у V_μ. Через $V_\mu(\varepsilon)$ позначимо підпростір у $\mathcal{H}_\varepsilon$, породжений тими власними векторами задачі (3.8),(3.9), для яких відповідні власні значення $\mu_\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$, а через $W_\mu(\varepsilon)$ — підпростір у $\mathcal{H}$, натягнутий на вектори $w_\varepsilon^{(k)}(\xi) = v^{(k)}(\xi) + h_\varepsilon^{(k)}(\xi)$. Зауважимо, що звуження на область Ω^ε функцій із $W_\mu(\varepsilon)$ утворюють підпростір у $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Лема 5.2. *Нехай μ і $v(\xi)$ — власне значення та відповідний йому власний вектор задачі (4.6). Тоді існують такі власне значення $\mu(\varepsilon)$ задачі (3.8),(3.9) та послідовність $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $v_\varepsilon \in V_\mu(\varepsilon)$, що $\mu(\varepsilon) \to \mu$ і $v_\varepsilon \to v$ в $H^1(G)$ при $\varepsilon \to 0$ для довільного компакта $G \subset \mathbb{R}^3$. Крім того, виконуються оцінки*

$$|\mu(\varepsilon) - \mu| \leqslant C(\mu)\varepsilon^{\beta(m)}, \tag{5.6}$$

$$\Theta_{\mathcal{H}_\varepsilon}(W_\mu(\varepsilon), V_\mu(\varepsilon)) \leqslant C(r)\varepsilon^{\beta(m)}, \tag{5.7}$$

де r — кратність власного значення μ,

$$\beta(m) = \begin{cases} 1/2, & m = 3,4,5; \\ \min\{m-2, 3-m\}, & 2 < m < 3; \\ \min\{m-3, 4-m\}, & 3 < m < 4; \\ \min\{m-4, 5-m\}, & 4 < m < 5; \\ \min\{m-5, 1/2\}, & m > 5. \end{cases} \tag{5.8}$$

Доведення. Нехай число μ та функція $v(\xi)$ є розв'язком задачі (4.6), тобто μ^{-1} та v — власне значення та власний вектор оператора B. Нехай $\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ — скалярна функція, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ в околі області ω_ε (який має діаметр порядку ε), $|\nabla\eta| \leqslant C$, $\operatorname{supp}\eta = K$. Їй у змінних ξ відповідає функція $\zeta_\varepsilon(\xi) = \eta(\varepsilon\xi) \in C_0^\infty(\Omega^\varepsilon)$, що дорівнює одиниці в околі області ω, $\operatorname{supp}\zeta_\varepsilon = K^\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|x = \varepsilon\xi \in K\}$, і для якої справджуються нерівності

$$|\nabla\zeta_\varepsilon(\xi)| \leqslant C\varepsilon, \qquad |\nabla(1-\zeta_\varepsilon(\xi))| \leqslant C\varepsilon. \tag{5.9}$$

За майже–власний вектор (у сенсі леми 1.4) оператора B_ε візьмемо вектор-функцію $w_{\varepsilon|\Omega^\varepsilon}$ (надалі писатимемо w_ε). Тоді для довільної функції $\varphi \in \mathcal{H}_\varepsilon$ маємо

$$\left|\left(B_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon, \varphi\right)_{\mathcal{H}_\varepsilon}\right| =$$

$$= \Bigg|\Big(\int\limits_\omega q(\xi) v\varphi\, d\xi - (K(m)\tau(v), \tau(\varphi))_{\mathbb{R}^6} - \mu^{-1}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\big(\mathfrak{A}\nabla v, \nabla(\zeta_\varepsilon\varphi)\big)\, d\xi\Big) +$$

$$+\varepsilon^m \left(p(\varepsilon\xi) w_\varepsilon, \varphi\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)} - \Big(\Big(J^{-1}(\varepsilon) - K(m)\Big)\tau(v), \tau(\varphi)\Big)_{\mathbb{R}^6} +$$

$$+\mu^{-1}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\big(\mathfrak{A}\nabla h_\varepsilon, \nabla\varphi\big)\, d\xi + \mu^{-1}\int\limits_{(\Omega\setminus K)^\varepsilon}\big(\mathfrak{A}\nabla v, \nabla\left((1-\zeta_\varepsilon)\varphi\right)\big)\, d\xi\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^m \left|\left(p(\varepsilon\xi) w_\varepsilon, \varphi\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right| + \left|\Big(\Big(J^{-1}(\varepsilon) - K(m)\Big)\tau(v), \tau(\varphi)\Big)_{\mathbb{R}^6}\right| +$$

$$+\mu^{-1}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\Big|\Big(\mathfrak{A}\nabla h_\varepsilon, \nabla\varphi\Big)\Big|\, d\xi + \mu^{-1}\int\limits_{(\Omega\setminus K)^\varepsilon}\Big|\Big(\mathfrak{A}\nabla v, \nabla\left((1-\zeta_\varepsilon)\varphi\right)\Big)\Big|\, d\xi =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Оцінимо кожен з доданків $I_j,\ j = 1, 2, 3, 4$.

Використовуючи нерівність Пуанкаре, одержимо

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant C_1\varepsilon^m \|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_2\varepsilon^{m-2}\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \\ &\leqslant C_3\varepsilon^{m-2}\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant C_3\varepsilon^{m-2}\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant C_4\varepsilon^{m-2}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Оскільки $J^{-1}(\varepsilon)\tau(v) = -\alpha(\varepsilon)$, то за лемою 4.1

$$I_2 \leqslant \varepsilon^{\gamma(m)}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}, \tag{5.11}$$

де $\gamma(m)$ визначена в (4.5).

Оскільки функція h_ε має асимптотику (4.12), то

$$I_3 \leqslant C_1\Big(\int\limits_{(\Omega\setminus K)^\varepsilon}|\nabla h(\xi)|^2\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_2\Big(\int\limits_{(\Omega\setminus K)^\varepsilon}|\xi|^{-4}\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant C_3\varepsilon^{1/2}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}. \tag{5.12}$$

Нарешті, враховуючи нерівності (5.9), Пуанкаре (для φ) та асимптотику (4.12), маємо

$$I_4 \leqslant C_1\Big(\int\limits_{(\Omega\setminus K)^\varepsilon}|\nabla v|^2\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_2\varepsilon^{1/2}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}. \tag{5.13}$$

Отже, враховуючи оцінки (5.10)–(5.13), отримуємо

$$\left|\left(B_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon, \varphi\right)_{\mathcal{H}_\varepsilon}\right| \leqslant C\varepsilon^{\beta(m)}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon},$$

звідки

$$\|(B_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon)\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{\beta(m)}, \tag{5.14}$$

де $\beta(m)$ визначена в (5.8).

За лемою 1.4 з оцінки (5.14) випливає, що існує таке власне значення $\lambda(\varepsilon)$ задачі (3.8),(3.9), що виконується оцінка (5.6). Число d, яке фігурує в лемі 1.4, вибираємо так, щоб інтервал $[\mu^{-1} - d,\ \mu^{-1} + d]$ не містив точок спектра оператора B, відмінних від μ^{-1}. Тоді за цією лемою існує такий вектор $v_\varepsilon(\xi) \in V_\mu(\varepsilon)$, $\|v_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = 1$, що

$$\|v_\varepsilon - w_{\varepsilon|\Omega^\varepsilon}\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant 2Cd^{-1}\varepsilon^{\beta(m)}, \tag{5.15}$$

причому $v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} v$ в $H^1(G)$ для довільного компакта $G \subset \mathbb{R}^3$. Доведемо це. Враховуючи нерівності (5.15) та (5.5), маємо

$$\begin{gathered}\|\nabla(v_\varepsilon - v)\|_{L^2(G)} \leqslant \|\nabla(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla(w_\varepsilon - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \\ \leqslant C_1\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} + C_2\|w_\varepsilon - v\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_3\varepsilon^{\beta(m)} + C_4\varepsilon^{1/2} \leqslant C_5\varepsilon^{\beta(m)}.\end{gathered} \tag{5.16}$$

Візьмемо функцію $\zeta_\varepsilon(\xi)$, введену на початку доведення леми, але яка дорівнює одиниці в околі компакта G. Тоді, використовуючи нерівності (5.5),(5.9),(5.15) та Пуанкаре, одержимо

$$\begin{gathered}\|v_\varepsilon - v\|_{L^2(G)} \leqslant \|w_\varepsilon - v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\zeta_\varepsilon(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(G)} \leqslant \\ \leqslant C_1\|w_\varepsilon - v\|_{\mathcal{H}} + C_2\|\nabla(\zeta_\varepsilon(v_\varepsilon - w_\varepsilon))\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \\ \leqslant C_3\varepsilon^{1/2} + C_4\varepsilon\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + C_5\|\nabla(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \\ \leqslant C_3\varepsilon^{1/2} + C_6\|\nabla(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_3\varepsilon^{1/2} + C_7\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant \\ \leqslant C_3\varepsilon^{1/2} + C_8\varepsilon^{\beta(m)} \leqslant C_9\varepsilon^{\beta(m)}.\end{gathered}$$

Звідси та з нерівності (5.16) маємо

$$\|v_\varepsilon - v\|^2_{H^1(G)} = \|v_\varepsilon - v\|^2_{L^2(G)} + \|\nabla(v_\varepsilon - v)\|^2_{L^2(G)} \leqslant C\varepsilon^{2\beta(m)},$$

тобто $v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} v$ в $H^1(G)$.

З нерівності (5.5) випливає, що $\dim W_\mu(\varepsilon) = \dim V_\mu$ і

$$\Theta_{\mathcal{H}}(W_\mu(\varepsilon), V_\mu) \leqslant C(r)\varepsilon^{1/2}. \tag{5.17}$$

З оцінки (5.15) та нерівності (5.17) випливає, що $\dim V_\mu \leqslant \dim V_\mu(\varepsilon)$. Справджується і обернена нерівність, яка є наслідком леми 5.1 та справедливості граничного переходу

$$\delta_{ij} = (v_\varepsilon^{(i)}, v_\varepsilon^{(j)})_{\mathcal{H}_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (v_*^{(i)}, v_*^{(j)})_{\mathcal{H}} = \delta_{ij}.$$

Отже, $\dim V_\mu = \dim V_\mu(\varepsilon) = \dim W_\mu(\varepsilon)$. Тоді, враховуючи нерівність (5.17), згідно з лемою 1.5 виконується нерівність (5.7). Лему доведено.

Через $U_\mu(\varepsilon)$ позначимо підпростір у $H^1(\Omega)$, породжений звуженнями на область Ω функцій

$$\varepsilon^{-1/2}\Big(v^{(k)}(m, x/\varepsilon) + \Psi(x/\varepsilon)\alpha^k(m)\Big),$$

де, нагадаємо, $\{v^{(k)}(m,x)\}_{k=1}^r$ — ортонормований базис у V_μ, а $\alpha^k(m) = -K(m)\tau(v^{(k)})$. Тоді леми 5.1 та 5.2 доводять таку теорему.

Теорема. *Нехай* $\{\lambda_s(\varepsilon)\}_{s=0}^{\infty}$ *— послідовність власних значень задачі (2.1),(2.2), а* $\{u_\varepsilon^{(s)}\}_{s=0}^{\infty}$ *— відповідна їй система ортонормованих у* $H^1(\Omega)$ *власних векторів. Тоді для* $s = 1, 2, \ldots$ *при* $\varepsilon \to 0$ *справджується оцінка*

$$\left|\varepsilon^{2-m}\lambda_s(\varepsilon) - \mu_s\right| \leqslant C(s)\varepsilon^{\beta(m)},$$

де $\{\mu_s\}_{s=0}^{\infty}$ *— послідовність власних значень задачі (4.6);* $\beta(m)$ *визначена в (5.8). Якщо* μ *— власне значення задачі (4.6) кратності* r, *то*

$$\Theta_{H^1(\Omega)}(V_\mu(\varepsilon), U_\mu(\varepsilon)) \leqslant C(r)\varepsilon^{\beta(m)}.$$

Ми довели, що власний вектор $u_\varepsilon(x)$ задачі (2.1),(2.2) має вигляд

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1/2}\Big(v(x/\varepsilon) + \Psi(x/\varepsilon)\alpha(m) + O(\varepsilon^{\beta(m)})\Big), \tag{5.18}$$

де v — відповідний власний вектор задачі (4.6), $\alpha(m) = -K(m)\tau(v)$. Формула (5.18) дає математичний опис ефекту локальних коливань. Форму власних коливань системи складає жорстке переміщення $\varepsilon^{-1/2}\Psi(x/\varepsilon)\alpha(m)$, на яке накладається високочастотна в околі області ω_ε компонента $\varepsilon^{-1/2}v(x/\varepsilon)$, що стає малою поза цим околом. Там $|\varepsilon^{-1/2}v(x/\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^{1/2}$ (див. (4.12)).

1. Олейник О.А.,Иосифьян Г.А.,Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред.- М.: Изд-во МГУ,1990.— 312с.
2. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. - М.: Мир, 1984.— 472с.
3. Sanches-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses* // Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics.Lecture Notes in Phys.— 1984.— N155.— P.346–368.
4. Sanches-Palensia E.,Tchatat H. *Vibration de systems élastiques avec des masses concentrées*// Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino.— 1984.— Vol.42,N3.— P.43–63.
5. Olejnik O.A.*Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularly perturbed operators* // Non-classical Continuum Mechanics. 1987. Lecture Notes series,122. Cambridge University Press.- P.188–205.
6. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А.*Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями* // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1990.— Т.192.— С.42–60
7. Головатый Ю.Д. *О влиянии сильных локальных возмущений плотности на спектр колебательных систем* // Нелинейные граничные задачи.— 1993.— Вып.5.— С.26–31.
8. Головатый Ю.Д. *Спектральная задача Неймана для оператора Лапласа с сингулярно возмущённой плотностью*// Успехи матем. наук.— 1990.— Т.45, N4.— С.147–148.

9. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами* // Тр. Московск. матем. об-ва.— 1992.— Т.54.— С.29–72.
10. Nazarov S.A. *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions* // Mathematical Modelling and Numerical Analysis.— 1993.— V.7,N6.— P.777–799.
11. Назаров С.А. *Об одной задаче Санчес-Паленсия с краевыми условиями Неймана*// Изв. ВУЗов, Матем.— 1989.— N11.— С.60–66.
12. Олейник О.А. *О собственных колебаниях тел с концентрированными массами* // Совр.пробл.прикл.мат. и матем.физики. М.: 1988.— С.101–128.
13. Hrabchak H.Ye. *On asymptotic properties of eigenvalues and eigenfunctions of an elasticity medium with concentrated masses* // Intern.Conf. "Nonlinear differential Equations". Book of Abstracts. Kiev,Aug. 21–27,1995.— P.57.
14. Кондратьев В.А., Олейник О.А. *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна.* // Успехи матем. наук.— 1988.— Т.43, Вып.5(263).— С.55–98.
15. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.– М.: Наука, 1983.— 421с.
16. Вишик М.И.,Люстерник А.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.* // Успехи матем. наук.— 1957.— Т.12,N 5.— С.3–122.
17. Бучукури Т.В., Гегелиа Т.Г. *О единственности решений основных задач теории упругости для бесконечных областей* // Дифференц. уравн.— 1989.— Т.25,N9.— С.1556–1565.

Стаття надійшла до редколегії 08.07.96