УДК 517.944.1

ІНТЕГРОВНІ СИСТЕМИ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ТОЧОК НА ПРЯМІЙ

А. Я. Вус

A. Ya. Vus. Integrable systems of interactive particles on the line. The hamiltonian systems of interactive particles with polinomial by velocities additional integral are considered. The properties of the analytical potentials of interaction are odtained. The exact form of integrable potentials is deduced for the case of the integral with constant coefficients at the members leading by velocities. These results are generalised for the case of pairwise distinct potentials of interaction.

Динаміка руху n однакових взаємодіючих частинок на прямій описується гамільтоновою системою з гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i<j} V(x_i - x_j), \tag{1}$$

де x_i і p_i, $i = 1, ..., n$ — відповідно координати та імпульси частинок; $V(\cdot)$ — парна функція (потенціал парної взаємодії). Мозер [1] і Калоджеро [2] довели, що система з гамільтоніаном (1) інтегровна за Ліувіллем, якщо V є $\mathcal{P}$-функцією Вейєрштрасса (або її виродженими випадками $z^{-2}, sin^{-2}z, sh^{-2}z$). В праці [3] доведено, що для трьох частинок це єдиний випадок, коли існує поліноміальний інтеграл третього степеня, незалежний від інтегралів H і $P = \sum p_i$.

Наша робота присвячена питанню існування додаткового поліноміального за імпульсами інтеграла довільного степеня для системи (1) у випадку трьох частинок.

Означення([3]). *Поліноміальний за імпульсами інтеграл $F = F(x,p)$ $2N$-го степеня називається інтегралом загального положення (ІЗП), якщо*

(i) $\{F, P\} = 0$;

(ii) старший однорідний за імпульсами доданок F_{2N} інтеграла F має сталі коефіцієнти;

(iii) $D_p^{2N-3}F_{2N}$ не є функцією елементарних симетричних поліномів σ_1 і σ_2.

Тут диференціальний оператор $D_p = \sum \dfrac{\partial}{\partial p_i}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 58F05.

Редукцією за відомим інтегралом $P = \sum p_i$ одержуємо систему на чотиривимірному фазовому просторі з гамільтоніаном, який знову позначатимемо через H:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(x) + V\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right), \tag{2}$$

Випишемо канонічні рівняння Гамільтона:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \dot{p}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial y}. \end{cases} \tag{3}$$

Нехай ця система має інтеграл $2N$-го степеня

$$F = F_{2N} + F_{2N-2} + \cdots + F_0, \tag{4}$$

де $F_k = \sum E^{(k-i,i)}(x,y)p_1^{k-i}p_2^i$. Тоді виводиться теорема.

Теорема 1. *Нехай система (2),(3) допускає інтеграл (4) і потенціал $V(\cdot) \in \mathcal{C}^\omega(0,\infty)$. Тоді нуль є або регулярною точкою для V, або полюсом другого порядку.*

Ця теорема посилює твердження з [3], де для відповідного висновку потрібне було існування нетривіального інтеграла третього степеня.

Із (4) і умови $\{F, H\} \equiv 0$ бачимо, що коефіцієнти $E^{(k-i,i)}(x,y)$ задовольняють співвідношення

$$\partial_x E^{(k-i-1,i-1)} + \partial_y E^{(k-i-2,i)} = (k-i)E^{(k-i,i)}\partial_x W + (i+1)E^{(k-i-1,i+1)}\partial_y W, \tag{5}$$

де $i = \overline{0, k-1}; k = \overline{2, 2N+2}$,

$$W(x,y) = V(x) + V\left(-\tfrac{x}{2} + \tfrac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V\left(-\tfrac{x}{2} - \tfrac{y\sqrt{3}}{2}\right).$$

Лема 1. *В умовах теореми нуль є або регулярною точкою для V або існують натуральне k і $\varphi(\cdot) \in \mathcal{C}^\omega(0,\infty)$ такі, що $\varphi(0) = 1$ і $V(x) = \varphi(x)x^{-2/(2k+1)}$.*

Доведення. 1. Нехай коефіцієнти $E^{(2N-i,i)}$ є константами. Тоді згідно з лемою 1 з [4] $E^{(2N-i,i)} = 0$ для непарних i. Позначимо

$$R = -V\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right), S = V\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right).$$

Тоді рівняння (5) для $\kappa = 2N$ можна проінтегрувати у вигляді

$$\begin{aligned} E^{(2N-2,0)} &= 2NE^{(2N,0)}V(x) + \lambda_0^{(2N-2)} \cdot S + \omega^{(2N-2,0)}, \\ E^{(2N-3,1)} &= \lambda_1^{(2N-2)} \cdot R + \omega^{(2N-3,1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E^{(0,2N-2)} &= 2E^{(2,2N-2)}V(x) + \lambda_{2N-2}^{(2N-2)} \cdot S + \omega^{(0,2N-2)}, \\ 0 &= \lambda_{2N-1}^{(2N-2)} \cdot R + \omega^{(-1,2N-1)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Тут $\lambda_{2N-j}^{(2N-2)}$ — лінійні комбінації коефіцієнтів $E^{(2N-i,i)}$, $i = \overline{j-1, 2N}$, $\partial_x \omega^{(k+1,2N-k-1)} + \partial_y \omega^{(k,2N-k)} = 0$. Тоді з останнього рівняння випливає, що

$$\lambda_{2N-1}^{(2N-2)} = \omega^{(-1,2N-1)} = 0.$$

Тому всі $\omega^{(2N-i,i)}$ — поліноми не більш як $2N$-го степеня від x, y. Запишемо $W(x,y) = x^\alpha + r(x,y)$, де $r(x,y) = o(x^\alpha)$ при $x \to 0$. У нас комбінація $\lambda_{2N-1}^{(2N-2)}$ — це коефіцієнт при $x^{\alpha+1}$ в системі (6).

Інтегруючи аналогічним чином рівняння (5) для $k = 2N - 2l$ і прирівнюючи до нуля коефіцієнти $\lambda_{k-1}^{(k-2)}$ при $x^{l\alpha+1}$ аж до $l = N$, одержимо систему з N рівнянь на $E^{(2N,0)}, \ldots, E^{(0,2N)}$

$$\lambda_{2N-1}^{(2N-2)} = \lambda_{2N-3}^{(2N-4)} = \cdots = \lambda_1^{(0)} = 0. \tag{7}$$

Оскільки F є функціонально незалежним з H, то $F - E^{(2N,0)} H^N$ є знову першим інтегралом. Тоді можна вважати, що $E^{(2N,0)} = 0$ і (7) є однорідною системою N лінійних рівнянь на N невідомих з матрицею L, що має верхній трикутний вигляд. Індукцією можна показати, що її діагональні елементи

$$L_{kk} = (2N - 2k + 2) \prod_{j=1}^{k} \frac{2 + (2j-1)\alpha}{1 + j\alpha}.$$

Тоді з умови рівності нулю визначника L маємо твердження леми.

2. Нехай коефіцієнти $E^{(2N-i,i)}$ залежні від координат. Проінтегрувавши рівняння (5) для $k = 2N + 2$, матимемо

$$\begin{gathered} E^{(2N,0)} = \varphi^{(2N)}, \\ E^{(2N-1,1)} = \varphi^{(2N-1)} - x\partial_y \varphi^{(2N)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E^{(0,2N)} = \varphi^{(0)} - x\partial_y \varphi^{(1)} + \cdots + \frac{x^{2N}}{(2N)!} \partial_y^{2N} \varphi^{(2N)}, \end{gathered} \tag{8}$$

де $\varphi^{(k)}$ — деякі поліноми k-го степеня від y. Однак $\varphi^{(k)} = 0$ для непарних k, що є наслідком леми 1 з [4]. Тоді методом, аналогічним до наведеного вище, одержимо систему з N рівнянь

$$\partial_y \varphi^{(2)} \cdot L_{11} = 0, \quad \partial_y \varphi^{(4)} \cdot L_{22} = 0, \quad \ldots, \quad \partial_y \varphi^{(2N)} \cdot L_{NN} = 0,$$

звідки знову випливає твердження леми.

Лема 2. *Нехай потенціал* $V(x)$ *допускає інтеграл (4) і* $V(x) = O(x^\alpha)$ *при* $x \to 0, \alpha < 0$. *Тоді потеціал* x^α *також допускає нетривіальний інтеграл степеня* $\leqslant 2N$.

Доведення. Виконаємо заміну змінних $x = x_1\varepsilon, y = y_1\varepsilon, p_i = q_i/\varepsilon$ та розкладемо F і H в ряди за малим параметром ε. Тоді, позначивши через H_0 і F_0 доданки при ε^0, матимемо $\{H_0, F_0\} \equiv 0$, де F_0 функціонально незалежний з H_0.

Лема 3. *Якщо потенціал x^α, де $\alpha = -2/(2k+1)$, допускає інтеграл (4), то $\alpha = -2$.*

Доведення. Припустимо, що $\alpha \neq -2$. Розкладемо $W(x, y)$ в ряд за степенями x:

$$W = x^\alpha + A(y) + B(y) \cdot x^2 + \dots, \tag{9}$$

де $A(y) = 2V(\frac{y\sqrt{3}}{2})$. Тепер, аналогічно до доведення леми 1, розглянемо два випадки, коли $E^{(2N-i,i)}$ є константами і коли $E^{(2N-i,i)}$ є поліномами $2N$-го степеня від x, y. Тепер, врахувавши (9) і прирівнявши до нуля коефіцієнти при $x^\alpha, x^{\alpha+1}, \dots, x^{\alpha+2N}$ в рівняннях (5) для $k = 2N-2$, одержимо, що $(\alpha+2)\prod_{i=1}^{N}(\alpha+i)^{-1} = 0$, що суперечить початковому припущенню леми.

Отже, теорему 1 доведено.

Лема 4. *Нехай система (2),(3) допускає інтеграл третього степеня зі сталими коефіцієнтами при старших за імпульсами доданках. Тоді потенціал V задовольняє диференціально-функціональне рівняння*

$$\begin{aligned} R(V) = \left(V(x) - V\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(V'\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V'(x)\right) - \\ - \left(V(x) - V\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(V'\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V'(x)\right) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Лема 5([3]). *Якщо $V(\cdot)$ – парна функція і є розв'язком рівняння (10), нуль для неї є полюсом другого порядку, то $V(z) = \mathcal{P}(z)$, де $\mathcal{P}(\cdot)$ - функція Вейєрштрасса.*

Ми пропонуємо результат, який дає змогу поширити результати лем 4 і 5 на випадок інтеграла довільного степеня.

Теорема 2. *Нехай система (2),(3) допускає інтеграл (4) зі сталими коефіцієнтами при старших за імпульсами доданках. Якщо $V(\cdot) \in \mathcal{C}^\omega(0,\infty)$ і $V(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то $V(z) \in \{z^{-2}, sh^{-2}z\}$.*

Доведення. Зауважимо, що згідно з [4] F_{2N} є першим інтегралом більярду у відповідному (2) альковi Вейля. Тоді його можна записати у вигляді комбінації поліномів $T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$ і $J = 3p_1^2 p_2 - p_2^3$.

Тоді з системи (5), виписавши рівняння для $k = 2N+2, 2N$ і $2N-2$, одержимо рівняння для функції V: $\varrho(V) = 0$, причому для деяких натуральних m_1, m_2

$$\varrho(V) = \delta^{m_1}\gamma^{m_2}R(V), \tag{11}$$

де $\delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \gamma = 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Справді, записавши рівняння (5) для $k = 2N-2$, одержимо

$$\begin{gathered} \partial_x E^{(2N-4,0)} = (2N-2)E^{(2N-2,0)}\partial_x W + E^{(2N-3,1)}\partial_y W, \\ \partial_y E^{(2N-4,0)} + \partial_x E^{(2N-5,1)} = (2N-3)E^{(2N-3,1)}\partial_x W + 2E^{(2N-4,2)}\partial_y W, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \partial_y E^{(0,2N-4)} = E^{(1,2N-3)}\partial_x W + 2NE^{(0,2N-2)}\partial_y W. \end{gathered}$$

Запишемо звідси диференціально-функціональне рівняння для функції V:

$$\begin{aligned}\varrho\,(V) = \partial_y^{2N-3}((2N-2)E^{(2N-2,0)}\partial_x W + E^{(2N-3,1)}\partial_y W) - \\ -\partial_x\partial_y^{2N-4}((2N-3)E^{(2N-3,1)}\partial_x W + 2E^{(2N-4,2)}\partial_y W) + \\ + \dots\dots\dots - \\ -\partial_x^{2N-3}(E^{(1,2N-3)}\partial_x W + 2NE^{(0,2N-2)}\partial_y W) = 0.\end{aligned}$$

Маємо $F_{2N} = F_{2N}(T,J)$. Тоді

$$F_{2N} = c_0 \cdot J^{m2+1}T^{m1} + c_1 \cdot J^{m2-1}T^{m1+3} + \dots + c_k \cdot T^N,$$

де $c_0 \neq 0$. Потрібно зауважити, що $\varrho\,(V)$ не залежить від константи при доданку T^N. Позначимо через $\varrho\,(F_K, V)$ відповідне рівняння для однорідного полінома F_K степеня K від імпульсів. Легко показати, що $\varrho\,(F_K, V) = \gamma\varrho\,(G_{K-3}, V)$ при $F_K = J \cdot G_{K-3}$ і $\varrho\,(F_K, V) = \delta\varrho\,(G_{K-2}, V)$ при $F_K = T \cdot G_{K-2}$. Звідси випливає зображення (11).

Зауважимо, що $R(V) \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^2)$ і з того, що (11) виконується тотожно, випливає (6). Для цього досить показати, що для оператора γ виконується теорема єдиності, аналогічна до теореми єдиності для гармонійних функцій (для оператора δ). Тоді з леми 5 випливає твердження теореми.

Окремо стоїть проблема інтегровності системи з попарно різними потенціалами, які не обов'язково задовольняють умову парності:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 + \sum_{i<j} V_{ij}(x_i - x_j). \tag{12}$$

У цьому випадку в лемі 4 рівняння (10) набуває вигляду

$$\begin{aligned}R(V) = \left(V_{12}(x) - V_{13}\Big(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\Big)\right)\left(V'_{23}\Big(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\Big) + V'_{12}(x)\right) - \\ -\left(V_{12}(x) - V_{23}\Big(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\Big)\right)\left(V'_{13}\Big(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\Big) + V'_{12}(x)\right) = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Теорема 3. *Нехай функції $V_{ij} \in \mathcal{C}^\omega(0,\infty)$ є розв'язками (13). Тоді всі потенціали збігаться і рівні $V(x) \in \{\exp(x), \mathcal{P}(x)\}$.*

Для доведення теореми застосуємо метод з [3]. Не вдаючись у деталі, зазначимо, що коли 0 є полюсом хоча б однієї з функцій V_{ij} (наприклад, V_{12}), то в результаті розвинення рівняння (13) за степенями x одержимо $V_{23} = V_{13}$. Аналогічно, якщо 0 є регулярною точкою для V_{12}, то інші дві функції знову однакові. Отже, всі V_{ij} збігаються. Якщо 0 – регулярна точка V_{12}, то всі $V_{ij}(x) = \exp(x)$, а в іншому випадку одержимо умови леми 5.

Лема 6. *Нехай система (12),(3) допускає інтеграл (4) зі сталими коефіцієнтами в* F_{2N}. *Тоді потенціали* V_{ij} *відрізняються на поліноми не більш ніж* $2N$*-го степеня.*

Доведення. Перепозначимо $r_j = \lambda_j^{(2N-2)}$ з рівнянь (6). Тоді

$$r_1 = 2E^{(2N-2,2)} - 2NE^{(2N,0)},$$
$$r_3 = 4E^{(2N-4,4)} - (2N-2)E^{(2N-2,2)} + 3r_1,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$r_{2N-1} = 2nE^{(0,2N)} - 2E^{(2,2N-2)} + 3r_{2N-3}.$$

Нехай

$$W(x,y) = V(x) + V_+\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V_-\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$R = -V_+ + V_-, S = V_+ + V_-.$$

Тоді, враховуючи, що $\omega^{(-1,2N-1)}$ з рівнянь (6) є поліномом не більш ніж $2N$-го степеня від x, матимемо $r_{2N-1}\sqrt{3}\cdot\partial_x^{2N+1}R = 0$, звідки $r_{2N-1} = 0$, або $V_+(t) - V_-(t)$ є поліномом $2N$-го степеня. Виписавши рівняння (4) для $k = 2N-2, 2N-4, \dots, 2$ і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при $x^{(N-k)\alpha}$, послідовно одержуватимемо $r_{k-1}\sqrt{3}\cdot\partial_x^{k+1}R = 0$. Отже, або $V_+(t) - V_-(t)$ є поліномом $2N$-го степеня від t, або всі $r_i = 0$. Але якщо виконанується остання умова, то $F_{2N} = C\cdot(p_1^2 + p_2^2)^N$, тобто інтеграл F не є інтегралом найменшого можливого степеня, функціонально незалежним з H.

Лема 6 дає змогу поширити умови теореми 2 на клас систем з гамільтоніаном (12), оскільки умова $V_{ij}(x) \to 0$ при $x \to \infty$ відразу має своїм наслідком рівність потенціалів V_{ij}.

1. Moser J. *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations* // Adv.Math.— 1975.— 16.— P.197–220.

2. Calogero F. *Exactly solvable one-dimensional many body problems* // Letters al Nuovo Cimento.— 1975.— Vol. 13, N11.— P.411–416.

3. Пидкуйко С.И.,Степин А.М. *Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем* // Доклады АН СССР.— 1978.— Т. 239, N1.— С.50–51.

4. Вус А.Я. *Про перші інтеграли натуральних систем* // Тези доп.IV Міжнарод. конф. ім.ак.М.Кравчука. К. 1995. – С.64.

Стаття надійшла до редколегії 21.06.96