УДК 539.3

МЕТОД РОЗВИНЕННЯ ЗА ТЕНЗОРНИМИ ФУНКЦІЯМИ В НЕЛІНІЙНІЙ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН

Г. І. Благута, Я. Й. Бурак

G. I. Blaguta, Ya. Yo. Burak Method of decomposition with respect to tensor functions in nonlinear theory of plates An approach and methods of construction of dynamic mathematical models of nonlinear theory of elastic plates are proposed. By the way representation of transition vector by its decomposition with respect to the base of tensor functions of increasing valency is used. Coefficients of this decomposition are tensor functions of corresponding valency. A system of motion equations is deduced for them. Particular cases of obtained system for linearly elastic plates are considered.

Метод розкладу за тензорними функціями зростаючої валентності використано в [1,2] для побудови математичних моделей наближеного розв'язування крайових задач теорії пружності циліндричних тіл, а в [3] - для побудови рівнянь теорії пружних оболонок. Цей підхід ми застосували для побудови двовимірних систем рівнянь руху нелінійної теорії пружних пластин.

Розглянемо однорідну ізотропну пружну пластину $\mathcal{K}^*$, яка віднесена до декартової системи координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3). Задамо деяку фіксовану (відлікову) її конфігурацію. В цій конфігурації пластина ненавантажена і займає область X_0^* обмежену поверхнею $\partial X_0^* = \partial X_{0-}^* \bigcup \partial X_{120}^* \bigcup \partial X_{0+}^*$. Тут $\partial X_{0-}^*, \partial X_{0+}^*$ – основи пластини, ∂X_{120}^*– бокова гранична поверхня.

Положення довільної точки $k \in \mathcal{K}^*$ у відліковій конфігурації характеризуємо радіусом-вектором

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{120} + \vec{R}_0,$$

де $\vec{r}_{120} = \xi^1 \vec{\ni}_1^{\,0} + \xi^2 \vec{\ni}_2^{\,0}$ – радіус-вектор точок серединної поверхні $(\xi^3 = 0)$, $\vec{R}_0 = \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0}$, $-h \leqslant \xi^3 \leqslant h$ $(2h$ – товщина пластини).

З моменту часу $\tau = \tau_0$, який приймаємо за початковий, на пластину починають діяти поверхневі та об'ємні сили. Геометричну конфігурацію пластини для $\tau \geqslant \tau_0$ будемо називати актуальною. Положення точки $k \in \mathcal{K}^*$ в момент часу τ визначаємо радіусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, \tau) = \vec{r}_0 + \vec{u}$, де $\vec{u}(\vec{r}_0, \tau)$– вектор переміщення.

Під час побудови математичної моделі нелінійної теорії пружних пластин за базове приймаємо рівняння балансу енергії за підходом Лагранжа для підсистеми $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^*$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73C50.

Цій підсистемі у відліковій конфігурації відповідає циліндрична область X_0, побудована на основі довільно виділеної області $\partial X_0^c \subset \partial X_0^{c*}$ серединної поверхні. Маємо

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{X_0} E_0\, dV_0 = \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}_{n_0}\cdot\vec{v}\, d\Sigma_0 + \int\limits_{X_0} \vec{f}_0\cdot\vec{v}\, dV_0, \tag{1}$$

де E_0 – густина повної енергії; $\vec{v} = \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}$ – вектор швидкості; dV_0 і $d\Sigma_0$ – об'єм фізично малої області $\delta X_0 \subset X_0$ і площа фізично малого елемента граничної поверхні $\delta\partial X_0 \subset \partial X_0$; вектори $\vec{P}_{n_0}$ і $\vec{f}_0$ є характеристиками поверхневої та об'ємної силової дії, які нормуються щодо метричних характеристик виділеної області у відліковій конфігурації.

Згідно з означенням тензора напружень Піоли-Кірхгофа $\hat{P}$

$$\vec{P}_{n_0} = \vec{n}_0\cdot\hat{P},$$

де $\vec{n}_0$– зовнішня нормаль у довільній точці $x_0 \in \partial X_0$. З урахуванням цієї умови після перетворення поверхневого інтеграла за формулою Гауса-Остроградського одержимо

$$\int\limits_{X_0^c}\left[\int\limits_{-h}^{h}(\vec{\nabla}_0\cdot(\hat{P}\cdot\vec{v}) + \vec{f}_0\cdot\vec{v} - \frac{\partial E_0}{\partial\tau})\, d\xi^3\right] d\Sigma_0^c = 0. \tag{2}$$

Тут $\vec{\nabla}_0 = \dfrac{\partial}{\partial\xi^i}\vec{\ni}_0^{\,i}$– диференціальний оператор Гамільтона у відліковій конфігурації; $\{\vec{\ni}_0^{\,i}\}$ $(i = \overline{1,3})$– векторний базис, біортогональний до базису $\{\vec{\ni}_i^{\,0}\}$ $(i = \overline{1,3})$ і для декартових координат збігається з ним.

Якщо врахувати довільність вибраної області X_0^c, то рівнянню (2) можна поставити у відповідність таке рівняння балансу енергії в локальній формі:

$$\frac{\partial\tilde{L}_0}{\partial\tau} = \int\limits_{-h}^{h}(\vec{\mathcal{P}}_0\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\tau} - \hat{P}\cdot\cdot\frac{\partial\hat{\mathcal{E}}}{\partial\tau})\, d\xi^3, \tag{3}$$

де $\quad \tilde{L}_0 = \int\limits_{-h}^{h}(\vec{\mathcal{P}}_0\cdot\vec{v} - E_0)\, d\xi^3, \quad \vec{\mathcal{P}}_0 = \vec{\mathcal{P}}_{0(0)} + \int\limits_{\tau_0}^{\tau}(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{P} + \vec{f}_0)\, d\eta,$

$\vec{\mathcal{P}}_0$– вектор силового імпульсу, $\vec{\mathcal{P}}_{0(0)}$– його початкове значення, $\hat{\mathcal{E}} = = (\vec{\nabla}_0\otimes\vec{r})^T$– тензор деформації.

Для наближеного формулювання задачі вектор переміщення $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}_{120} + \vec{R}_0;\tau)$ задамо розвиненням за заданим базисом тензорних функцій $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N}\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\overset{i-1}{\cdot}\hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120};\tau). \tag{4}$$

У цьому зображенні індекси $(i-1)$ та (i) задають валентність тензорних функцій; „ $\overset{i-1}{\cdot}$ " означає $(i-1)$ – кратний внутрішній добуток тензорів.

Підставимо це зображення вектора переміщення у рівняння (3). Як наслідок, отримаємо

$$\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \tau} = \hat{Q}_{10}^{(i)} \overset{i}{\cdot} \frac{\partial \hat{v}^{(i)}}{\partial \tau} - \hat{Q}_{21}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} \frac{\partial \hat{e}_1^{(i+1)}}{\partial \tau} - \hat{Q}_{22}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} \frac{\partial \hat{e}_2^{(i+1)}}{\partial \tau}, \tag{5}$$

де

$$\hat{Q}_{10}^{(i)} = \int\limits_{-h}^{h} \vec{\mathcal{P}}_0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\xi^3, \qquad \hat{v}^{(i)} = \frac{\partial \hat{u}^{(i)}}{\partial \tau}, \tag{6}$$

$$\hat{Q}_{21}^{(i+1)} = \int\limits_{-h}^{h} \hat{P} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\xi^3, \qquad \hat{e}_1^{(i+1)} = \hat{u}^{(i)} \otimes \vec{\nabla}_{012},$$

$$\hat{Q}_{22}^{(i+1)} = \int\limits_{-h}^{h} \hat{P} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^3} d\xi^3, \quad \hat{e}_2^{(i+1)} = \hat{u}^{(i)} \otimes \vec{\ni}_0^3, \tag{7}$$

$$\vec{\nabla}_{012} = \vec{\ni}_0^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} \quad (\alpha = \overline{1,2}).$$

Співвідношенню (5) можна поставити у відповідність таку диференціальну 1-форму

$$d\tilde{L}_0 = \hat{Q}_{10}^{(i)} \overset{i}{\cdot} d\hat{v}^{(i)} - \hat{Q}_{21}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} d\hat{e}_1^{(i+1)} - \hat{Q}_{22}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} d\hat{e}_2^{(i+1)}. \tag{8}$$

Приймаємо припущення про потенціальний характер опису механічної поведінки тіла. Тоді з наближення (4) і з (8) випливає, що потенціалом (функцією стану) є функція $\tilde{L}_0$, яка задана на $3N$-вимірному фазовому просторі тензорних параметрів

$$\{\hat{v}^{(i)^T}\}, \quad \{\hat{e}_{\alpha}^{(i+1)^T}\} \quad (\alpha = \overline{1,2};\ i = \overline{1,N}).$$

Ці параметри можна трактувати також як узагальнені координати, а параметри

$$\{\hat{Q}_{10}^{(i)}\}, \quad \{-\hat{Q}_{21}^{(i+1)}\}, \quad \{-\hat{Q}_{22}^{(i+1)}\}, \quad (i = \overline{1,N}),$$

які є спряженими до них, як узагальнені сили.

Будемо вважати, що узагальнені координати $\{\hat{v}^{(i)^T}\}$, $\{\hat{e}_{\alpha}^{(i+1)^T}\}$ $(\alpha = \overline{1,2})$ є незалежними параметрами локального стану. Тоді з (8) одержуємо такі визначальні рівняння стану:

$$\hat{Q}_{10}^{(i)} = \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \hat{v}^{(i)^T}} \equiv \hat{Q}_{10}^{(i)}(\{\hat{v}^{(n)^T}\},\ \{\hat{e}_{\alpha}^{(n+1)^T}\}),$$

$$\hat{Q}_{2\alpha}^{(i+1)} = -\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \hat{e}_{\alpha}^{(i+1)^T}} \equiv \hat{Q}_{2\alpha}^{(i+1)}(\{\hat{v}^{(n)^T}\},\ \{\hat{e}_m^{(n+1)^T}\}) \quad (\alpha = \overline{1,2},\ m = \overline{1,2},\ n = \overline{1,N}). \tag{9}$$

Якщо заданий базис розвинення $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$, то наближене зображення розв'язку характеризується тензорними функціями $\hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120};\tau)$ $(i == \overline{1,N})$. Виведемо рівняння для їх визначення. Для цього прирівняємо вирази для узагальнених сил $\hat{Q}_{10}^{(i)}$, які задаються формулами (6) і (9). У результаті одержуємо таку систему рівнянь:

$$\int\limits_{-h}^{h}[\vec{\mathcal{P}}_{0(0)}+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{P}+\vec{f}_0)d\eta]\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3=\hat{Q}_{10}^{(i)}(\{\hat{v}^{(n)^T}\},\ \{\hat{e}_\alpha^{(n+1)^T}\})\quad(i=\overline{1,N}).$$

Продиференціюємо ці рівняння за змінною τ

$$\int\limits_{-h}^{h}(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{P}+\vec{f}_0)\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3=\frac{\partial\hat{Q}_{10}^{(i)}}{\partial\tau},\quad(i=\overline{1,N}).\tag{10}$$

Зауважимо, що

$$(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{P})\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}=(\vec{\nabla}_{012}\cdot\hat{P})\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}+(\vec{\nabla}_{03}\cdot\hat{P})\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}=$$

$$=\vec{\nabla}_{012}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})+\vec{\nabla}_{03}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})-\vec{\ni}_0^3\cdot\hat{P}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^3},$$

де

$$\vec{\nabla}_{03}=\vec{\ni}_0^3\frac{\partial}{\partial\xi^3}.$$

Тоді рівняння (10) набувають вигляду

$$\int\limits_{-h}^{h}(\vec{\nabla}_{012}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})-\vec{\ni}_0^3\cdot\hat{P}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^3}+\vec{f}_0\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})d\xi^3+$$

$$+\int\limits_{-h}^{h}\vec{\nabla}_{03}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})d\xi^3=\frac{\partial\hat{Q}_{10}^{(i)}}{\partial\tau},\quad(i=\overline{1,N}).\tag{11}$$

Другий інтеграл у лівій частині рівності (11) можна записати так:

$$\int\limits_{-h}^{h}\vec{\nabla}_{03}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})d\xi^3=\vec{P}_3^+\otimes\hat{\Phi}_+^{(i-1)}-\vec{P}_3^-\otimes\hat{\Phi}_-^{(i-1)},\tag{12}$$

де $\vec{P}_3=\vec{\ni}_0^3\cdot\hat{P}$ – вектор напружень. Індексами " $\pm$ " позначено граничні значення відповідних величин при $\xi^3=\pm h$. Якщо на верхній і нижній основах пластини задається вектор напружень, то права частина (12) є відомою тензорною функцією валентності i.

Якщо використати одержані результати, то з (11) отримаємо таку систему тензорних диференціальних рівнянь:

$$\int_{-h}^{h}\left[\vec{\nabla}_{012}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})-\vec{\ni}_0^3\cdot\hat{P}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^3}\right]d\xi^3+\hat{F}^{(i)}=\frac{\partial\hat{Q}_{10}^{(i)}}{\partial\tau}\quad(i=\overline{1,N}),\tag{13}$$

де $\quad \hat{F}^{(i)}=\int\limits_{-h}^{h}\vec{f}_0\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3+\vec{P}_3^{+}\otimes\hat{\Phi}_{+}^{(i-1)}-\vec{P}_3^{-}\otimes\hat{\Phi}_{-}^{(i-1)}.$

Стосовно узагальнених сил цю систему можна записати таким чином:

$$\vec{\nabla}_{012}\cdot\hat{Q}_{21}^{(i+1)}-\vec{\ni}_0^3\cdot\hat{Q}_{22}^{(i+1)}+\hat{F}^{(i)}=\frac{\partial\hat{Q}_{10}^{(i)}}{\partial\tau}\quad(i=\overline{1,N}).$$

Одержану систему N тензорних диференціальних рівнянь щодо N тензорних функцій $\hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120},\tau)$ будемо називати системою рівнянь руху пластини. Залежно від конкретизації функції стану $\tilde{L}_0$ вона може бути як лінійною, так і нелінійною. Запишемо рівняння руху пластини для випадку, коли за функцію $\tilde{L}_0$ приймаємо функцію

$$\tilde{L}_0=\int_{-h}^{h}[K_0(\vec{v})-U_0(\hat{\mathcal{E}}^T)]d\xi^3,\tag{14}$$

де $K_0(\vec{v})=\dfrac{\rho_0\vec{v}^2}{2}$ – густина кінетичної енергії, $U_0(\hat{\mathcal{E}}^T)$ – густина потенціальної енергії деформації.

Формули (6) і (7) для такої функції

$$\hat{Q}_{10}^{(i)}=\int_{-h}^{h}\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3,\tag{15}$$

$$\hat{Q}_{21}^{(i+1)}=\int_{-h}^{h}\frac{\partial U_0}{\partial\hat{\mathcal{E}}^T}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3,\quad \hat{Q}_{22}^{(i+1)}=\int_{-h}^{h}\frac{\partial U_0}{\partial\hat{\mathcal{E}}^T}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^3}d\xi^3.\tag{16}$$

Якщо підставити вираз (15) для узагальнених сил $\hat{Q}_{10}^{(i)}$, а також зображення вектора переміщення у вигляді (4) в рівняння руху (13), то отримаємо

$$\int_{-h}^{h}\left[\frac{\partial\vec{P}_1}{\partial\xi^1}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}+\frac{\partial\vec{P}_2}{\partial\xi^2}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}-\vec{P}_3\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^3}\right]d\xi^3+\hat{F}^{(i)}=$$

$$=\rho_0\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial^2\hat{u}^{(n)}{}^T}{\partial\tau^2}\overset{n-1}{\cdot}\int_{-h}^{h}\hat{\Phi}^{(n-1)^T}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3,\quad(i=\overline{1,N}),\tag{17}$$

де $\vec{P}_k = \vec{\ni}^{\,0}_k \cdot \hat{P}$.

Для прикладу наведемо, як виглядають одержані результати в лінійній теорії пружності, для якої густину потенціальної енергії деформації U_0 задають квадратичною формою

$$U_0 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\mathcal{I}_1^2(\hat{\epsilon}_0) - 2\mu\mathcal{I}_2(\hat{\epsilon}_0),$$

де

$$\hat{\epsilon}_0 = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0)$$

– симетричний лінійний тензор деформації; λ, μ – сталі Ляме; $\mathcal{I}_1(\hat{\epsilon}_0)$, $\mathcal{I}_2(\hat{\epsilon}_0)$ – перший і другий алгебраїчні інваріанти тензора $\hat{\epsilon}_0$.

Тензор напружень Піоли-Кірхгофа в лінійній теорії пружності збігається з тензором напружень Коші і має вигляд

$$\hat{P} = \lambda\mathcal{I}_1(\hat{\epsilon}_0)\hat{I} + 2\mu\hat{\epsilon}_0.$$

За базис розвинення вектора переміщення $\vec{u}$ у формулі (4) виберемо базис $\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) = (\vec{R}_0)^{i-1}$.

Система рівнянь руху (17) тепер набуває вигляду

$$\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial\vec{P}_1}{\partial\xi^1} \otimes \vec{R}_0^{i-1} + \frac{\partial\vec{P}_2}{\partial\xi^2} \otimes \vec{R}_0^{i-1} - \vec{P}_3 \otimes \frac{\partial\vec{R}_0^{i-1}}{\partial\xi^3}\right]d\xi^3 + \hat{F}^{(i)} =$$

$$= \rho_0 \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2 \hat{u}^{(n)}}{\partial\tau^2}^{T} \overset{n-1}{\cdot} \int\limits_{-h}^{h} \vec{R}_0^{n+i-2} d\xi^3, \quad (i = \overline{1, N}). \qquad (18)$$

Розглянемо часткові випадки цієї системи. При $N = 1$ вона складається з одного векторного рівняння

$$\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial\vec{P}_1}{\partial\xi^1} + \frac{\partial\vec{P}_2}{\partial\xi^2}\right]d\xi^3 + \vec{F}^{(1)} = \rho_0\frac{\partial^2\vec{u}^{(1)}}{\partial\tau^2}$$

або трьох скалярних рівнянь

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^1)^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^2)^2} + \frac{F_1}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2};$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^2)^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^1)^2} + \frac{F_2}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial\tau^2};$$

$$\mu\Delta u_3 + \frac{F_3}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2},$$

де

$$F_k = \int\limits_{-h}^{h} f_k d\xi^3 + X_k^+ - X_k^-, \quad f_k = \vec{f}_0 \cdot \vec{\ni}_k^0, \quad X_k = \vec{P}_3 \cdot \vec{\ni}_k^0,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial\xi^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial\xi^2)^2}.$$

Для випадку $N = 2$ система рівнянь руху (18) складається з двох рівнянь: векторного і тензорного диференціального другої валентності

$$\int\limits_{-h}^{h} \left[\frac{\partial\vec{P}_1}{\partial\xi^1} + \frac{\partial\vec{P}_2}{\partial\xi^2}\right] d\xi^3 + \vec{F}^{(1)} = \rho_0 \sum_{n=1}^{2} \frac{\partial^2 \hat{u}^{(n)}}{\partial\tau^2}^T \overset{n-1}{\cdot} \int\limits_{-h}^{h} \vec{R}_0^{n-1} d\xi^3,$$

$$\int\limits_{-h}^{h} \left[\frac{\partial\vec{P}_1}{\partial\xi^1} \otimes \vec{R}_0 + \frac{\partial\vec{P}_2}{\partial\xi^2} \otimes \vec{R}_0 - \vec{P}_3 \otimes \vec{\ni}_0^3\right] d\xi^3 + \hat{F}^{(2)} = \rho_0 \sum_{n=1}^{2} \frac{\partial^2 \hat{u}^{(n)}}{\partial\tau^2}^T \overset{n-1}{\cdot} \int\limits_{-h}^{h} \vec{R}_0^n d\xi^3.$$

У компонентній формі така система виглядатиме так:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^1)^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^2)^2} + \lambda\frac{\partial u_{33}}{\partial\xi^1} + \frac{F_1}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2},$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^2)^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^1)^2} + \lambda\frac{\partial u_{33}}{\partial\xi^2} + \frac{F_2}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial\tau^2},$$

$$\mu[\frac{\partial u_{31}}{\partial\xi^1} + \frac{\partial u_{32}}{\partial\xi^2} + \Delta u_3] + \frac{F_3}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2};$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_{31}}{(\partial\xi^1)^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_{32}}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_{31}}{(\partial\xi^2)^2} - \frac{3\mu}{h^2}(u_{31} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^1}) + F_{13} = \rho_0\frac{\partial^2 u_{31}}{\partial\tau^2},$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_{32}}{(\partial\xi^2)^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_{31}}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_{32}}{(\partial\xi^1)^2} - \frac{3\mu}{h^2}(u_{32} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^2}) + F_{23} = \rho_0\frac{\partial^2 u_{32}}{\partial\tau^2},$$

$$\mu\Delta u_{33} - \frac{3}{h^2}(\lambda+2\mu)u_{33} - \frac{3}{h^2}\lambda(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1} + \frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}) + F_{33} = \rho_0\frac{\partial^2 u_{33}}{\partial\tau^2}.$$

Тут

$$F_{k3} = \frac{3}{2h^3}[\int\limits_{-h}^{h} f_k \xi^3 d\xi^3 + X_k^+ h + X_k^- h].$$

Як частковий випадок, при

$$u_{33} = 0, \quad u_{31} = -\frac{\partial u_3}{\partial\xi^1}, \quad u_{32} = -\frac{\partial u_3}{\partial\xi^2},$$

отримуємо відому [4] класичну модель пластин (гіпотеза Кірхгофа-Лява), а при $u_{33} = 0$ уточнену модель, яка враховує деформації поперечного зсуву (гіпотеза Тимошенка). Тому зазначимо, що наближення $N = 2$ дає змогу точніше враховувати характеристики симетричної частини тензора напружень.

1. Бурак Я.Й., Доманський П.П. *Метод розкладу за тензорними функціями в теорії пружності циліндричних тіл* // Доп. НАН України. — 1995. — N8. — С.47–51.

2. Доманський П.П. *Математичні моделі нелінійної теорії пружності циліндричних тіл* // Препринт N16-95.— Львів, 1995.— 43 с.

3. Бурак Я.Й., Зозуляк Ю.Д. *Енергетичний підхід до побудови рівнянь пружних оболонок в узагальнених змінних* // Доп. НАН України. — 1995. — N6.— С.41–44.

4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – М.: Наука, 1992.— 336 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.06.96