УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВОГО РУХУ ПРУЖНИХ ТІЛ

І. Я. Вус , П. П. Доманський

I. Ya. Vus, P. P. Domans'kyj. The mathematical model of a spatial motion of elastic bodies. The approach and the method for a construction of mathematical models are proposed for solving space problems in the nonlinear dynamic elasticity theory of isotropic bodies. Establishing principal relationships is based on the energy balance equation for a whole elastic body. The transition vector is given by its decomposition with respect to the base of tensor functions of increasing valences which coefficients are tensor functions of the corresponding time-dependent valences. A system of motion equations and corresponding initial conditions for the decomposition coefficients are obtained. Partial cases of obtained systems of nonlinear equations concerning the bodies of Murnagan's material are considered.

Побудові математичних моделей, розробці та узагальненню методів розв'язування просторових крайових задач теорії пружності та термопружності для тіл скінченних розмірів присвячені монографії [1,2]. Тут наведено також достатньо повний бібліографічний матеріал досліджень у цій галузі.

Для багатьох питань нелінійної динамічної теорії пружності важливим моментом є знаходження наближеного розв'язку відповідних крайових задач. Зокрема, для побудови математичних моделей рівнянь стійкості руху (рівноваги) пружних тіл необхідно знати базовий (незбурений) розв'язок, стійкість якого досліджуємо. У літературі такий розв'язок, як звичайно, відшукують методами квазістатичної лінійної теорії пружності [3–5].

Ми пропонуємо математичну модель для розв'язування просторових задач нелінійної динамічної теорії пружності. Для наближеного формулювання задачі використовуємо розклад ключових функцій за базисом тензорів зростаючої валентності.

Розглянемо однорідне ізотропне пружне тіло K. Задамо деяку фіксовану γ_0–конфігурацію цього тіла, яку назвемо відліковою. Місце точки $k \in K$ у цій конфігурації будемо задавати радіус-вектором $\vec{r}_0$ — неперервною і достатну кількість разів диференційовною вектор–функцією $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, де $\{\xi^i\}$ — лагранжеві координати. Надалі за $\{\xi^i\}$ $(i = \overline{1,3})$ будемо приймати координати точки $k \in K$ у відліковій конфігурації в єдиній для всіх конфігурацій нерухомій у просторі прямокутній декартовій системі

$$\vec{r}_0 = \xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0 + \xi^3 \vec{\ni}_3^0 \equiv \xi^i \vec{\ni}_i^0.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73C50.

Область тіла і поверхню, що його обмежує, у відліковій конфігурації будемо позначати X_0 і ∂X_0 відповідно.

З моменту часу $\tau = \tau_0$, який приймаємо за початковий момент часу, на тіло починають діяти зовнішні поверхневі сили з вектором напружень $\vec{P}_{n_0}$ у розрахунку на одиницю площі поверхні ∂X_0 і об'ємні сили $\vec{f}_0$, які визначаються також в розрахунку на одиницю об'єму відлікової конфігурації γ_0. У результаті в деякий момент часу $\tau \geqslant \tau_0$ тіло займе в просторі конфігурацію γ_τ, яку будемо називати актуальною. Положення точки $k \in K$ у момент часу τ визначаємо радіус–вектором $\vec{r} = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau) = \vec{r}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3) + \vec{u}(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau)$, де $\vec{u} = \vec{u}(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau) \equiv \vec{u}(\vec{r}_0; \tau)$ — вектор переміщення з відлікової конфігурації в актуальну.

На основі рівняння балансу енергії, записаного для довільно вибраної підсистеми $K^* \subset K$ у момент часу τ, у працях [6, 7] виведено рівняння руху тіла в локальній формі, яке є узагальненням відомого в літературі [8, 9] рівняння балансу імпульсу в нелінійній теорії пружності. Воно збігається з останнім у частковому випадку.

Для побудови математичної моделі просторового руху тіла використаємо з рівняння балансу енергії, записане для всього тіла K у момент часу τ

$$\frac{d}{d\tau}\int_{X_0} E_0\, dV_0 = \int_{\partial X_0} \vec{P}_{n_0}\cdot\vec{v}\, d\Sigma_0 + \int_{X_0} \vec{f}_0\cdot\vec{v}\, dV_0, \tag{1}$$

де E_0 — густина повної енергії; $\vec{v} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\tau} = \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}$ — вектор швидкості; $dV_0, d\Sigma_0$ — об'єм фізично малої області $\delta X_0 \subset X_0$ і площа елемента граничної поверхні $\delta\partial X_0 \subset \partial X_0$; "$\cdot$" — операція скалярного добутку.

Згідно з означенням тензора напружень Піоли–Кірхгофа $\widehat{P}$

$$\vec{P}_{n_0} = \vec{n}_0\cdot\widehat{P},$$

де $\vec{n}_0$ — зовнішня нормаль у довільній точці $x_0 \in \partial X_0$. Якщо скористатися тепер формулою Гауса–Остроградського, то рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\int_{X_0}\left(\frac{\partial E_0}{\partial\tau} - \vec{\nabla}_0\cdot(\widehat{P}\cdot\vec{v}) - \vec{f}_0\cdot\vec{v}\right) dV_0 = 0. \tag{2}$$

Тут $\vec{\nabla}_0 = \vec{\ni}_0^i \dfrac{\partial}{\partial\xi^i}$ — набла–оператор Гамільтона у відліковій конфігурації, $\{\vec{\ni}_0^i\}$ $(i = \overline{1,3})$ — векторний базис, який біортогональний до базису $\{\vec{\ni}_i^0\}$. Для декартових координат ці базиси збігаються, однак з метою збереження правила підсумовування за індексами, що повторюються зверху і знизу, зручно використовувати обидва.

Врахуємо, що

$$\vec{\nabla}_0\cdot(\widehat{P}\cdot\vec{v}) = (\vec{\nabla}_0\cdot\widehat{P})\cdot\vec{v} + \widehat{P}\cdot\cdot\frac{\partial(\vec{\nabla}_0\otimes\vec{r}^T)}{\partial\tau},$$

де "$\otimes$" — операція тензорного добутку, індексом "T" позначаємо транспонований тензор.

Тепер рівнянню (2) можна надати вигляду

$$\frac{\partial \widetilde{L}_0}{\partial \tau} = \int_{X_0} \left(\vec{\mathcal{P}}_0 \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} - \widehat{P} \cdot\cdot \frac{\partial (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^T)}{\partial \tau} \right) dV_0, \tag{3}$$

де

$$\widetilde{L}_0 = \int_{X_0} L_0 dV_0, \quad L_0 = \vec{\mathcal{P}}_0 \cdot \vec{v} - E_0, \quad \vec{\mathcal{P}}_0 = \vec{\mathcal{P}}_{0(0)} + \int_{\tau_0}^{\tau} (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{P} + f_0) d\eta$$

— вектор силового імпульсу; $\vec{\mathcal{P}}_{0(0)}$ — його початкове значення.

Подамо вектор переміщення $\vec{u}$ розкладом за заданим базисом тензорних функцій $\{\widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\} \quad (i = \overline{1,N})$

$$\vec{u}(\vec{r}_0;\tau) = \sum_{i=1}^{N} \widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \widehat{u}^{(i)}(\tau). \tag{4}$$

Тут індекси $(i-1)$ та (i) визначають валентність тензорних функцій, " $\overset{i}{\cdot}$ " означає i–кратний внутрішній добуток тензорів, $\vec{r}_0(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = \vec{r}_{30}(\xi_0^1,\xi_0^2,\xi_0^3) + \vec{R}_0(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = \xi_0^k \vec{\ni}_k^0 + (\xi^k - \xi_0^k)\vec{\ni}_k^0$, $(\xi_0^1,\xi_0^2,\xi_0^3)$ — координати фіксованої точки простору (зокрема, координати центра мас тіла K).

Якщо підставити (4) в рівняння (3), то отримаємо

$$\frac{\partial \widetilde{L}_0}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{N} \widehat{Q}_{10}^{(i)} \overset{i}{\cdot} \frac{\partial \widehat{v}^{(i)}}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^{N} \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} \frac{\partial \widehat{e}_k^{(i+1)}}{\partial \tau} \qquad (k = \overline{1,3}), \tag{5}$$

де

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{10}^{(i)} &= \int_{X_0} \vec{\mathcal{P}}_0 \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0, \qquad \widehat{v}^{(i)} = \frac{d\widehat{u}^{(i)}}{d\tau}, \\ \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} &= \int_{X_0} \widehat{P} \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k} dV_0, \qquad \widehat{e}_k^{(i+1)} = \widehat{u}^{(i)} \otimes \vec{\ni}_0^k. \end{aligned} \tag{6}$$

Співвідношенню (5) поставимо у відповідність диференціальну 1–форму

$$d\widetilde{L}_0 = \sum_{i=1}^{N} \widehat{Q}_{10}^{(i)} \overset{i}{\cdot} d\widehat{v}^{(i)} - \sum_{i=1}^{N} \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} d\widehat{e}_k^{(i+1)} \qquad (k = \overline{1,3}). \tag{7}$$

З потенціального опису механічної поведінки пружних систем можна зробити висновок, що для наближення (4) потенціалом (функцією стану) є функція $\widetilde{L}_0$, яка задана на $4N$–вимірному фазовому просторі тензорних параметрів

$$\{\widehat{v}^{(i)^T}\}, \quad \{\widehat{e}_k^{(i+1)^T}\} \qquad (k = \overline{1,3}; i = \overline{1,N}).$$

Будемо вважати, що параметри $\{\widehat{v}^{(i)^T}\}$, $\{\widehat{e}_k^{(i+1)^T}\}$ є незалежними параметрами стану. Тоді з (7) одержуємо такі визначальні співвідношення:

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{10}^{(i)} &= \frac{\partial \widetilde{L}_0}{\partial \widehat{v}^{(i)^T}} \equiv \widehat{Q}_{10}^{(i)}(\{\widehat{v}^{(n)^T}\}, \{\widehat{e}_m^{(n+1)^T}\}), \\ \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} &= -\frac{\partial \widetilde{L}_0}{\partial \widehat{e}_k^{(i+1)^T}} \equiv \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)}(\{\widehat{v}^{(n)^T}\}, \{\widehat{e}_m^{(n+1)^T}\}) \qquad (k, m = \overline{1,3}). \end{aligned} \tag{8}$$

Наближений розв'язок (4) при заданому базисі розвинення (функції $\{\widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$) характеризується тензорними функціями $\widehat{u}^{(i)}(\tau)$. Для визначення рівнянь, з яких їх можна відшукати, прирівняємо вирази для узагальнених сил $\widehat{Q}_{10}^{(i)}$, що задаються формулами (6) і (8). У результаті одержимо

$$\int_{X_0} \left[\vec{\mathcal{P}}_{0(0)} + \int_{\tau_0}^{\tau} (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{P} + \vec{f}_0) d\eta \right] \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0 = \widehat{Q}_{10}^{(i)}(\{\widehat{v}^{(n)^T}\}, \{\widehat{e}_m^{(n+1)^T}\}) \quad (i = \overline{1, N}). \tag{9}$$

Продиференціюємо (9) за змінною τ:

$$\int_{X_0} (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{P} + \vec{f}_0) \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0 = \frac{d\widehat{Q}_{10}^{(i)}}{d\tau}. \tag{10}$$

Зауважимо, що

$$(\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{P}) \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} = \vec{\nabla}_0 \cdot (\widehat{P} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)}) - \vec{\ni}_0^k \cdot \widehat{P} \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k}. \tag{11}$$

Якщо скористатися виразом (11) і формулою Гауса–Остроградського, то систему рівнянь (10) можна записати у вигляді

$$\int_{\partial X_0} \vec{P}_{n_0} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} d\Sigma_0 + \int_{X_0} \vec{f}_0 \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0 - \int_{X_0} \vec{\ni}_0^k \cdot \widehat{P} \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k} dV_0 = \frac{d\widehat{Q}_{10}^{(i)}}{d\tau}.$$

Оскільки базис $\{\vec{\ni}_0^k\}$ є декартовим, то, врахувавши позначення (6), отримаємо

$$\frac{d\widehat{Q}_{10}^{(i)}}{d\tau} + \vec{\ni}_0^k \cdot \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} = \widehat{F}_0^{(i)} + \widehat{F}_1^{(i)}, \tag{12}$$

де

$$\widehat{F}_0^{(i)} = \int_{X_0} \vec{f}_0 \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0, \qquad \widehat{F}_1^{(i)} = \int_{\partial X_0} \vec{P}_{n_0} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)}\, d\Sigma_0.$$

Одержану систему N тензорних звичайних диференціальних рівнянь (12) стосовно N тензорних функцій $\widehat{u}^{(i)}(\tau)$ будемо називати системою рівнянь руху тіла. Залежно від конкретизації функції стану L_0, що відповідно диктується властивостями матеріалу тіла K у заданому діапазоні зміни зовнішнього навантаження, вона може бути як лінійною, так і нелінійною.

Запишемо рівняння руху (12), якщо за $\widetilde{L}_0$ вибрати функцію

$$\widetilde{L}_0 = \int_{X_0} \left[K_0(\vec{v}) - U_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) \right] dV_0,$$

де U_0 — густина потенціальної енергії деформації; $K_0 = \dfrac{\varrho_0 \vec{v}^2}{2}$ — густина кінетичної енергії; ϱ_0 — густина розподілу маси у відліковій конфігурації. Для такої функції стану визначальні рівняння (8) запишемо

$$\widehat{Q}_{10}^{(i)} = \int_{X_0} \varrho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)}\, dV_0, \qquad \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} = \int_{X_0} \frac{dU_0}{d(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r})} \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k}\, dV_0. \tag{13}$$

Якщо використати першу з формул (13), то систему (12) можна записати у вигляді

$$\int_{X_0} \varrho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0 + \vec{\exists}_0^k \cdot \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} = \widehat{F}_0^{(i)} + \widehat{F}_1^{(i)}. \tag{14}$$

Врахуємо, що

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} = \sum_{n=1}^{N} \widehat{\Phi}^{(n-1)} \overset{n-1}{\cdot} \frac{d^2 \widehat{u}^{(n)}}{d\tau^2} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{d^2 \widehat{u}^{(n)^T}}{d\tau^2} \overset{n-1}{\cdot} \widehat{\Phi}^{(n-1)^T} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)},$$

і введемо позначення

$$\widehat{M}^{(n+i-2)} = \int_{X_0} \widehat{\Phi}^{(n-1)^T} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0.$$

Тепер систему (14) можна записати ще так:

$$\varrho_0 \sum_{n=1}^{N} \frac{d^2 \widehat{u}^{(n)^T}}{d\tau^2} \overset{n-1}{\cdot} \widehat{M}^{(n+i-2)} + \vec{\exists}_0^k \cdot \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} = \widehat{F}_0^{(i)} + \widehat{F}_1^{(i)}. \tag{15}$$

Для розв'язування задачі про визначення пружно-деформованого стану тіла K на основі отриманої системи рівнянь руху (15) стосовно тензорних функцій $\widehat{u}^{(n)}(\tau)$ $(n = \overline{1, N})$ її необхідно доповнити початковими умовами. Зауважимо, що граничні умови на поверхні ∂X_0 враховуються інтегрально доданками $\widehat{F}_1^{(i)}$ правої частини (15).

У механіці суцільного середовища за початкові умови в момент часу $\tau = \tau_0$ задають поле вектора переміщення $\vec{u}$ і поле вектора швидкості $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}$:

$$\vec{u}|_{\tau=\tau_0} = \vec{\varphi}(\vec{r}_0), \qquad \left.\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \vec{\psi}(\vec{r}_0).$$

Запишемо векторні функції векторного аргументу $\vec{\varphi}(\vec{r}_0)$ і $\vec{\psi}(\vec{r}_0)$ розвиненнями

$$\vec{\varphi}(\vec{r}_0) = \sum_{i=1}^{N} \widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \vec{\varphi}^{(i)}, \qquad \vec{\psi}(\vec{r}_0) = \sum_{i=1}^{N} \widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \vec{\psi}^{(i)}. \tag{16}$$

З (4) і (16) за умов єдиності цих розвинень одержуємо

$$\widehat{u}^{(i)}|_{\tau=\tau_0} = \widehat{\varphi}^{(i)}, \qquad \left.\frac{\partial \widehat{u}^{(i)}}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \widehat{\psi}^{(i)} \qquad (i = \overline{1, N}).$$

Ці умови і будемо приймати за початкові для одержаної системи тензорних диференціальних рівнянь (15).

Для ілюстрації одержаних результатів побудуємо систему рівнянь руху тіла з матеріалу Мурнагана. Як відомо [8], густина потенціальної енергії деформації U_0 для нього задається у вигляді

$$U_0 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\mathcal{I}_1^2(\widehat{C}) - 2\mu\mathcal{I}_2(\widehat{C}) + \frac{1}{3}(l + 2m)\mathcal{I}_1^3(\widehat{C}) - 2m\mathcal{I}_1(\widehat{C})\mathcal{I}_2(\widehat{C}) + n\mathcal{I}_3(\widehat{C}),$$

де $\widehat{C} = \widehat{\varepsilon}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0$ — тензор деформації Коші–Гріна; $\widehat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0)$ — тензор деформації лінійної теорії пружності; $\mathcal{I}_1(\widehat{C}), \mathcal{I}_2(\widehat{C}), \mathcal{I}_3(\widehat{C})$ — алгебричні інваріанти тензора $\widehat{C}$; λ, μ — сталі Ляме; l, m, n — сталі Мурнагана.

Знайдемо тензор напружень Піоли–Кірхгофа:

$$\widehat{P} = \frac{dU_0}{d(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r})} = \left[(\lambda+2\mu)\mathcal{I}_1(\widehat{C}) + 2\mu + (l+2m)\mathcal{I}_1^2(\widehat{C}) - 2m(\mathcal{I}_2(\widehat{C}) - \mathcal{I}_1(\widehat{C})) + \frac{n}{4}\right]\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} -$$
$$- \left(\mu + \frac{n}{4} + m\mathcal{I}_1(\widehat{c})\right)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \cdot (\mathcal{I}_1(\widehat{G})\widehat{I} - \widehat{F}) + \frac{n}{4}\mathcal{I}_3(\widehat{G})\vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^{\,T}. \tag{17}$$

Тут $\widehat{G} = \widehat{I} + 2\widehat{C}$, $\widehat{F} = \widehat{I} + 2(\widehat{\varepsilon}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})$ — міри деформації Коші–Гріна і Фінгера відповідно; $\widehat{I}$ — одиничний тензор; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона в актуальній конфігурації.

У формулі (17) обмежимося збереженням доданків другого степеня стосовно похідних вектора переміщення. Одержимо

$$\widehat{P} = \widehat{T} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \widehat{T} + \mu\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + 2m\,\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\,\widehat{\varepsilon}(\vec{u}) + n(\,\widehat{\varepsilon}^2(\vec{u}) - \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\,\widehat{\varepsilon}(\vec{u})) +$$
$$+ \left[\frac{\lambda}{2}\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + l(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u})^2 + \left(\frac{n}{2} - m\right)((\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u})^2 - \widehat{\varepsilon}(\vec{u}) \cdot\cdot \widehat{\varepsilon}(\vec{u}))\right]\widehat{I}, \tag{18}$$

де $\widehat{T} = \lambda\mathcal{I}_1(\widehat{\varepsilon})\widehat{I} + 2\mu\widehat{\varepsilon}$ — тензор напружень Коші лінійної теорії пружності.

Якщо використати (4),(18) і другу формулу з (13), то отримаємо

$$\vec{\ni}_0^{\,k} \cdot \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} = \sum_{n=1}^{N} \widehat{u}^{(n)^T} \overset{n}{\cdot} \widehat{\mathcal{J}}^{(n+i)} + \sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \widehat{u}^{(j)^T} \otimes \widehat{u}^{(t)^T} \overset{j+t}{\cdot} \widehat{B}^{(t+j+i)}.$$

Тут

$$\mathcal{J}^{(n+i)} = \int_{X_0} \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(n-1)^T}}{\partial \xi^m} \otimes \left[\lambda \vec{\ni}_0^m \otimes \vec{\ni}_0^k + \mu(\delta^{km} \widehat{I} + \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^m) \right] \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k} \, dV_0,$$

$$\widehat{B}^{(t+j+i)} = \int_{X_0} \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(t-1)^T}}{\partial \xi^s} \otimes \Bigg\{ \vec{\ni}_0^r \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(j-1)^T}}{\partial \xi^p} \otimes \vec{\ni}_0^r \otimes$$
$$\otimes \left[\frac{1}{2} \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) \delta^{sp} \vec{\ni}_0^k + \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \delta^{sk} \vec{\ni}_0^p \right] +$$
$$+ \vec{\ni}_0^p \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(j-1)^T}}{\partial \xi^p} \otimes \left[\frac{1}{2} \left(m - \frac{n}{2} \right) \vec{\ni}_0^s \otimes \vec{\ni}_0^k + \frac{n}{4} \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^s) \right] +$$
$$+ \vec{\ni}_0^s \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(j-1)^T}}{\partial \xi^p} \otimes \left[\left(l - m + \frac{n}{2} \right) \vec{\ni}_0^p \otimes \vec{\ni}_0^k + \left(m - \frac{n}{2} \right) \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^p) \right] +$$
$$+ \left[\left(\mu + \frac{n}{4} \right) (\delta^{sp} \vec{\ni}_0^k + \delta^{sk} \vec{\ni}_0^p) + \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) \delta^{pk} \vec{\ni}_0^s \right] \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(j-1)^T}}{\partial \xi^p} \otimes \widehat{I} \Bigg\} \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k} \, dV_0;$$

δ^{km} — символи Кронекера.

Отже, для тіла з матеріалу Мурнагана система рівнянь руху (15) має вигляд

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\varrho_0 \frac{d^2 \widehat{u}^{(n)^T}}{d\tau^2} \overset{n-1}{\cdot} \widehat{M}^{(n+i-2)} + \widehat{u}^{(n)^T} \overset{n}{\cdot} \widehat{\mathcal{J}}^{(n+i)} \right) +$$
$$+ \sum_{t=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \widehat{u}^{(j)^T} \otimes \widehat{u}^{(t)^T} \overset{j+t}{\cdot} \widehat{B}^{(t+j+i)} = \widehat{F}_0^{(i)} + \widehat{F}_1^{(i)} \qquad (i = \overline{1, N}). \tag{19}$$

Розглянемо часткові випадки цієї системи. За базисом розвинення вектора переміщення $\vec{u}$ у формулі (4) виберемо запропонований у праці [7] базис $\widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) = \vec{R}_0^{i-1}$. При $N = 1$ система (19) складається з одного диференціального рівняння

$$\varrho_0 V_0 \frac{d^2 \widehat{u}^{(1)}}{d\tau^2} = \widehat{F}_0^{(1)} + \widehat{F}_1^{(1)} \tag{20}$$

для вектора $\widehat{u}^{(1)}(\tau)$. Тут V_0 — об'єм тіла у відліковій конфігурації.

При $N = 2$ система (19) складається з двох диференціальних рівнянь

$$\varrho_0 \left(V_0 \frac{d^2 \widehat{u}^{(1)}}{d\tau^2} + \frac{d^2 \widehat{u}^{(2)^T}}{d\tau^2} \cdot \widehat{S}^{(1)} \right) = \widehat{F}_0^{(1)} + \widehat{F}_1^{(1)}, \tag{21}$$

$$\varrho_0 \left(\frac{d^2 \widehat{u}^{(1)}}{d\tau^2} \otimes \widehat{S}^{(1)} + \frac{d^2 \widehat{u}^{(2)^T}}{d\tau^2} \cdot \widehat{S}^{(2)} \right) + V_0 \widehat{u}^{(2)^T} \cdot \cdot {}^4\widehat{C} + V_0 \widehat{u}^{(2)^T} \otimes \widehat{u}^{(2)^T} \overset{4}{\cdot} {}^6\widehat{C} = \widehat{F}_0^{(2)} + \widehat{F}_1^{(2)}$$

стосовно вектора $\widehat{u}^{(1)}(\tau)$ і тензора другого рангу $\widehat{u}^{(2)}(\tau)$. Тут

$$\widehat{S}^{(1)} = \int_{X_0} (\xi^k - \xi_0^k)\vec{\ni}_k^0 \, dV_0, \qquad \widehat{S}^{(2)} = \int_{X_0} (\xi^k - \xi_0^k)(\xi^n - \xi_0^n)\vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_n^0 \, dV_0$$

— вектор статичних моментів першого порядку і тензор моментів інерції відповідно;

$$^4\widehat{C} = \lambda^4\widehat{C}_1 + \mu(^4\widehat{C}_{11} + {}^4\widehat{C}_{111}), \qquad ^4\widehat{C}_1 = \widehat{I} \otimes \widehat{I},$$
$$^4\widehat{C}_{11} = \vec{\ni}_0^m \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_0^k, \qquad ^4\widehat{C}_{111} = \vec{\ni}_k^0 \otimes \widehat{I} \otimes \vec{\ni}_0^k$$

— ізотропні тензори четвертого рангу;

$$\begin{aligned} ^6\widehat{C} = {} & \frac{1}{2}(\lambda + m - \frac{n}{2})(^4\widehat{C}_{11} \otimes \widehat{I} + 2\widehat{I} \otimes {}^4\widehat{C}_{111}) + \frac{n}{4}\vec{\ni}_s^0 \otimes \widehat{I} \otimes \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^s \otimes \vec{\ni}_k^0 + \\ & + \frac{1}{2}(m - \frac{n}{2})(^4\widehat{C}_{111} \otimes \widehat{I} + 2\widehat{I} \otimes {}^4\widehat{C}_{11}) + (l - m + \frac{n}{2})^4\widehat{C}_1 \otimes \widehat{I} + \\ & + (\mu + \frac{n}{4}) \left[\vec{\ni}_k^0 \otimes (^4\widehat{C}_{11} + {}^4\widehat{C}_1) \otimes \vec{\ni}_0^k + \vec{\ni}_s^0 \otimes \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^s \otimes \widehat{I} \otimes \vec{\ni}_k^0\right] \end{aligned}$$

— ізотропний тензор шостого рангу.

Для наближення $N = 1$ напруження і деформації в тілі K дорівнюють нулю. Усі його точки в цьому випадку будуть рухатися однаково. Закон такого руху є розв'язком рівняння (20) за відповідних початкових умов. Для наближення $N = 2$ напруження і деформації в кожній точці тіла є однаковими і залежать лише від часу. Закон руху в цьому випадку одержимо, коли розв'яжемо систему (21) за відповідних початкових умов і підставимо розв'язок у формулу (4) при $\widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) = \vec{R}_0^{i-1}$.

1. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечних размеров. — К.: Наукова думка, 1978. — 264 с.
2. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. — К.: Наукова думка, 1979. — 264 с.
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961. — 339 с.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
6. Бурак Я.Й.,Доманський П.П. *Метод розкладу за тензорними функціями в теорії пружності циліндричних тіл* // Доп. НАН України.— 1995. — N 8.—С.47–51.
7. Доманський П.П. *Математичні моделі нелінійної теорії пружності циліндричних тіл* // Препринт No. 16–95.— Львів, 1995.— 43 с.
8. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.1. — М.: Наука, 1976. — 535 с.

Стаття надійшла до редколегії 13.06.96