УДК 539. 377

ОПТИМІЗАЦІЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО НАПРУЖЕНО–ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

М. І. Бугрій

M. I. BUGRIY. The optimization of force loading and heating processes of thick-walled thermoelastic shells. The mathematical formulation and the method of solution of the spatial quasi-static problems of optimization of thermoelastic state of the thick-walled shells at their force loading is proposed. The energy functional of the shell elastic deformation is taken as the criterion of the optimization. An intensity of force loading and temperature are the governing functions in the optimization problem. This functions are subordinated to additional integral restrictions of the moment type. The problem of optimization is reduced to the solution of two boundary-value problems with respect to the displacement vector and the vector conjugate to it.

Ми розглянули математичне формулювання і пропонуємо методику розв'язування одного класу просторових задач оптимізації осьосиметричного напружено–деформованого стану вільних на краях товстостінних циліндричних оболонок сталої товщини, які перебувають під дією нормального осьосиметричного поверхневого силового навантаження на бокових поверхнях оболонки, підпорядкованого деяким додатковим інтегральним обмеженням моментного типу.

Розглянемо кругову ізотропну циліндричну оболонку сталої товщини $2h$, радіусом R, довжиною $2z_0$, віднесену до змішаної ортогональної криволінійної системи координат (z, φ, γ), де координати (z, φ) визначають положення точки серединної поверхні (Σ_0) оболонки, причому z — це відстань точки серединної поверхні вздовж твірної від центрального перерізу $z = 0$, φ — кутова координата, γ — нормальна координата по товщині оболонки, що відраховується від її серединної поверхні $\gamma = 0$.

Нехай вільна на краях $z = \pm z_0$ циліндрична оболонка перебуває під дією нормального осьосиметричного поверхневого силового навантаження

$$f(z,\gamma) = \begin{cases} f_{3\gamma}^{(+)}(z), \ (\gamma = h, \ -z_0 < z < z_0), \\ f_{3\gamma}^{(-)}(z), \ (\gamma = -h, \ -z_0 < z < z_0). \end{cases} \tag{1}$$

Тоді компоненти u_z, u_φ, u_γ вектора переміщень $\vec{u}$ та відповідний напружено–деформований стан оболонки не залежать від кутової координати φ і

$$u_\varphi(z,\gamma) \equiv 0. \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73K40.

Врахувавши (2), запишемо вихідні співвідношення осесиметричної теорії пружності товстостінних циліндричних оболонок [1], у які входитимуть:
співвідношення Коші

$$e_{zz}(z,\gamma)=\frac{\partial u_z}{\partial z},\ e_{\varphi\varphi}(z,\gamma)=\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)},\ e_{\gamma\gamma}(z,\gamma)=\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma},$$
$$e_{z\gamma}(z,\gamma)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right),\ e_{z\varphi}(z,\gamma)\equiv 0,\ e_{\gamma\varphi}(z,\gamma)\equiv 0; \tag{3}$$

закон Гука в переміщеннях

$$\sigma_{zz}^{(0)}(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}+\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right],$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right],$$
$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(0)}(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right],$$
$$\sigma_{\gamma z}^{(0)}(z,\gamma)=G\left(\frac{\partial u_z}{\partial \gamma}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right),\ \sigma_{\gamma\varphi}^{(0)}(z,\gamma)\equiv 0,\ \sigma_{z\varphi}^{(0)}(z,\gamma)\equiv 0; \tag{4}$$

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{zz}^{(0)}}{\partial z}+\frac{\partial \sigma_{\gamma z}^{(0)}}{\partial \gamma}+\frac{\sigma_{\gamma z}^{(0)}}{(R+\gamma)}=0,\quad \frac{\partial \sigma_{\gamma z}^{(0)}}{\partial z}+\frac{\partial \sigma_{\gamma\gamma}^{(0)}}{\partial \gamma}+\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^{(0)}-\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}}{(R+\gamma)}=0 \tag{5}$$

в області $(\Omega)=\{(z,\gamma):-z_0<z<z_0,\,-h<\gamma<h\}$, а також відповідні механічні граничні умови

$$\sigma_{zz}^{(0)}(\pm z_0,\gamma)=0,\quad \sigma_{\gamma z}^{(0)}(\pm z_0,\gamma)=0,\quad \sigma_{\gamma z}^{(0)}(z,\pm h)=0,\quad \sigma_{\gamma\gamma}^{(0)}(z,\pm h)=\pm f_{3\gamma}^{(\pm)}(z) \tag{6}$$

на межі $\gamma=\pm h$, $z=\pm z_0$ області (Ω).

Тут G — модуль зсуву, ν — коефіцієнт Пуассона. Крім того, надалі будемо вважати, що гранична задача (5), (6) записана в переміщеннях з врахуванням умов (4).

Як відомо [1], розв'язок граничної задачі (5),(6) існує і він єдиний у класі гладких функцій, заданих в області (Ω). Про рівень напружено–деформованого стану оболонки, зумовленого зовнішнім силовим навантаженням (1), можна робити висновки за значеннями функціонала енергії пружної деформації [2]

$$W[u_z,u_\gamma]=\frac{\pi}{E}\int_{-h}^{h}\int_{-z_0}^{z_0}\left[\sigma_{zz}^2+\sigma_{\varphi\varphi}^2+\sigma_{\gamma\gamma}^2-2\nu(\sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{\gamma\gamma}+\sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{zz})+\right.$$
$$\left.+2(1+\nu)\sigma_{\gamma z}^2\right](R+\gamma)\,dz\,d\gamma, \tag{7}$$

записаного в переміщеннях. Тут E — модуль пружності, а напруження σ_{zz}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$, $\sigma_{z\gamma}$ виражені через переміщення за допомогою співвідношень (4).

Наведені вище співвідношення (3)–(6) є базовими для визначення напружено–деформованого стану оболонки при заданому зовнішньому поверхневому силовому навантаженні $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z)$. Надалі, формулюючи задачу оптимізації, вважатимемо, що ці функції є функціями керування напружено–деформованим станом оболонки.

За критерій оптимізації приймемо функціонал енергії пружної деформації оболонки (7), записаний у переміщеннях $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$.

Нехай функції керування напружено–деформованим станом оболонки задовольняють додаткові обмеження інтегрального типу

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(+)}(z) P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)(R+h)\,dz = B_m^{(1)},\ (m=\overline{0,m_0}),$$

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(-)}(z) P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)(R-h)\,dz = B_n^{(2)},\ (n=\overline{0,n_0}), \tag{8}$$

де $B_m^{(1)}$, $B_n^{(2)}$ — деякі задані параметри; $P_j(\cdot)$ — поліноми Лежандра.

Тепер задачу оптимізації напружено–деформованого стану оболонки сформулюємо так: серед функцій $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$, двічі неперервно диференційовних в області (Ω) і неперервно диференційовних на границі цієї області, знайти екстремалі функціонала (7), які задовольняють умови (5),(6),(8).

Сформульовану задачу на умовний екстремум розв'язуємо методом Лагранжа [3]. Ключові співвідношення задачі оптимізації щодо функцій шуканого розв'язку і множників Лагранжа у цьому випадку міститимуть рівняння (5) та рівняння

$$\frac{\partial\sigma_{zz}^*}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{\gamma z}^*}{\partial\gamma} + \frac{\sigma_{\gamma z}^*}{(R+\gamma)} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{\gamma z}^*}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{\gamma\gamma}^*}{\partial\gamma} + \frac{\sigma_{\gamma\gamma}^* - \sigma_{\varphi\varphi}^*}{(R+\gamma)} = 0 \tag{9}$$

в області (Ω), граничні умови

$$\sigma_{zz}^{(0)}(\pm z_0,\gamma)=0, \quad \sigma_{\gamma z}^{(0)}(\pm z_0,\gamma)=0, \quad \sigma_{\gamma z}^{(0)}(z,\pm h)=0, \quad \sigma_{\gamma\gamma}^{(0)}(z,\pm h)=\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,\pm h), \tag{10}$$

$$\sigma_{zz}^*(\pm z_0,\gamma)=0,\ \ \sigma_{\gamma z}^*(\pm z_0,\gamma)=0,\ \ \sigma_{\gamma z}^*(z,\pm h)=0,$$

$$u_\gamma^*(z,h) + Z_m^{(1)*} P_m\left(\frac{z}{z_0}\right) = 0,\ \ (m=\overline{0,m_0}),$$

$$u_\gamma^*(z,-h) + Z_n^{(2)*} P_n\left(\frac{z}{z_0}\right) = 0,\ \ (n=\overline{0,n_0}) \tag{11}$$

на межі області (Ω), а також інтегральні умови

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} \sigma_{\gamma\gamma}^*(z,h) P_m\left(\frac{z}{z_0}\right) dz = \frac{B_m^{(1)}}{R+h},\ \ (m=\overline{0,m_0}),$$

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} \sigma_{\gamma\gamma}^*(z,-h) P_n\left(\frac{z}{z_0}\right) dz = \frac{B_n^{(2)}}{R-h},\ \ (n=\overline{0,n_0}). \tag{12}$$

У співвідношеннях (9) – (12) $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$, $Z_m^{(1)*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $Z_n^{(2)*}$, $(n=\overline{0,n_0})$ — модифіковані множники Лагранжа; індекси m, n, якщо вони повторюються, є індексами підсумування;

$$\sigma_{zz}^*(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_z^*}{\partial z}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*}{(R+\gamma)}\right)\right],$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}^*(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{u_\gamma^*}{(R+\gamma)}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_z^*}{\partial z}\right)\right],$$
$$\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial z}+\frac{u_\gamma^*}{(R+\gamma)}\right)\right],$$
$$\sigma_{\gamma z}^*(z,\gamma)=G\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial z}\right). \tag{13}$$

Отже, для відшукання розв'язку задачі оптимізації, яку розглядаємо, потрібно спочатку визначити функції $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$, які є розв'язком задачі (9), (11), (12) і використавши (13), знайти функцію $\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,\gamma)$. Після цього, розв'язавши граничну задачу (5),(10), визначити оптимальні переміщення $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$, оптимальні напруження (4), а з граничних умов (6) — оптимальне силове навантаження $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z)$.

Водночас, врахувавши (4), (13), бачимо, що функції $\sigma_{zz}^*(z,\gamma)$, $\sigma_{\varphi\varphi}^*(z,\gamma)$, $\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,\gamma)$, $\sigma_{\gamma z}^*(z,\gamma)$, які є розв'язком задачі (9),(11), будуть задовольняти і граничну задачу (5),(10). Оскільки розв'язок задачі (5), (10) єдиний у класі гладких функцій, то розв'язок задачі оптимізації, яку розглядаємо, можна записати у вигляді

$$u_z(z,\gamma)\equiv u_z^*(z,\gamma),\ \ u_\gamma(z,\gamma)\equiv u_\gamma^*(z,\gamma); \tag{14}$$

$$\sigma_{zz}(z,\gamma)\equiv\sigma_{zz}^*(z,\gamma),\ \sigma_{\varphi\varphi}(z,\gamma)\equiv\sigma_{\varphi\varphi}^*(z,\gamma),$$
$$\sigma_{\gamma\gamma}(z,\gamma)\equiv\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,\gamma),\ \sigma_{\gamma z}(z,\gamma)\equiv\sigma_{\gamma z}^*(z,\gamma); \tag{15}$$

$$f_{3\gamma}^{(+)}(z)\equiv\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,h),\ \ f_{3\gamma}^{(-)}(z)\equiv\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,-h). \tag{16}$$

Отже, для побудови розв'язку задачі оптимізації досить розв'язати задачу (9), (11), (12) на множники Лагранжа $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$,$Z_m^{(1)*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $Z_n^{(2)*}$, $(n=\overline{0,n_0})$ і використати формули (14) – (16).

Структура граничної задачі (9),(11) дає змогу побудувати її параметричні розв'язки в замкненій формі. У цьому випадку розв'язок системи рівнянь (9) щодо функцій $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$ будемо шукати у вигляді

$$u_z^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i\,!}u_z^{*(0)}(\xi)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\varphi_{1,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)\,!},$$
$$u_\gamma^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i\,!}u_\gamma^{*(0)}(\gamma)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\varphi_{3,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)\,!}. \tag{17}$$

Тут $\varphi_{1,s}(\gamma)$, $\varphi_{3,s}(\gamma)$, $(s=\overline{1,i+1})$ — невідомі функції;

$$u_z^{*(0)}(z)=C_3^*-\frac{2b_5z}{b_4}C_1^*,\qquad u_\gamma^{*(0)}(\gamma)=(R+\gamma)C_1^*+\frac{C_2^*}{(R+\gamma)},\tag{18}$$

де $b_4=\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $b_5=\dfrac{2\nu}{1-2\nu}$; C_1^*, C_2^*, C_3^* — довільні сталі; $i=max\{m_0,n_0\}-1$, а m_0, n_0 надають кількість інтегральних обмежень (8) у задачі оптимізації.

Підставляючи функції (17) в рівняння (9), можна отримати систему звичайних диференціальних рівнянь щодо функцій $\varphi_{1,s}(\gamma)$, $\varphi_{3,s}(\gamma)$, $(s=\overline{1,i+1})$. Набір довільних сталих, а також сукупність множників Лагранжа $Z_m^{(1)*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $Z_n^{(2)*}$, $(n=\overline{0,n_0})$ дають змогу задовольнити граничні умови (11) та інтегральні умови (12) на поверхні оболонки.

Запишемо загальний вигляд розв'язку задачі (9), (11), (12), наприклад, при $m_0=n_0=1$. Для цього випадку на основі (17), (18) маємо, що

$$u_z^*(z,\gamma)=(z+z_0)C_3^*-\frac{b_5}{b_4}(z^2-z_0^2)C_1^*+\varphi_{11}(\gamma),$$

$$u_\gamma^*(z,\gamma)=(z+z_0)\left[(R+\gamma)C_1^*+\frac{C_2^*}{R+\gamma}\right]+\varphi_{31}(\gamma).\tag{19}$$

Підставляючи функції (19) в рівняння системи (9) та використавши попередньо співвідношення (13), отримаємо, що рівняння (9) будуть задовольнятися, якщо функції $\varphi_{11}(\gamma)$, $\varphi_{31}(\gamma)$ будуть розв'язками системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\varphi_{11}''+\frac{\varphi_{11}'}{R+\gamma}+2C_1^*=0,\qquad \varphi_{31}''+\frac{\varphi_{31}'}{R+\gamma}-\frac{\varphi_{31}}{(R+\gamma)^2}=0.\tag{20}$$

Загальний розв'язок системи (20) має вигляд

$$\varphi_{11}(\gamma)=C_4^*\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)-\frac{(R+\gamma)^2}{2}C_1^*+C_5^*,\quad \varphi_{31}(\gamma)=(R+\gamma)C_6^*+\frac{C_7^*}{R+\gamma},\tag{21}$$

де C_1^*, C_4^*, ... ,C_7^* — довільні сталі.

Підставивши (21) в (19), отримуємо

$$u_z^*(z,\gamma)=-C_1^*\left[\frac{b_5}{b_4}(z^2-z_0^2)+\frac{(R+\gamma)^2}{2}\right]+C_3^*(z+z_0)+C_4^*\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)+C_5^*,$$
$$u_\gamma^*(z,\gamma)=(z+z_0)\left[(R+\gamma)C_1^*+\frac{C_2^*}{R+\gamma}\right]+(R+\gamma)C_6^*+\frac{C_7^*}{R+\gamma}.\tag{22}$$

Використовуючи (13), на основі (22)

$$
\begin{gathered}
\sigma^*_{zz}(z,\gamma) = G\left[b_4 C^*_3 + 2b_5(C^*_6 + z_0 C^*_1)\right],\\
\sigma^*_{\varphi\varphi}(z,\gamma) = G\left\{C^*_1\left[(b_4+b_5)(z+z_0) - \frac{2b_5^2}{b_4}z\right] + C^*_2\frac{(b_4-b_5)(z+z_0)}{(R+\gamma)^2} + \right.\\
\left. + b_5 C^*_3 + (b_4+b_5)C^*_6 + \frac{b_4-b_5}{(R+\gamma)^2}C^*_7\right\},\\
\sigma^*_{\gamma\gamma}(z,\gamma) = G\left\{C^*_1\left[(b_4+b_5)(z+z_0) - \frac{2b_5^2}{b_4}z\right] - C^*_2\frac{(b_4-b_5)(z+z_0)}{(R+\gamma)^2} + \right.\\
\left. + b_5 C^*_3 + (b_4+b_5)C^*_6 - \frac{b_4-b_5}{(R+\gamma)^2}C^*_7\right\},\\
\sigma^*_{\gamma z}(z,\gamma) = G\,\frac{C^*_2 + C^*_4}{R+\gamma}. \qquad (23)
\end{gathered}
$$

Отже, розв'язок системи (9) має вигляд (23). Довільні сталі C^*_i, $(i=\overline{1,7})$ і множники Лагранжа $Z^{(1)*}_m$, $(m=0,1)$, $Z^{(2)*}_n$, $(n=0,1)$ однозначно визначаються з граничних (11) та інтегральних умов (12).

У цьому випадку

$$
\begin{gathered}
C^*_1 = \frac{1}{4Rhz_0}\left[(R-h)Z^{(2)*}_1 - (R+h)Z^{(1)*}_1\right],\\
C^*_2 = \frac{R^2-h^2}{4Rhz_0}\left[(R-h)Z^{(1)*}_1 - (R+h)Z^{(2)*}_1\right],\\
C^*_3 = \frac{b_5}{2b_4Rh}\left[(R+h)Z^{(1)*}_0 - (R-h)Z^{(2)*}_0\right],\ \ C^*_4 = -C^*_2,\ \ C^*_5 = 0,\\
C^*_6 = \frac{R+h}{4Rh}\left(Z^{(1)*}_1 - Z^{(1)*}_0\right) - \frac{R-h}{4Rh}\left(Z^{(2)*}_1 - Z^{(2)*}_0\right),\\
C^*_7 = \frac{R^2-h^2}{4Rh}\left[(R+h)\left(Z^{(2)*}_1 - Z^{(2)*}_0\right) - (R-h)\left(Z^{(1)*}_1 - Z^{(1)*}_0\right)\right],\\
Z^{(1)*}_j = (2j+1)\left(A_1 B^{(1)}_j - A_3 B^{(2)}_j\right),\\
Z^{(2)*}_j = (2j+1)\left(A_3 B^{(1)}_j - A_2 B^{(2)}_j\right),\ \ (j=0,1),
\end{gathered}
$$

де

$$
\begin{gathered}
A_i = \frac{(b_4+b_5)(R^2+h^2) + (-1)^i 2b_5 Rh}{4Rh(b_5-b_4)(2b_5+b_4)z_0 G},\ \ (i=1,2),\\
A_3 = \frac{(b_5+b_4)(R^2-h^2)}{4Rh(b_5-b_4)(2b_5+b_4)z_0 G}.
\end{gathered}
$$

Використовуючи тепер співвідношення (14) – (16), отримуємо розв'язок сформульованої задачі оптимізації для випадку, коли на поверхневе силове навантаження задається по дві інтегральні умови (8). Зокрема, інтенсивність оптимального поверхневого силового навантаження виражається формулою

$$f_{3\gamma}^{(\pm)}(z) = G\left\{C_1^*\left[(b_4+b_5)(z+z_0) - \frac{2b_5^2}{b_4}z\right] - C_2^*\frac{(b_4-b_5)(z+z_0)}{(R\pm h)^2} + \right.$$
$$\left. +b_5C_3^* + (b_4+b_5)C_6^* - \frac{b_4-b_5}{(R\pm h)^2}C_7^*\right\}.$$

Зауважимо, що у випадку квазістатичного формулювання розглянутої вище задачі оптимізації осесиметричного напружено–деформованого стану циліндричних оболонок зберігається загальна структура її розв'язку у вигляді (14) – (16), але він параметрично залежатиме від часу τ, оскільки характеристики $B_m^{(1)}$, $(m=0,1)$, $B_n^{(2)}$, $(n=0,1)$ інтегральних умов (8) будуть функціями часу. Цей факт можна використати, зокрема, для забезпечення заданих технологічних режимів силового навантаження оболонки. Справді, якщо, наприклад, $f_{3\gamma}^{(\pm)*}(z,\tau)$ — технологічно задана інтенсивність поверхневого силового навантаження оболонки, а $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z,\tau)$ — знайдена у вигляді (16) під час розв'язування задачі оптимізації, причому ця функція буде виражена через параметри $B_m^{(1)}(\tau)$, $B_n^{(2)}(\tau)$, то оптимізуючи, зокрема, по цих параметрах функціонал середньоквадратичного відхилення

$$K[B_m^{(1)}, B_n^{(2)}] = \int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_{0}^{\tau_0}\left(f_{3\gamma}^{(\pm)*} - f_{3\gamma}^{(\pm)}\right)^2 d\tau\, dz,$$

можна підібрати функції $B_m^{(1)}(\tau)$, $B_n^{(2)}(\tau)$ так, щоб максимально забезпечити технологічну інтенсивність $f_{3\gamma}^{(\pm)*}(z,\tau)$ силового навантаження на поверхнях оболонки.

На закінчення зазначимо, що запропоновану вище методику побудови розв'язків осьосиметричних задач оптимізації напружено–деформованого стану циліндричних оболонок можна поширити і на неосьосиметричні задачі оптимізації в такому ж формулюванні як для циліндричних, так і для інших типів оболонок обертання сталої товщини. Під час побудови розв'язків таких задач у запропонованій вище формі необхідно буде спочатку розвинути шукані функції в тригонометричні ряди Фур'є щодо кутової координати φ і отримати послідовність розглянутих вище двовимірних за просторовими координатами задач оптимізації.

1. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек.— К.: Наукова думка, 1978.— 320 с.

2. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин.— К.: Наукова думка, 1979.— 364 с.

3. Буслаев В.С. Вариационное исчисление.— Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1980.— 285 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.96