ISSN 0201 - 758X
ISSN 0320 - 6572

**ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

# ПИТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Серія механіко-математична

ВИПУСК 45

1996

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

**ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Серія механіко-математична

*Виходить з 1965 року*

Випуск 45

# ПИТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

ЛЬВІВ – 1996

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь та з проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів.
Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations and on problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes.
For scientists, post graduates and students.



Адреса редколегії:

290602, Львів, вул. Університетська, 1, Львівський державний університет,
механіко-математичний факультет, кафедра диференціальних рівнянь
Тел. (0322) 79-45-93
E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Chair of Differential Equations, Departament of Mechanics and Mathematics,
Lviv State University, Universytetska 1, Lviv, 290602

**Редактори** *М.М.Мартиняк, Л.М.Макітринська*



Комп'ютерний набір (видав. пакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX). Підп. до друку з оригінал-макета 04.11.96. Папір друк. №1. Формат 84×108/16. Гарнітура "Таймс". Друк офсетний. Умов. друк. арк. 18,46. Друкарня видавництва "Місіонер", м. Жовква. 1551

## ЗМІСТ

**CONTENTS**

УДК 517.95

# СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Г. М. Онишкевич

**G. M. Onyshkevych. Stability by Liapunov of the equation of type of plate vibration with gaped coefficients.** The mixed problem for the equation of type of plate oscillation with gaped coefficients which degenerate on the part of boundary is considered. The conditions of existence and singularity of the generalized solution of the problem and conditions of stability by Liapunov of the zero solution are obtained.

Ми досліджували умови існування, єдиності та стійкості розв'язку рівняння типу коливання пластинки з гострим краєм, коефіцієнти якого зазнають розриву. У праці [1] за допомогою функції Гріна вивчали умови коректності граничних задач для гіперболічних рівнянь, які вироджуються. Умови стійкості поперечних коливань стержня з гострим краєм досліджені в [2] . Використовуючи метод Гальоркіна і схему, запропоновану в [3], ми визначили умови існування та єдиності узагальненого розв'язку. Головним результатом роботи є доведення теореми про стійкість за Ляпуновим та експоненціальну стійкість нульового розв'язку вказаного рівняння.

Розглянемо в області $Q = \{(x_1, x_2, t) : (x_1, x_2) \in \Omega, 0 < t < \infty\}$, де $\Omega$ є сумою областей $\Omega_1 = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < b_0\}$, $\Omega_2 = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, b_0 < x_2 < b\}$ і контуру $\Gamma = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < a, \ x_2 = b_0\}$ , рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} \left(a_{ij}^{kl(m)}(x,t)u_{x_k x_l}\right)_{x_i x_j} - \\ - \sum_{i,j=1}^{2} \left(b_{ij}^{(m)}(x,t)u_{x_j}\right)_{x_i} + c^{(m)}(x,t)u_t + h^{(m)}(x,t)u = f^{(m)}(x,t), \tag{1.m}$$

де $x = (x_1, x_2) \in \Omega_m$, $m = 1, 2$ з початковими умовами

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35B35; Secondary 35R05.

Надалі вважатимемо, що виконуються умови

$$
\begin{gathered}
a_{ij}^{kl(m)} = a_{kl}^{ij(m)}, \quad b_{ij}^{(m)} = b_{ji}^{(m)}, \quad i,j,k,l = 1,2; \\
a_1^1 x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}^2 \leqslant \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(1)} \eta_{ij}\eta_{kl} \leqslant a_2 x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}^2, \quad \alpha > 0, \\
a_1^2 \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}^2 \leqslant \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(2)} \eta_{ij}\eta_{kl}, \quad a_1^m > 0
\end{gathered} \tag{4}
$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $(x,t) \in Q^{(m)}$, де $Q^{(m)} = \Omega_m \times (0;+\infty)$.

Для шуканої функції $u$ задано граничні умови, які залежать від величини $\alpha$:

$$
\begin{gathered}
\begin{cases} u(0,x_2,t) = u(a,x_2,t) = u(x_1,0,t) = u(x_1,b,t) = 0, \\ u_{x_1}(0,x_2,t) = u_{x_1}(a,x_2,t) = u_{x_2}(x_1,0,t) = u_{x_2}(x_1,b,t) = 0, \end{cases} \quad 0 < \alpha \leqslant 1; \\
\begin{cases} u(0,x_2,t) = u(a,x_2,t) = u(x_1,0,t) = u(x_1,b,t) = 0, \\ u_{x_1}(0,x_2,t) = u_{x_1}(a,x_2,t) = u_{x_2}(x_1,b,t) = 0, \end{cases} \quad 1 < \alpha \leqslant 3; \\
\begin{cases} u(0,x_2,t) = u(a,x_2,t) = u(x_1,b,t) = 0, \\ u_{x_1}(0,x_2,t) = u_{x_1}(a,x_2,t) = u_{x_2}(x_1,b,t) = 0, \end{cases} \quad \alpha > 3;
\end{gathered} \tag{5}
$$

а також умови спряження

$$
\begin{gathered}
[u]_\Gamma = 0, \quad [u_{x_2}]_\Gamma = 0, \sum_{j,k,l=1}^{2} \left( a_{2j}^{kl(1)} u_{x_k x_l} A_1 - a_{2j}^{kl(2)} u_{x_k x_l} A_2 \right)\Big|_\Gamma = 0, \\
\sum_{i,k,l=1}^{2} \left( (a_{i2}^{kl(1)} u_{x_k x_l})_{x_i} A_1 - (a_{i2}^{kl(2)} u_{x_k x_l})_{x_i} A_2 \right)\Big|_\Gamma - \sum_{j=1}^{2} \left( b_{2j}^{(1)} u_{x_j} A_1 - b_{2j}^{(2)} u_{x_j} A_2 \right)\Big|_\Gamma = 0,
\end{gathered} \tag{6}
$$

де $t \in S = [0;+\infty)$, а через $[f]_\Gamma$ ми позначили стрибок функції $f$ під час переходу через $\Gamma$, $A_m = A_m(t)$, $m = 1,2$.

Уведемо простір $\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$ як замикання множини двічі неперервно диференційовних функцій, які задовольняють умови (5) для $0 < \alpha < 2$, за нормою

$$
\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)} = \left( \int_{\Omega_1} \left( v_t^2 + x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 \right) dx + \int_{\Omega_2} \left( v_t^2 + \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}},
$$

а також аналогічний простір $\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)$, функції якого задовольняють умови (5) для $\alpha \geqslant 2$, за нормою

$$
\|v\|_{\overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega_1} \left( v_t^2 + x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 + x_2^\beta \sum_{i=1}^{2} v_{x_i} + x_2^\gamma v^2 \right) dx + \int_{\Omega_2} \left( v_t^2 + \sum_{i,j=1}^{2} v_{x_i x_j}^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}},
$$

де $\beta > \alpha - 1,\ \gamma > \beta - 1$.

Наша мета — дослідити стійкість узагальненого розв'язку задачі (1.1),(1.2)–(6) для якого справедливі такі включення:

$$u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S; \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)),\ 0 < \alpha < 2, \quad u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S; \overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)),\ \alpha \geqslant 2,$$
$$u_t \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(S; L^2(\Omega)),\ \alpha > 0. \tag{7}$$

**Означення 1.** *Функція $u(x,t)$, яка задовольняє включення (7), умови (2) і (5), а також інтегральну тотожність*

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{Q^{(m)}} \Big[ -u_t v_t A_m - u_t v A_{mt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} A_m + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j} v_{x_i} A_m +$$
$$+ c^{(m)} u_t v A_m + h^{(m)} u v A_m - f^{(m)} v A_m \Big] \, dx\, dt = \sum_{m=1}^{2} \int\limits_{D_0^{(m)}} A_m \psi v \, dx \tag{8}$$

*для довільної $v \in M_\alpha$ з обмеженим носієм, де $D_\tau^{(m)} = Q^{(m)} \cap \{t = \tau\},\ \tau \geqslant 0,\ m = 1,2$*

$$M_\alpha = \{v : v \in L^2(S; \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)),\ 0 < \alpha < 2,\ v \in L^2(S; \overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega)),\ \alpha \geqslant 2,$$
$$v_t \in L^2(S; L^2(\Omega)),\ \alpha > 0\},$$

*називається узагальненим розв'язком задачі (1.1),(1.2)–(6).*

Спочатку з'ясуємо умови існування та єдиності цього розв'язку. Будемо припускати, що виконується умова

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijt}^{kl(1)} \eta_{ij} \eta_{kl} \leqslant a_3 x_2^\alpha \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}^2 \tag{9}$$

для всіх $\eta \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2},\ (x,t) \in Q^1$, де $a_3$ — додатна стала.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови (4), (9) для $0 < \alpha < 2$ і, крім цього,*

$$a_{ij}^{kl(m)},\ b_{ij}^{(m)},\ c^{(m)},\ h^{(m)} \in L^\infty(Q^{(m)}),\ i,j,k,l = 1,2,$$
$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} \xi_i \xi_j \geqslant b_0^m \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \ \text{для всіх}\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ b_0^m + \frac{a_1^m \gamma_1}{\varkappa_1^m} \geqslant \delta_0,\ h^{(m)}(x,t) + \frac{a_1^m \gamma_2}{\varkappa_0^m} \geqslant \delta_0,$$
$$c^{(m)}(x,t) \geqslant c_0 \geqslant 0,\ 0 < A_{0m} \leqslant A_m(t) \leqslant A_{1m},\ A_{mt} \in C(S),\ (x,t) \in Q^{(m)},\ m = 1,2,$$

*де $\delta_0, \gamma_1, \gamma_2$ — деякі додатні сталі, причому $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$,*

$$\varkappa_0^1 = \frac{(5-\alpha) b^{4-\alpha}}{(2-\alpha)(4-\alpha)}, \qquad \varkappa_1^1 = \frac{2 b^{2-\alpha}}{2-\alpha},$$

*($\varkappa_0^2, \varkappa_1^2$ – взяті з нерівності Фрідріхса ([4],ст.44));* $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega)$, $f^{(m)} \in L^2_{\rm loc}([0;+\infty); L^2(\Omega_m))$, $m = 1, 2$.

*Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1.1),(1.2)-(6).*

*Доведення.* Розглянемо в області $Q_T^{(m)} = \Omega_m \times (0;T)$ рівняння (1.m), $m = 1, 2$, де $T$ — довільне додатне число. Наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u^N(x,t) = \sum_{p=1}^{N} C_p^N(t)\,\omega_p(x), \tag{10}$$

де $\{\omega_p(x)\}$ — базис простору $\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$, а $C_p^N(t)$ визначаємо з такої задачі:

$$\sum_{m=1}^{2}\int_{\Omega_m}\Bigg(u_{tt}^N\omega_p A_m + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_kx_l}^N \omega_{px_ix_j} A_m + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j}^N \omega_{px_i} A_m +$$
$$+c^{(m)}u_t^N\omega_p A_m + h^{(m)}u^N\omega_p A_m - f^{(m)}\omega_p A_m\Bigg)\,dx = 0, \tag{11}$$

$$C_p^N(0) = \varphi_p^N, \quad C_{pt}^N(0) = \psi_p^N, \quad p = 1, ..., N. \tag{12}$$

В умовах (12) сталі $\varphi_p^N, \psi_p^N$ є коефіцієнтами таких зображень:

$$\varphi^N(x) = \sum_{p=1}^{N}\varphi_p^N\omega_p(x), \quad \psi^N(x) = \sum_{p=1}^{N}\psi_p^N\omega_p(x),$$

причому $\varphi^N(x) \to \varphi(x)$ в $\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)$, а $\psi^N(x) \to \psi(x)$ в $L^2(\Omega)$ при $N \to \infty$.

Домножимо кожне рівняння системи (11) на відповідну функцію $C_{pt}^N(t)$, підсумуємо по $p$ від 1 до $N$, проінтегруємо по $t$ від 0 до $T$. Після цих операцій отримаємо рівність

$$\sum_{m=1}^{2}\int_{Q_T^{(m)}}\Bigg(u_{tt}^N u_t^N A_m + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_kx_l}^N u_{x_ix_jt}^N A_m + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j}^N u_{x_it}^N A_m +$$
$$+c^{(m)}(u_t^N)^2 A_m + h^{(m)}u^N u_t^N A_m - f^{(m)}u_t^N A_m\Bigg)\,dx\,dt = 0 \tag{13}$$

Використовуючи інтегрування частинами та умови теореми, можна одержати оцінку

$$B_1\Bigg(\int_{D_T^{(1)}}\Bigg((u_t^N)^2 + x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2}(u_{x_ix_j}^N)^2\Bigg)dx + \int_{D_T^{(2)}}\Bigg((u_t^N)^2 + \sum_{i,j=1}^{2}(u_{x_ix_j}^N)^2\Bigg)dx\Bigg) \leqslant$$
$$\leqslant B_2\Bigg(\int_{D_0^{(1)}}\Bigg((\psi^N)^2 + x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2}(\varphi_{x_ix_j}^N)^2\Bigg)dx + \int_{D_0^{(2)}}\Bigg((\psi^N)^2 + \sum_{i,j=1}^{2}(\varphi_{x_ix_j}^N)^2\Bigg)dx +$$

$$+\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q_T^{(m)}}(f^{(m)})^2dx\,dt\Big)+B_3\int_0^T\Bigg(\int\limits_{D_t^{(1)}}\Big((u_t^N)^2+x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2}(u^N_{x_ix_j})^2\Big)dx+ \\ +\int\limits_{D_t^{(2)}}\Big((u_t^N)^2+\sum_{i,j=1}^{2}(u^N_{x_ix_j})^2\Big)dx\Bigg)dt. \tag{14}$$

Тут

$$B_1=\min_{m=1,2}\min\{A_{0m};A_{0m}a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2)\},$$
$$B_2=\max_{m=1,2}\max\{A_{1m};A_{1m}(a_2+b_2\varkappa_1^m+h_2\varkappa_0^m)\},$$
$$B_3=\max_{m=1,2}\max\{A_{1m}+A_{2m};A_{2m}(a_2+b_2\varkappa_1^m+h_2\varkappa_0^m)+A_{1m}(a_3+b_3\varkappa_1^m+h_3\varkappa_0^m)\},$$

а додатні сталі $a_2$, $a_3$, $b_2$, $b_3$, $h_2$, $h_3$, $A_{2m}$ такі, що задовольняють умови:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(2)}(x,t)\eta_{ij}\eta_{kl}\leqslant a_2\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij}^2,$$
$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ijt}^{kl(2)}(x,t)\eta_{ij}\eta_{kl}\leqslant a_3\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij}^2,\quad (x,t)\in Q^{(2)};$$
$$\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant b_2\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,\quad \sum_{i,j=1}^{2}b_{ijt}^{(m)}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant b_3\sum_{i=1}^{2}\xi_i^2,$$
$$h^{(m)}(x,t)\leqslant h_2,\quad h_t^{(m)}\leqslant h_3,\quad A_{mt}\leqslant A_{2m},\quad m=1,2$$

для всіх $\eta\in\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Застосовуючи до (14) лему Гронуолла–Беллмана, отримаємо

$$\|u^N\|_{L^\infty((0;T);\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega))}\leqslant C_2,\quad \|u_t^N\|_{L^\infty((0;T);L^2(\Omega))}\leqslant C_2, \tag{15}$$

де $C_2$ - додатна стала, яка не залежить від $N$.

Нехай $S_T=(0;T)$. Згідно з оцінками (15) можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{N,N}(x,t)\}$, що для фіксованого $k$:

$$u^{N,N}\to v^k\quad *-\text{слабко в } L^\infty(S_k;\overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega)),$$
$$u_t^{N,N}\to v_t^k\quad *-\text{слабко в } L^\infty(S_k;L^2(\Omega))\ \text{ при } N\to\infty.$$

Позначимо через $u(x,t)$ функцію, яка для кожного $k$ в $Q_k$ збігається з $v^k(x,t)$. Очевидно, що $u(x,t)$ задовольняє включення (7).

Далі за схемою, запропонованою в [5], легко показати, що $u(x,t)$ буде узагальненим розв'язком задачі (1.1),(1.2)–(6). Отже, теорему доведено.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови (4), (9) для* $0 < \alpha < 2$ *і, крім того,*

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)}\xi_i\xi_j \geqslant b_0^m \sum_{i=1}^{2}\xi_i^2 \quad \text{для всіх} \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad b_0^m + \frac{a_1^m(1-\gamma_0)}{\varkappa_1^m} \geqslant \delta_0,$$

$$0 < A_{0m} \leqslant A_m(t) \leqslant A_{1m}, \quad A_{mtt} \in L^\infty_{\text{loc}}(S), \quad c^{(m)} \geqslant c_0 \geqslant 0, \ (x,t) \in Q^{(m)},$$

*де* $m = 1, 2$, $\delta_0, \gamma_0$ *— додатні сталі, причому* $\gamma_0 < 1$.

*Тоді задача (1.1),(1.2)–(6) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

*Доведення.* Покажемо, що відповідна однорідна задача з нульовими початковими умовами (2), (3) має лише нульовий розв'язок. Візьмемо

$$v = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u\,d\theta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t < \infty. \end{cases} \tag{16}$$

Очевидно, що $v \in H^1_{\text{loc}}(S; \overset{\circ}{H}{}^2_\alpha(\Omega))$. Тому виконується рівність

$$\sum_{m=1}^{2} \int\limits_{Q_\tau^{(m)}} \Big( -u_t v_t A_m - u_t v A_{mt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l} v_{x_i x_j} A_m +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} u_{x_j} v_{x_i} A_m + h^{(m)} u v A_m + c^{(m)} u_t v A_m \Big)\, dx\, dt = 0.$$

Використовуючи інтегрування частинами, отримаємо

$$\sum_{m=1}^{2} \Bigg( \int\limits_{D_\tau^{(m)}} A_m u^2 dx + \int\limits_{D_0^{(m)}} \Big( \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} z_{x_k x_l}(x,\tau) z_{x_i x_j}(x,\tau) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} z_{x_j}(x,\tau) z_{x_i}(x,\tau) \Big) A_m dx \Bigg) =$$
$$= \sum_{m=1}^{2} \Bigg( -\int\limits_{Q_\tau^{(m)}} \Big( \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijt}^{kl(m)} A_m (z_{x_k x_l}(x,\tau) - z_{x_k x_l}(x,t))(z_{x_i x_j}(x,\tau) - z_{x_i x_j}(x,t)) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ijt}^{(m)} A_m (z_{x_i}(x,\tau) - z_{x_i}(x,t))(z_{x_j}(x,\tau) - z_{x_j}(x,t)) + \tag{17}$$
$$+ \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} A_{mt} (z_{x_k x_l}(x,\tau) - z_{x_k x_l}(x,t))(z_{x_i x_j}(x,\tau) - z_{x_i x_j}(x,t)) +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} A_{mt} (z_{x_i}(x,\tau) - z_{x_i}(x,t))(z_{x_j}(x,\tau) - z_{x_j}(x,t)) \Big) dx\, dt -$$

$$-2\int\limits_{Q_\tau^{(m)}}(c^{(m)}A_m - A_{mt})u^2dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{(m)}}(c_t^{(m)}A_m + c^{(m)}A_{mt} - A_{mtt} - h^{(m)})u(z(x,\tau) - z(x,t))dx\,dt\Big),$$

де $z(x,t) = \int_0^t u(x,\theta)\,d\theta$.

Сталі $\delta_0$ і $\tau$ виберемо з таких умов:

$$\frac{a_1^m(1-\gamma_0)}{\varkappa_1^m} + b_0 - 2\tau(b_3A_{1m} + b_2A_{2m}) \geqslant \frac{\delta_0}{2}, \quad \frac{a_1^m\gamma_0}{2\varkappa_0^m} - 4\tau \geqslant \frac{a_1^m\gamma_0}{4\varkappa_0^m},$$
$$\frac{a_1^m\gamma_0}{2} - 2\tau(a_3A_{1m} + a_2A_{2m}) \geqslant \frac{a_1^m\gamma_0}{4}, \quad m = 1,2.$$

Тоді рівність (17) перепишемо у вигляді

$$\sum_{m=1}^{2} A_{1m}\int\limits_{D_\tau^{(m)}}\Big(u^2 + \frac{a_1^m\gamma_0}{2}x_2^{\alpha\delta}\sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}\Big)dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q_\tau^{(m)}}\Big(u^2(h_2^2 + 2A_{2m} + 3(c_1A_{2m})^2 + 3(c_2A_{1m})^2 + 3(A_{3m})^2) + \tag{18}$$

$$+2x_2^{\alpha\delta}\sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}((a_2A_{2m} + a_3A_{1m}) + (b_2A_{2m} + b_3A_{1m})\varkappa_0^m + (h_2A_{2m} + h_3A_{1m}))\Big)dxdt,$$

де $\delta$, $c_1$, $c_2$, $A_{3m}$ такі додатні сталі, що задовольняють умови

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m = 1, \\ 0, & \text{якщо } m = 2, \end{cases}$$
$$c^{(m)} \leqslant c_1, \quad c_t^{(m)} \leqslant c_2, \quad A_{mtt} \leqslant A_{3m}, \quad m = 1,2.$$

Позначимо $B_4 = \min\limits_{m=1,2}\min\{A_{1m};\ A_{1m}a_1^m\gamma_0/2\}$, $B_5 = \max\limits_{m=1,2}\max\{h_2^2+2A_{2m}+3(c_1A_{2m})^2+3(c_2A_{1m})^2+3(A_{3m})^2;\ 2(a_2A_{2m}+a_3A_{1m}+(b_2A_{2m}+b_3A_{1m})\varkappa_1^m+(h_2A_{2m}+h_3A_{1m})\varkappa_0^m+)\}$.
Тому з нерівності (18) одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_\tau^{(1)}}\Big(u^2 + x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}^2\Big)\,dx + \int\limits_{D_\tau^{(2)}}\Big(u^2 + \sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}^2\Big)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B_5}{B_4}\int\limits_0^\tau\Big(\int\limits_{D_\tau^{(1)}}\Big(u^2 + x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}^2\Big)\,dx + \int\limits_{D_\tau^{(2)}}\Big(u^2 + \sum_{i,j=1}^{2} z_{x_ix_j}^2\Big)\,dx\Big)\,dt.$$

Застосовуючи до цієї нерівності лему ([6], с.152), отримаємо, що

$$\int_0^T\Bigg(\int\limits_{D_t^{(1)}}\Big(u^2+x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2}z_{x_ix_j}^2\Big)\,dx+\int\limits_{D_t^{(2)}}\Big(u^2+\sum_{i,j=1}^{2}z_{x_ix_j}^2\Big)\,dx\Bigg)\,dt\leqslant 0$$

для довільного додатного $T$. Тобто $u(x,t)\equiv 0,\quad (x,t)\in Q_T$. Отже, теорему 2 доведено.

Досліджуючи стійкість, будемо вважати, що $f^{(m)}\equiv 0$, в $Q^{(m)}$, $m=1,2$. Отже, йтиметься про стійкість нульового розв'язку. Введемо позначення

$$\rho\,(u(x,t))=\Bigg(\int\limits_{\Omega_1}\Big(u_t^2+x_2^\alpha\sum_{m=1}^{2}u_{x_ix_j}^2\Big)\,dx+\int\limits_{\Omega_2}\Big(u_t^2+\sum_{m=1}^{2}u_{x_ix_j}^2\Big)\,dx\Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

**Означення 2.** *Нульовий розв'язок задачі (1.1),(1.2)–(6) називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\epsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що як тільки виконується умова $\rho\,(u(x,0))<\delta$, тоді $\rho\,(u(x,t))<\epsilon$ для майже всіх $t\in S$. Якщо ж, крім того,*

$$\lim_{t\to+\infty,t\in J}\rho\,(u(x,t))=0,$$

*де $J$ — множина невиключних значень $t$ функції $t\mapsto\rho\,(u(x,t))$, тоді нульовий розв'язок будемо називати асимптотично стійким.*

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови існування та єдиності розв'язку задачі (1.1),(1.2)–(6) для $f^{(m)}\equiv 0$ в $Q^{(m)}$ і $0<\alpha<2$, і крім того,*

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ijt}^{kl(m)}\eta_{ij}\eta_{kl}\leqslant 0,\quad \sum_{i,j=1}^{2}b_{ijt}^{(m)}\xi_i\xi_j\leqslant 0\qquad \text{для всіх } \eta\in\mathbb{R}^{n(n-1)/2},\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$
$$h_t^{(m)}\leqslant 0,\ A_{mt}\leqslant 0,\quad (x,t)\in Q^{(m)},\ m=1,2. \tag{19}$$

*Тоді нульовий розв'язок стійкий за Ляпуновим. Якщо ж*

$$c_0>0, \tag{20}$$

*то $\rho\,(u(x,t))\leqslant B_9\exp(-\mu t)\rho\,(u(x,0))$ для майже всіх $t\in S$, де $\mu$ і $B_9$ - додатні сталі.*

*Доведення.* Нехай $c_0\geqslant 0$. Тоді згідно з умовами теореми з рівності (13) одержимо

$$B_1\Bigg(\int\limits_{D_\tau^{(1)}}\Big((u_t^N)^2+x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2}(u_{x_ix_j}^N)^2\Big)dx+\int\limits_{D_\tau^{(2)}}\Big((u_t^N)^2+\sum_{i,j=1}^{2}(u_{x_ix_j}^N)^2\Big)dx\Bigg)\leqslant$$
$$\leqslant B_2\Bigg(\int\limits_{\Omega_1}\Big((\psi^N)^2+x_2^\alpha\sum_{i,j=1}^{2}(\varphi_{x_ix_j}^N)^2\Big)\,dx+\int\limits_{\Omega_2}\Big((\psi^N)^2+\sum_{i,j=1}^{2}(\varphi_{x_ix_j}^N)^2\Big)dx\Bigg).$$

Тобто $\rho^2(u^N(x,\tau)) \leqslant \frac{B_2}{B_1}\rho^2(u^N(x,0))$ , де $\tau \in [0;T]$, а $T$ — довільне додатне число. Отже, маємо

$$\rho^2(u^N(x,t)) \leqslant B_6\rho^2(u^N(x,0)) \leqslant 2B_6\rho\,(u(x,0)),\ t \in S$$

для достатньо великих $N$. В останній нерівності перейшовши до границі при $N \to \infty$, отримаємо, що $\rho^2(u(x,t)) \leqslant 2B_6\rho\,(u(x,0))$ для майже всіх $t \in S$. Тоді для довільного $\epsilon > 0$ вибираємо $\delta = \epsilon/2B_6$ і з умови $\rho\,(u(x,0)) < \delta$ випливає, що $\rho\,(u(x,t)) < \epsilon$ для майже всіх $t \in S$.

Розглянемо випадок, коли $c_0 > 0$. Кожне рівняння системи (11) помножимо спочатку на відповідну $C_{pt}^N \exp(\mu t)$, а потім на $C_p^N \mu \exp(\mu t)$ і підсумуємо по $p$ від 1 до $N$. Тоді отримаємо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{\Omega_m}\Bigg((v_{tt} - 2\mu v_t + \mu^2 v)v_t A_m + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ij}^{kl(m)} v_{x_k x_l} v_{x_i x_j t} A_m +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} v_{x_j} v_{x_i t} A_m + h^{(m)} v_t v A_m + c^{(m)}(v_t - \mu v)v_t A_m\Bigg)dx = 0,$$

де $v = u^N \exp(\mu t)$, $\mu$ — додатна стала. Звідси, інтегруючи по $t$ від 0 до $\tau$, і використовуючи умови (19), (20), одержимо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_\tau^{(m)}}\Bigg(A_{1m}(v_t)^2 + A_{1m}(a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2) -$$
$$- c_1\mu\varkappa_0^m)x_2^{\alpha\delta}\sum_{i,j=1}^{2}(v_{x_i x_j})^2\Bigg)dx \leqslant B_7\rho^2(u^N(x,0)), \tag{21}$$

де $B_7 = \max\limits_{m=1,2}\max\{A_{1m};\, A_{1m}(a_2 + b_2\varkappa_1^m + (h_2 + \mu^2 + \mu)\varkappa_0^m)\}$, $\mu \leqslant c_0/2$. Перепишемо умову (21) для $u^N$, вибравши при цьому $\mu$ таким малим, щоб виконувалися нерівності

$$a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2) - \mu\varkappa_0^m(c_1 + 1/\delta_2) > 0,\ m = 1,2;\ c_0 - 2\mu \geqslant 0.$$

Матимемо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_\tau^{(m)}}\Bigg(A_{1m}(1-\mu\delta_2)(u_t^N)^2 + A_{1m}(a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2) -$$
$$-\mu(c_1 + 1/\delta_2)\varkappa_0^m)x_2^{\alpha\delta}\sum_{i,j=1}^{2}(u_{x_i x_j}^N)^2\Bigg)dx \leqslant B_7\rho^2(u^N(x,0))\exp(-2\mu\tau),$$

де $\delta = 1$, якщо $m = 1$,і $\delta = 0$, якщо $m = 2$.

Нехай $B_8 = \max\limits_{m=1,2} \max\{A_{1m}(1-\mu\delta_2),\ A_{1m}(a_1^m(1-\gamma_1-\gamma_2)-\mu(c_1+1/\delta_2)\varkappa_0^m)\}$, де $\delta_2$ — така додатна стала, що $1-\mu\delta_2>0$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\rho^2(u^N(x,t)) \leqslant \frac{B_7}{B_8}\rho^2(u^N(x,0))\exp(-2\mu t) \leqslant \frac{2B_7}{B_8}\rho^2(u(x,0))\exp(-2\mu t),$$

$t\in S$, для достатньо великих $N$. Перейшовши до границі при $N\to\infty$, одержимо $\rho(u(x,t)) \leqslant B_9\rho(u(x,0))\exp(-\mu t)$ для майже всіх $t\in S$, де $B_9$ — додатна стала, яка не залежить від $t$. Отже, теорему 3 доведено.

**Зауваження.** *Нехай коефіцієнти рівняння (1.m) такі, що*

$$(a_{ij}^{kl(m)})_{x_ix_j}\in C(\overline{Q^{(m)}}),\ (b_{ij}^{(m)})_{x_j}\in C(\overline{Q^{(m)}}),\ i,j,k,l=1,2,\ m=1,2,$$

*і функція $u(x,t)\in C^{4,2}(Q)$. Якщо $u(x,t)$ узагальнений розв'язок задачі (1.1),(1.2)-(6), то $u(x,t)$ буде класичним розв'язком цієї задачі.*

Справді, інтегральну тотожність (8) за допомогою інтегрування частинами перепишемо у вигляді

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q^{(m)}}\Bigg(u_{tt}vA_m+\sum_{i,j,k,l=1}^{2}(a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l})_{x_ix_j}vA_m-\sum_{i,j=1}^{2}(b_{ij}^{(m)}u_{x_j})_{x_i}vA_m+$$
$$+c^{(m)}u_tvA_mh^{(m)}uvA_m-f^{(m)}vA_m\Bigg)dxdt-\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q^{(m)}}(u_tvA_m)_tdxdt+$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\partial\Omega_m}\Bigg(\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l}v_{x_j}A_m cos(n_m,x_i)-\sum_{i,j,k,l=1}^{2}(a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l})_{x_i}vA_m cos(n_m,x_j)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}u_{x_j}vA_m cos(n_m,x_i)\Bigg)dSdt=\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_0^{(m)}}A_m\psi v dx,$$

де $n_m$ — зовнішня нормаль до $\partial\Omega_m$, $m=1,2$. Враховуючи, що $v\in M_\alpha$, одержимо

$$\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{Q^{(m)}}\Bigg(u_{tt}+\sum_{i,j,k,l=1}^{2}(a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l})_{x_ix_j}-\sum_{i,j=1}^{2}(b_{ij}^{(m)}u_{x_j})_{x_i}+c^{(m)}u_t+h^{(m)}u-f^{(m)}\Bigg)vA_mdxdt+$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\Gamma}\Bigg(\sum_{i,j,k,l=1}^{2}a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l}v_{x_j}A_m cos(n_m,x_i)-\sum_{i,j,k,l=1}^{2}(a_{ij}^{kl(m)}u_{x_kx_l})_{x_i}vA_m cos(n_m,x_j)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}^{(m)}u_{x_j}vA_m cos(n_m,x_i)\Bigg)dSdt=\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{D_0^{(m)}}A_mv(u_t-\psi)dx.$$

На контурі $\Gamma$ маємо : $\cos(n_m, x_1) = 0,\ m = 1, 2$, $\cos(n_1, x_2) = 1$, $\cos(n_2, x_2) = -1$. Тому останню рівність перепишемо у вигляді

$$\int\limits_0^\infty \sum_{m=1}^{2} \int\limits_{\Omega_m} \Big( u_{tt} + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} (a_{ij}^{kl(m)} u_{x_k x_l})_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^{2} (b_{ij}^{(m)} u_{x_j})_{x_i} +$$

$$+ c^{(m)} u_t + h^{(m)} u - f^{(m)} \Big) v A_m dx dt +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Big( \sum_{j,k,l=1}^{2} \Big( a_{2j}^{kl(1)} u_{x_k x_l} A_1 - a_{2j}^{kl(2)} u_{x_k x_l} A_2 \Big) v_{x_j} -$$

$$- \Big( \sum_{i,k,l=1}^{2} (a_{i2}^{kl(1)} u_{x_k x_l})_{x_i} A_1 - (a_{i2}^{kl(2)} u_{x_k x_l})_{x_i} A_2 \Big) -$$

$$- \sum_{j=1}^{2} (b_{2j}^{(1)} u_{x_j} A_1 - b_{2j}^{(2)} u_{x_j} A_2)) v \Big) \Big|_\Gamma dt = \sum_{m=1}^{2} \int\limits_{D_0^{(m)}} A_m v (u_t - \psi) dx.$$

Звідси легко побачити, що $u(x, t)$ задовольняє (1.1), (1.2) і умови (3), (6).

Надалі вважатимемо, що виконуються такі умови:

$$b_0 x_2^\beta \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1,2}^{2} b_{ij}^{(1)}(x, t) \xi_i \xi_j \leqslant b_2 x_2^\beta \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \tag{22}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{ijt}^{(1)}(x, t) \xi_i \xi_j \leqslant b_3 x_2^\beta \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \quad h^{(1)}(x, t) \leqslant h_2 x_2^\gamma, \quad h_t^{(1)}(x, t) \leqslant h_3 x_2^\gamma$$

$$\text{для всіх } \xi \in \mathbb{R}^n,\ (x, t) \in Q^{(1)}, \beta < 2\alpha - 2.$$

Аналогічно можна довести такі теореми.

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови (4), (9) для $\alpha \geqslant 2$, (22) і, крім того,*

$$a_{ij}^{kl(m)},\ b_{ij}^{(m)},\ c^{(m)},\ h^{(m)} \in L^\infty(Q^{(m)}),\ i, j, k, l = 1, 2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}^{(m)} \xi_i \xi_j \geqslant b_0^m \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \ \text{для всіх}\ \xi \in \mathbb{R}^n, \quad b_0^m + \frac{a_1^m \gamma_1}{\varkappa_1^m} \geqslant \delta_3,$$

$$h^{(1)}(x, t) + \frac{a_1^1 \gamma_2}{\varkappa_0^1} x_2^\gamma \geqslant\ h_0 x_2^\gamma, \quad h^{(2)}(x, t) + \frac{a_1^2 \gamma_2}{\varkappa_0^2} \geqslant \delta_3, \quad c^{(m)}(x, t) \geqslant c_0 \geqslant 0,$$

$$0 < A_{0m} \leqslant A_m(t) \leqslant A_{1m}, \quad A_{mt} \in C(S), \quad (x, t) \in Q^{(m)}, \quad m = 1, 2,$$

*де $\delta_3,\ h_0, \gamma_1, \gamma_2$ — деякі додатні сталі, причому $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$,*

$$\varkappa_0^1 = \frac{b_0^{\gamma - \alpha + 4}}{(\gamma - \beta + 2)(\beta - \alpha + 2)},\ \varkappa_1^1 = \frac{2b^{\beta - \alpha + 2}}{\beta - \alpha + 2},$$

*($\varkappa_0^2$, $\varkappa_1^2$ — взяті з нерівності Фрідріхса ([4],ст.44));*

$$\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2_{\alpha\beta\gamma}(\Omega), \quad \psi \in L^2(\Omega), \quad f^{(m)} \in L^2_{\text{loc}}([0;+\infty); L^2(\Omega_m)), \ m = 1,2.$$

*Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1.1),(1.2)-(6).*

**Теорема 5.** *Нехай виконуються умови (4), (9) для $\alpha \geqslant 2$ і, крім того,*

$$b_0^m + \frac{a_1^m(1-\gamma_0)}{\varkappa_1^m} \geqslant \delta_4, \quad h^{(1)} + \frac{a_1^1\gamma_2}{\varkappa_0^1} x_2^\gamma \geqslant h_0 x_2^\gamma,$$
$$0 < A_{0m} \leqslant A_m(t) \leqslant A_{1m}, \quad A_{mtt} \in L^\infty_{\text{loc}}(S), c^{(m)} \geqslant c_0 \geqslant 0, \quad (x,t) \in Q^{(m)},$$

*де $m = 1,2$, а $\delta_4$, $h_0$, $\gamma_0$, $\gamma_2$ — додатні сталі, причому $\gamma_0 < 1$, $\gamma_2 < 1$.*

*Тоді задача (1.1),(1.2)-(6) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Досліджуючи стійкість, будемо розглядати нульовий роз'язок, тобто однорідні рівняння (1.m), $m = 1,2$. Введемо позначення

$$\rho\,(u(x,t)) = \left( \iint\limits_{\Omega_1} \left( u_t^2 + x_2^\alpha \sum_{m=1}^{2} u_{x_i x_j}^2 + x_2^\beta \sum_{i=1}^{2} u_{x_i}^2 + x_2^\gamma u^2 \right) dx + \iint\limits_{\Omega_2} \left( u_t^2 + \sum_{m=1}^{2} u_{x_i x_j}^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Стійкість розуміємо в сенсі означення 2, тільки вже в даній метриці.

**Теорема 6.** *Нехай виконуються умови теорем 4, 5 і, крім того, виконується умова (19).*

*Тоді нульовий розв'язок задачі (1.1),(1.2)-(6) стійкий за Ляпуновим.*


1. Байкузиев К.Б. Основные смешаные задачи для некоторых вырождающихся уравнений с частными производными.— Ташкент: Фан, 1984.—252 с.
2. Лавренюк С.П. *Об устойчивости поперечных колебаний стержня с острым краем.* // Нелинейные граничные задачи.— 1992.— Вып.4.— С.62–65.
3. Ладыженская О.А., Ступялис Л. *Краевые задачи для уравнений смешаного типа.* // Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1975.— Т.46.— С.101–135.
4. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.—336 с.
5. Онишкевич Г.М. *Стійкість за Ляпуновим рівняння типу коливання пластинки з гострим краєм* // Деп.в ДНТБ України N2020–1995.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики.— М.: Наука,1973. — 408 с.


*Стаття надійшла до редколегії 25.06.96*

УДК 517.946

# АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНОКОМПОНЕНТНИХ СИСТЕМ З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

П. П. БАБАК

**P. P. BABAK. The asymptotic behaviour of solutions of coupled systems with small parameter.** The coupled systems of differential equations are considered. The problem contains the initial boundary problem for parabolic system and the initial problem for system of ordinary differential equations. The behaviour of solutions in three cases if $\varepsilon \to 0$ is studied in three cases. Among them (i) the problem with a small parameter at an elliptic operator;
(ii) the problem with a small parameter at the time derivatives; (iii) the problem with a small parameter at an elliptic operator and at the time derivatives is considered.

У праці досліджено розв'язки задач з малим параметром $\varepsilon$, коли $\varepsilon \to 0$. Для систем звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній питання про зв'язок між співвідношення вихідною задачею і виродженою досліджував А.Н. Тихонов[1]. Поведінку розв'язків крайових задач для систем параболічного типу з малим параметром при часовій похідній вивчали N.Ramanujam, U.N. Srivastava [2], В.Г. Борисов [3] та ін.

Ми розглянули різнокомпонентну систему, що містить систему параболічного типу з початковими і крайовими умовами і систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з початковими умовами. Такого типу системи трапляються під час вивчення процесу дифузії нейтронів у ядерних реакторах [4], а також описують зміну провідності мембрани аксона нерва [5]. Коректність таких задач досліджували В.Н. Масленнікова [6], А. Давлятов [7].

У розділі 1 сформульована теорема про диференціальні нерівності для зазначеної вище задачі з параметром. Доведення цих нерівностей аналогічне до доведення нерівностей для параболічних систем, запропонованого W. Walter'ом [8]. У розділах 2–4 досліджена асимптотика при $\varepsilon \to 0$ розв'язку $u(t,x,\varepsilon) = (\bar{u}(t,x,\varepsilon), \hat{u}(t,x,\varepsilon))$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^M$, $\hat{u} \in \mathbb{R}^L$ такої задачі:

$$\begin{cases} \bar{P}_i u \equiv \varepsilon^\alpha \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \varepsilon^{2\beta} L_i(t,x,\varepsilon)u + \bar{A}_i(t,x,\varepsilon)u = \bar{f}_i(t,x,\varepsilon), \\ \hat{P}_j u \equiv \varepsilon^\alpha \dfrac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} + \hat{A}_j(t,x,\varepsilon)u = \hat{f}_j(t,x,\varepsilon), (t,x) \in G^T = (0,T] \times D; \end{cases} \tag{0.1}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35C20; Secondary 35R45.

$$\begin{cases} \bar{R}_i u \equiv \bar{u}_i(0,x,\varepsilon) = \bar{h}_i(x,\varepsilon), \\ \hat{R}_j u \equiv \hat{u}_j(0,x,\varepsilon) = \hat{h}_j(x,\varepsilon), \quad (t,x) \in \partial_0 G^T = \{0\} \times \bar{D}; \end{cases} \tag{0.2}$$

$$\bar{\Gamma}_i u \equiv \bar{u}_i(t,x,\varepsilon) = \bar{g}_i(t,x,\varepsilon), \quad (t,x) \in \partial_1 G^T = (0,T] \times \partial D, \tag{0.3}$$

де $D$ – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $0 < t \leqslant T < \infty$,

$$L_i(t,x,\varepsilon)u \equiv -\sum_{k,l=1}^{n} c_{i,kl}(t,x,\varepsilon)\bar{u}_{i,kl} + \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}(t,x,\varepsilon)\bar{u}_{i,k} + \sum_{s=1}^{M} d_{is}^1(t,x,\varepsilon)\bar{u}_s + \sum_{r=1}^{L} d_{ir}^2(t,x,\varepsilon)\hat{u}_r;$$

$$\bar{A}_i(t,x,\varepsilon)u \equiv \sum_{s=1}^{M} \bar{a}_{is}^1(t,x,\varepsilon)\bar{u}_s + \sum_{r=1}^{L} \bar{a}_{ir}^2(t,x,\varepsilon)\hat{u}_r;$$

$$\hat{A}_j(t,x,\varepsilon)u \equiv \sum_{s=1}^{M} \hat{a}_{js}^1(t,x,\varepsilon)\bar{u}_s + \sum_{r=1}^{L} \hat{a}_{jr}^2(t,x,\varepsilon)\hat{u}_r,$$

де $\bar{u}_{i,k} \equiv \dfrac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}, \bar{u}_{i,kl} \equiv \dfrac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_l}$, $k,l = 1,\dots,n; i = 1,\dots,M;\ j = 1,\dots,L.$

Розв'язки всіх задач розглядаються в просторі $U = \bar{U} \times \hat{U}$,де

$$(u \in U) \overset{\text{def}}{\equiv} (\bar{u} \in \bar{U}) \wedge (\hat{u} \in \hat{U}),$$

$$\bar{U} \overset{\text{def}}{\equiv} C^{1,2}(G^T) \cap C(\bar{G}^T), \quad \hat{U} \overset{\text{def}}{\equiv} C^{1,0}(G^T \cup \partial G_1^T) \cap C(\bar{G}^T).$$

**Умова A.** *Нехай матриця $c_{i,kl}(t,x,\varepsilon)$ при фіксованому $i = 1,\dots,M$ є симетричною і*

$$m_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{k,l=1}^{n} c_{i,kl}(t,x,\varepsilon)\xi_k\xi_l \leqslant m_1|\xi|^2,$$

*де $\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $0 < m_0 \leqslant m_1 < \infty$, $(t,x) \in G^T$ та $k,l = 1,\dots,n$.*

**Умова B($\beta$).** *Функції $c_{i,kl}$, $b_{i,k}$, $d_{is}^1$, $d_{ir}^2$, $\bar{a}_{is}^1$, $\bar{a}_{ir}^2$, $\hat{a}_{js}^1$, $\hat{a}_{jr}^2$, $\bar{f}_i$, $\hat{f}_j$ визначені і неперервні в області $G^T \times [0;\varepsilon_0]$, $\bar{h}_i, \hat{h}_j$ — в області $\bar{D} \times [0;\varepsilon_0]$, $\bar{g}_i$, — в області $\partial_1 G^T \times [0;\varepsilon_0]$ та справджують умову $\varepsilon^{2\beta} d_{is}^1 + \bar{a}_{is}^1 \leqslant 0$ при $i \neq s$, $\hat{a}_{jr}^2 \leqslant 0$ при $j \neq r$, $\hat{a}_{js}^1 \leqslant 0$, $\varepsilon^{2\beta} d_{ir}^2 + \bar{a}_{ir}^2 \leqslant 0$ для $i,s = 1,\dots,M$; $j,r = 1,\dots,L$, $(t,x) \in G^T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.*

**Позначення.** *Нехай $u \in \mathbb{R}^p$ :* $\quad |u| = (|u_1| + \dots + |u_p|)^{\frac{1}{2}}$;

$$\|f\| = \sup\{|\bar{f}|, |\hat{f}| : (t,x) \in G^T, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \bar{f} \in \mathbb{R}^M, \hat{f} \in \mathbb{R}^L\};$$

$$\|g\|_1 = \sup\{|\bar{g}(t.x,\varepsilon)| : (t,x) \in \partial_1 G^T, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \bar{g} \in \mathbb{R}^M\};$$

$$\|h\|_0 = \sup\{|\bar{h}(x,\varepsilon)|, |\hat{h}(x,\varepsilon)| : x \in \bar{D}, 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \bar{h} \in \mathbb{R}^M, \hat{h} \in \mathbb{R}^L\},$$

$\rho(x,\partial D) = \inf\{|x-y| : y \in \partial D\}$, *$m_s$ – сталі, які не залежать від $\varepsilon$, $m_s > 0$, $s = 1,2\dots$.*

**1. Диференціальні нерівності.** Розглянемо для довільних $\varepsilon > 0$ задачу

$$\begin{cases} \bar{Q}_i u \equiv \bar{F}_i(t,x,u,\bar{u}_{i,k},\bar{u}_{i,kl},\varepsilon) = 0, \\ \hat{Q}_j u \equiv \hat{F}_j(t,x,u,\varepsilon) = 0, \quad (t,x) \in G^T \end{cases} \tag{1.1}$$

з початковими умовами (0.2) і крайовими (0.3).

**Умова V.** *Нехай $\bar{F}_i(t,x,u,p,q,\varepsilon)$ — монотонно спадна щодо $q = \{q_{kl}\}_{k,l=1}^n$, $i = 1,\dots,M$, тобто для всіх $q = \{q_{kl}\}_{k,l=1}^n, \tilde{q} = \{\tilde{q}_{kl}\}_{k,l=1}^n$ та $\xi \in \mathbb{R}^n$ маємо*

$$\sum_{k,l=1}^n [q_{kl} - \tilde{q}_{kl}]\xi_k \xi_l \geqslant 0 \Rightarrow \bar{F}_i(t,x,u,p,q,\varepsilon) \leqslant \bar{F}_i(t,x,u,p,\tilde{q},\varepsilon),$$

*де $(t,x) \in G^T$, $u \in \mathbb{R}^{M+L}$, $p \in \mathbb{R}^n$ та $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ [8].*

**Умова W.** *Нехай $\bar{F}_i(t,x,u,p,q,\varepsilon)$, $\hat{F}_j(t,x,u,\varepsilon)$ — незростаючі функції за змінною $u$ при фіксованих $\bar{u}_i$ та $\hat{u}_j$ відповідно [8].*

**Лема.** *(Сильна нерівність). Нехай $u, v \in U$, виконуються умови V, W та такі співвідношення:*

$$\bar{Q}_i u < \bar{Q}_i v,\ \hat{Q}_j u < \hat{Q}_j v, \quad (t,x) \in G^T; \qquad \bar{R}_i u < \bar{R}_i v,\ \hat{R}_j u < \hat{R}_j v, \quad (t,x) \in \partial_0 G^T;$$
$$\bar{\varGamma}_i u < \bar{\varGamma}_i v, \quad (t,x) \in \partial_1 G^T; \qquad i = 1,\dots,M;\ j = 1,\dots,L.$$

*Тоді $\bar{u}_i < \bar{v}_i$, $\hat{u}_j < \hat{v}_j$ для $(t,x) \in \bar{G}^T$, $j = 1,\dots,L$.*

**Теорема 1.1.** *(Слабка нерівність) Нехай $u, v \in U$, виконуються умови V, W та умова Ліпшиця:*

$$|\bar{F}_i(t,x,u,p,q,\varepsilon) - \bar{F}_i(t,x,v,p,q,\varepsilon)| \leqslant L(\varepsilon)|u - v|,$$
$$|\hat{F}_j(t,x,u,\varepsilon) - \hat{F}_j(t,x,v,\varepsilon)| \leqslant L(\varepsilon)|u - v|,$$

*а також наступні співвідношення:*

$$\bar{Q}_i u \leqslant \bar{Q}_i v,\ \hat{Q}_j u \leqslant \hat{Q}_j v, \quad (t,x) \in G^T; \qquad \bar{R}_i u \leqslant \bar{R}_i v,\ \hat{R}_j u \leqslant \hat{R}_j v, \quad (t,x) \in \partial_0 G^T;$$
$$\bar{\varGamma}_i u \leqslant \bar{\varGamma}_i v, \quad (t,x) \in \partial_1 G^T; \qquad i = 1,\dots,M;\ j = 1,\dots,L.$$

*Тоді* $\quad \bar{u}_i \leqslant \bar{v}_i, \quad \hat{u}_j \leqslant \hat{v}_j, \quad (t,x) \in \bar{G}^T, \quad i = 1,\dots,M; \quad j = 1,\dots,L.$

**2. Лінійна задача з малим параметром при еліптичному операторі.** Розглянемо задачу (0.1)–(0.3) при $\alpha = 0, \beta = 1$.

**Умова С.2.** *Нехай $\|b_{i,k}\| \leqslant m_2$, $i = 1,\dots,M$; $k = 1,\dots,n$;*

$$\sum_{p=1}^M (\varepsilon^2 d_{ip}^1 + \bar{a}_{ip}^1) + \sum_{q=1}^L (\varepsilon^2 d_{iq}^2 + \bar{a}_{iq}^2) \geqslant m_3 > -\infty, \quad i = 1,\dots,M;$$
$$\sum_{p=1}^M \hat{a}_{jp}^1 + \sum_{q=1}^L \hat{a}_{jq}^2 \geqslant m_3 > -\infty, \quad j = 1,\dots,L, \quad (t,x) \in G^T, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

**Теорема 2.1.** *Нехай $u \in U$ — розв'язок задачі (0.1)-(0.3) при $\alpha = 0$, $\beta = 1$, і виконуються умови A, B(1), C.2.*

*Тоді*

$$|u(t,x,\varepsilon)| \leqslant m_4\,[\|f\| + \|h\|_0 + \|\bar{g}\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D))]. \tag{2.1}$$

*Доведення.* Розглянемо функцію

$$v(t,x,\varepsilon) = e^{\gamma t}\,[\|f\| + \|h\|_0 + \|\bar{g}\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D))],$$

де $\gamma > 0$, функція $\rho\,(x)$ справджує нерівність $\rho\,(x,\partial D) \leqslant \rho\,(x) \leqslant 2\rho\,(x,\partial D)$ та $\rho\,(x) \in C^2(\bar{D})$. Легко зауважити, що

$$\bar{R}_i u \leqslant \bar{R}_i v, \qquad \hat{R}_j u \leqslant \hat{R}_j v, \quad (t,x) \in \partial_0 G^T,$$

$$\bar{\Gamma}_i u \leqslant \bar{\Gamma}_i v, \qquad (t,x) \in \partial_1 G^T, i = 1,\dots,M; \quad j = 1,\dots,L.$$

При $\gamma = \max\{0; 1 - m_3\}$, $\Delta = (2m_1\||\rho\,'_x|^2\|_0)^{-1}$, де $\rho\,'_x = (\rho\,'_{x_1},\dots,\rho\,'_{x_n})$ і достатньо малих $\varepsilon$ маємо

$$\bar{P}_i u \leqslant \bar{P}_i v, \qquad \hat{P}_j u \leqslant \hat{P}_j v, \quad (t,x) \in G^T.$$

З Теореми 1.1 випливає, що $\bar{u}_i \leqslant \bar{v}_i, \hat{u}_j \leqslant \hat{v}_j$, $(t,x) \in \bar{G}^T, i = 1,\dots,M;\ j = 1,\dots,L$. Врахувавши лінійність оператора (0.1), одержуємо $|\bar{u}_i| \leqslant \bar{v}_i$, $|\hat{u}_j| \leqslant \hat{v}_j$.

Отже, при $m_4 = e^{\gamma T}\sqrt{M+L}$ виконується нерівність (2.1). Теорему доведено.

Розглянемо задачу для $u^\varepsilon(t,x)$:

$$\begin{cases} \bar{P}_i^\varepsilon u^\varepsilon \equiv \dfrac{\partial \bar{u}_i^\varepsilon}{\partial t} + \bar{A}_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \bar{f}_i(t,x,\varepsilon), \\ \hat{P}_j^\varepsilon u^\varepsilon \equiv \dfrac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial t} + \hat{A}_j(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \hat{f}_j(t,x,\varepsilon), \quad (t,x) \in G^T \cup \partial_1 G^T \end{cases} \tag{2.2}$$

з початковими умовами (0.2).

Виникає питання, чи виконується така умова:

$$u(t,x,\varepsilon) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, (t,x) \in [0;T] \times D, \tag{2.3}$$

де $u(t,x,\varepsilon)$ — розв'язок задачі (0.1)–(0.3) при $\alpha = 0, \beta = 1$, а $u^0(t,x)$ — розв'язок задачі (2.2),(0.2) при $\varepsilon = 0$.

**Умова D.2.** *Нехай існує єдиний розв'язок $u^\varepsilon \in U$ задачі (2.2),(0.2) та виконуються умови:*

$$u^\varepsilon(t,x) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, \quad (t,x) \in \bar{G}^T, \tag{2.4}$$

$$\|L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon\| \leqslant m_5, \quad i = 1,\dots,M.$$

**Зауваження.** *Якщо* $\bar{A}_i, \hat{A}_j, \bar{f}_i, \hat{f}_j \in C^{0,2,1}_{t,x,\varepsilon}(G^T \times [0;\varepsilon_0])$ *та* $\bar{h}_i, \hat{h}_j \in C^{2,1}_{x,\varepsilon}(\bar{D} \times [0;\varepsilon_0])$, $i = 1, \ldots, M, j = 1, \ldots, L$, *то виконується умова D.2 [9].*

**Теорема 2.2.** *Нехай* $u \in U$ *та виконуються умови A, B(1), C.2, D.2. Тоді*

$$|u(t,x,\varepsilon) - u^0(t,x)| \leqslant \varepsilon m_6 + m_4 \|\bar{g} - \bar{u}^0\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x, \partial D)). \qquad (2.5)$$

*Доведення.* Функція $u(t,x,\varepsilon) - u^\varepsilon(t,x)$ є розв'язком такої задачі

$$\begin{cases} \bar{P}_i[u - u^\varepsilon] = -\varepsilon^2 L_i(t,x,\varepsilon) u^\varepsilon, \quad \hat{P}_j[u - u^\varepsilon] = 0, & (t,x) \in G^T, \\ \bar{R}_i[u - u^\varepsilon] = 0, \quad \hat{R}_j[u - u^\varepsilon] = 0, & (t,x) \in \partial_0 G^T, \\ \bar{\Gamma}_i[u - u^\varepsilon] = \bar{g}_i(t,x,\varepsilon) - \bar{u}^\varepsilon_i(t,x), & (t,x) \in \partial_1 G^T. \end{cases}$$

Згідно з теоремою 2.1 маємо

$$\begin{aligned} |u - u^\varepsilon| &\leqslant \varepsilon^2 m_4 \|L u^\varepsilon\| + m_4 \|\bar{g} - \bar{u}^\varepsilon\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon^2 m_4 m_5 + m_4 (\|\bar{g} - \bar{u}^0\|_1 + \|\bar{u}^0 - \bar{u}^\varepsilon\|_1) \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon m_6 + m_4 \|\bar{g} - \bar{u}^0\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Отже, одержано позитивну відповідь на питання (2.3).

**3. Лінійна задача з малим параметром при похідній за часом.** Розглянемо задачу (0.1)–(0.3) при $\alpha = 1,\ \beta = 0$.

**Умова С.3.** *Існує такий вектор* $y(x) = (\bar{y}(x), \hat{y}(x))$, *що* $\bar{y}_i > 0, \hat{y}_j > 0,\ x \in \bar{D}$ *та*

$$L_i y + \bar{A}_i y \geqslant m_7 > 0, \quad \hat{A}_j y \geqslant m_7 > 0, \quad i = 1, \ldots, M, \quad j = 1, \ldots, L.$$

**Теорема 3.1.** *Нехай* $u \in U$ *є розв'язком задачі (0.1)-(0.3) при* $\alpha = 1, \quad \beta = 0$, *і виконуються умови A, B(0), C.3. Тоді*

$$|u(t,x,\varepsilon)| \leqslant m_8\,(\|f\| + \|h\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) + \|\bar{g}\|_1). \qquad (3.1)$$

*Доведення.* Розглянемо функцію $v(t,x,\varepsilon) = m_9\, y\,(\|f\| + \|h\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) + \|\bar{g}\|_1)$. Існує таке $\delta > 0$, що

$$L_i y + \bar{A}_i y \geqslant m_7 \geqslant \delta \bar{y}_i, \quad \hat{A}_j y \geqslant m_7 \geqslant \delta \hat{y}_j$$

для довільних $i = 1, \ldots, M,\ j = 1, \ldots, L,\ (t,x) \in G^T$. Легко зауважити, що при достатньо малих $\varepsilon$ та

$$m_9 = \max\{1, \sup\{\frac{1}{\bar{y}_i(x)}, \frac{1}{\hat{y}_j(x)},\ x \in \bar{D},\ i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L\}\}$$

виконуються нерівності

$$\bar{R}_i u \leqslant \bar{R}_i v,\ \hat{R}_j u \leqslant \hat{R}_j v, \quad (t,x) \in \partial_0 G^T; \qquad \bar{P}_i u \leqslant \bar{P}_i v,\ \hat{P}_j u \leqslant \hat{P}_j v, \quad (t,x) \in G^T;$$
$$\bar{\Gamma}_i u \leqslant \bar{\Gamma}_i v, \quad (t,x) \in \partial_1 G^T; \qquad i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L.$$

З Теореми 1.1 випливає, що $\bar{u}_i \leqslant \bar{v}_i,\ \hat{u}_j \leqslant \hat{v}_j,\ (t,x) \in \bar{G}^T,\ i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, L$. Врахувавши лінійність оператора (0.1), одержуємо $|\bar{u}_i| \leqslant \bar{v}_i, \quad |\hat{u}_j| \leqslant \hat{v}_j$.

Отже, при $m_8 = m_9 \|y\|_0$ виконується нерівність (3.1). Теорему доведено.

Розглянемо задачу для $u^\varepsilon(t,x),\ (t,x) \in G^T \cup \partial_0 G^T$ :

$$\begin{cases} \bar{P}_i^\varepsilon u^\varepsilon \equiv L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon + \bar{A}_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \bar{f}_i(t,x,\varepsilon), \\ \hat{P}_j^\varepsilon u^\varepsilon \equiv \hat{A}_j(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \hat{f}_j(t,x,\varepsilon), \quad (t,x) \in G^T \cup \partial_0 G^T \end{cases} \tag{3.2}$$

з крайовими умовами (0.3).

Виникає питання, чи виконується наступна умова:

$$u(t,x,\varepsilon) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, \quad (t,x) \in G^T \cup \partial_1 G^T, \tag{3.3}$$

де $u(t,x,\varepsilon)$ — розв'язок задачі (0.1)–(0.3) при $\alpha = 1, \beta = 0$, $u^0(t,x)$ — розв'язок задачі (3.2),(0.3) при $\varepsilon = 0$.

**Умова D.3.** *Нехай існує єдиний розв'язок $u^\varepsilon$ задачі (3.2),(0.3) в класі функцій $U$, $\|u_t^\varepsilon\| \leqslant m_{10}$ та*

$$u^\varepsilon(t,x) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, \quad (t,x) \in \bar{G}^T. \tag{3.4}$$

**Зауваження.** *Задача (3.2) зводиться до системи рівнянь еліптичного типу, якщо $\det\{\hat{a}_{j,r}^2(t,x,\varepsilon)\}_{j,r=1}^L \neq 0$. Розв'язність такого типу задач досліджена, наприклад, у [10].*

**Теорема 3.2.** *Нехай $u \in U$ та виконуються умови A, B(0), C.3, D.3. Тоді справедлива оцінка*

$$|u(t,x,\varepsilon) - u^0(t,x)| \leqslant \varepsilon m_{11} + m_8 \|u^0 - h\|_0 \exp(-\delta \frac{t}{\varepsilon}). \tag{3.5}$$

*Доведення.* Функція $u(t,x,\varepsilon) - u^\varepsilon(t,x)$ задовольняє таку задачу:

$$\begin{cases} \bar{P}_i[u - u^\varepsilon] = -\varepsilon \dfrac{\partial \bar{u}_i^\varepsilon}{\partial t}, \quad \hat{P}_j[u - u^\varepsilon] = -\varepsilon \dfrac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial t}, \quad (t,x) \in G^T, \\ \bar{R}_i[u - u^\varepsilon] = \bar{h}_i - u^\varepsilon, \quad \hat{R}_j[u - u^\varepsilon] = \hat{h}_j - u^\varepsilon, \quad (t,x) \in \partial_0 G^T, \\ \bar{\Gamma}_i[u - u^\varepsilon] = 0, \qquad (t,x) \in \partial_1 G^T. \end{cases}$$

З теореми 3.1:

$$|u - u^{\varepsilon}| \leqslant \varepsilon m_8 \|u_t^{\varepsilon}\| + m_8 \|h - u^{\varepsilon}\|_0 \exp(-\delta \frac{t}{\varepsilon}) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon m_8 m_{10} + m_8 [\|u^0 - h\|_0 + \|u^0 - u^{\varepsilon}\|_0] \exp(-\delta \frac{t}{\varepsilon}) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon m_{11} + m_8 [\|u^0 - h\|_0] \exp(-\delta \frac{t}{\varepsilon}).$$

Теорему доведено.

Отже, одержано позитивну відповідь на питання (3.3).

**4. Лінійна задача з малим параметром при похідній за часом та еліптичному операторі.** Розглянемо задачу (0.1)–(0.3) при $\alpha = 1, \beta = 1$.

**Умова С.4.** *Існує такий вектор $y = (\bar{y}, \hat{y})$, що $\bar{y}_i > 0, \hat{y}_j > 0$ та*

$$\bar{A}_i y \geqslant m_{12} > 0, \quad \hat{A}_j y \geqslant m_{12} > 0, \quad i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, L.$$

**Зауваження.** *Якщо матриця $A = (\bar{A}^T, \hat{A}^T)^T$ строго додатно визначена, то вона справджує умову С.4.*

**Теорема 4.1.** *Нехай $u \in U$ є розв'язком задачі (0.1)-(0.3) при $\alpha = 1, \beta = 1$, і виконуються умови А, В(1), С.2 , С.4. Тоді*

$$|u(t, x, \varepsilon)| \leqslant m_{13} [\|f\| + \|h\|_0 \exp(-\delta \frac{t}{\varepsilon}) + \|\bar{g}\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon} \rho\,(x, \partial D))]. \tag{4.1}$$

*Доведення.* Розглянемо функцію

$$v(t, x, \varepsilon) = m_{13} y [\|f\| + \|h\|_0 \exp(-\delta \frac{t}{\varepsilon}) + \|\bar{g}\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon} \rho\,(x, \partial D))].$$

Легко зауважити, що при достатньо малих $\varepsilon$ та

$$m_{13} = \min\{m_{12}, |y|\}, \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{m_{12}}{|v|}, \quad \Delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_{13}}{m_1 \|\rho'_x\| |v|}}:$$

виконуються нерівності

$$\begin{aligned} &\bar{R}_i u \leqslant \bar{R}_i v, \ \hat{R}_j u \leqslant \hat{R}_j v, \ \ (t, x) \in \partial_0 G^T, \\ &\bar{P}_i u \leqslant \bar{P}_i v, \ \hat{P}_j u \leqslant \hat{P}_j v, \quad (t, x) \in G^T, \\ &\bar{\Gamma}_i u \leqslant \bar{\Gamma}_i v, \qquad\qquad\qquad (t, x) \in \partial_1 G^T, \quad i = 1, \dots, M; \ j = 1, \dots, L. \end{aligned}$$

З Теореми 1.1 випливає, що $\bar{u}_i \leqslant \bar{v}_i, \ \hat{u}_j \leqslant \hat{v}_j, \quad (t, x) \in \bar{G}^T, \quad i = 1, \dots, M; \ j = 1, \dots, L$. Врахувавши лінійність оператора (0.1), одержуємо $|\bar{u}_i| \leqslant \bar{v}_i, |\hat{u}_j| \leqslant \hat{v}_j$. Теорему доведено.

Розглянемо задачу для $u^\varepsilon(t,x)$:

$$\begin{cases} \bar{P}_i^\varepsilon u^\varepsilon \equiv \bar{A}_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \bar{f}_i(t,x,\varepsilon), \\ \hat{P}_j^\varepsilon u^\varepsilon \equiv \hat{A}_j(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon = \hat{f}_j(t,x,\varepsilon), \quad (t,x) \in \bar{G}^T. \end{cases} \tag{4.2}$$

Виникає питання, чи виконується така умова:

$$u(t,x,\varepsilon) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, \quad (t,x) \in G^T, \tag{4.3}$$

де $u(t,x,\varepsilon)$ — розв'язок задачі (0.1)–(0.3) при $\alpha = 1, \beta = 1$, $u^0(t,x)$ — розв'язок задачі (4.2) при $\varepsilon = 0$.

**Умова D.4.** *Нехай у класі функцій $U$ існує єдиний розв'язок $u^\varepsilon$ задачі (4.2), що* $\|u_t^\varepsilon\| \leqslant m_{10}, \quad \|L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon\| \leqslant m_5, \quad i = 1,\dots,M$ *та*

$$u^\varepsilon(t,x) \to u^0(t,x), \quad \varepsilon \to 0+, \quad (t,x) \in \bar{G}^T. \tag{4.4}$$

**Зауваження.** *Якщо $\bar{A}_i, \hat{A}_j, \bar{f}_i, \hat{f}_j \in C^{1,2,1}_{t,x,\varepsilon}(G^T \times [0;\varepsilon_0])$, де $i = 1,\dots,M;\ j = 1,\dots,L$ і визначник лінійної системи (4.2) відмінний від нуля в області визначення, то виконується умова D.4.*

**Теорема 4.2.** *Нехай $u \in U$ та виконуються умови A, B(1), C.2, C.4, D.4. Тоді*

$$\begin{aligned} |u(t,x,\varepsilon) - u^0(t,x)| \leqslant \varepsilon m_{14} + m_{13}\|h - u^0\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) \\ + m_{13}\|\bar{g} - \bar{u}^0\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

*Доведення.* Функція $u(t,x,\varepsilon) - u^\varepsilon(t,x)$ задовольняє таку задачу:

$$\begin{cases} \bar{P}_i[u - u^\varepsilon] = -\varepsilon\dfrac{\partial \bar{u}_i^\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon^2 L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon,\ \hat{P}_j[u-u^\varepsilon] = -\varepsilon\dfrac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial t}, & (t,x) \in G^T, \\ \bar{R}_i[u-u^\varepsilon] = \bar{h}_i - u^\varepsilon,\ \hat{R}_j[u-u^\varepsilon] = \hat{h}_j - u^\varepsilon, & (t,x) \in \partial_0 G^T, \\ \bar{\Gamma}_i[u-u^\varepsilon] = \bar{g}_i(t,x,\varepsilon) - \bar{u}_i^\varepsilon(t,x), & (t,x) \in \partial_1 G^T. \end{cases}$$

З теореми 3.1:

$$\begin{aligned} &|u - u^\varepsilon| \leqslant m_{13}(\varepsilon\|u_t^\varepsilon\| + \varepsilon^2\|L_i(t,x,\varepsilon)u^\varepsilon\| + \|h - u^\varepsilon\|_0 \exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) + \\ &+ \|\bar{g} - \bar{u}^\varepsilon\|_1 \exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D))) \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon m_{13}m_{10} + \varepsilon^2 m_{13}m_5 + m_{13}(\|u^0 - h\|_0 + \|u^0 - u^\varepsilon\|_0)\exp(-\delta\frac{t}{\varepsilon}) + \\ &+ m_{13}(\|\bar{g} - \bar{u}^0\|_1 + \|\bar{u}^0 - \bar{u}^\varepsilon\|_1)\exp(-\frac{\Delta}{\varepsilon}\rho\,(x,\partial D)) \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Отже, одержано позитивну відповідь на питання (4.3).

Автор висловлює подяку В. М. Цимбалу за постійну увагу до роботи, а також Ю. Д. Головатому за корисні поради під час підготовки праці до друку.


1. Тихонов А.Н. *Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных* // Матем. сб.— 1952.— Т.31(73), N3.— С.575–586.
2. Ramanujam N., Srivastava U.N. *On the asymptotic behaviour of solutions of parabolic systems with a small parameter* // Bollettino U. M. I. — 1981. — Vol. 5, N 18–B. — P.557–574.
3. Борисов В.Г. *О параболических краевых задачах с малым параметром при производных по t* // Матем. сб.— 1986.— Т.131, N3.— С.293–308.
4. Глесстон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. — М.: Изд-во ин. лит., 1954.
5. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.— 376с.
6. Масленникова В.Н. *Первая краевая задача для некоторых квазилинейных систем математической теории диффузии* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики.– 1963.— Т.3, N3.— С.467–477.
7. Давлятов А. *О первой краевой задаче для системы уравнений типа Ходжкина–Хаксли* // Докл. АН УзССР.— 1988.— Т.9.— С.6–9.
8. Walter W. Differential and integral inequalities. — Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.— 720с.
10. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.:Наука, 1973.— 576с.


*Стаття надійшла до редколегії 02.06.96*

УДК 517.95

# АПРІОРНА ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКУ ТА ТЕОРЕМА ТИПУ ФРАГМЕНА–ЛІНДЕЛЬОФА ДЛЯ ДЕЯКИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ У НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

М. М. Бокало

**M. M. Bokalo. A priori estimation for a solution and a Fragman-Lindelef type theorem for some quasilinear parabolic systems in unbounded domains.** The Fourier problem is studied for some quasilinear parabolic systems of the second order in unbounded (respect to space variables) domains. A priori local and global type estimations of week solutions are obtained. In particular, the Fragman-Lindelef type theorem follows from these estimations.

**Вступ.** Ми розглянемо задачу Фур'є для квазілінійних параболічних систем у необмежених за просторовими змінними областях. Визначимо умови, за яких існує "локальна" оцінка узагальненого розв'язку цієї задачі, точніше, певна інтегральна норма узагальненого розв'язку в довільній підобласті оцінюється через відповідну інтегральну норму значень правих частин в дещо ширшій підобласті (див. також [1,2]). Для цього використано методику праці [1]. З "локальної" оцінки за додаткових умов отримано глобальну оцінку узагальненого розв'язку, а з неї — теорему типу Фрагмена–Ліндельофа. Зазначимо, що тут, на відміну від багатьох інших праць, де розглядали аналогічні питання (див.,наприклад,[3–5]), не накладаються ніякі обмеження на поведінку розв'язку при $|x| \to \infty, t \to -\infty$.

**1.Фоормулювання задачі і визначення результатів.** Нехай $Q = \Omega\times(-\infty,T)$, де $\Omega$ — необмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з кусково–гладкою межею $\partial\Omega$ (зокрема $\Omega = \mathbb{R}^n_x$), $T < +\infty$. Позначимо $\Sigma = \partial\Omega\times(-\infty,T)$.

Розглянемо задачу

$$u_{it} - \sum_{j=1}^{n} D_j a_{ij}(x,t,\delta u) + a_{i0}(x,t,\delta u) = f_{i0}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} D_j f_{ij}(x,t) \quad \text{в } Q,\ i=\overline{1,N}, \tag{1}$$

$$u_i = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma\,, \quad i=\overline{1,N}, \tag{2}$$

де $N \geqslant 1$ — ціле число; $u = \mathrm{colon}(u_1,u_2,...,u_N)$; $D_j v = \partial v/\partial x_j$; $j=\overline{1,n}$, $D_0 v = v$;

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35K50; Secondary 35K60.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження", грант N APU 061007

$\delta u = (D_j u_i)$ — матриця з елементами $D_j u_i$, де $i$ — номер рядка, $j$ — номер стовпчика, $i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$.

Припустимо, що

**(A)** функції $a_{ij}(x,t,\xi)$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n})$ визначені для точок $(x,t) \in Q$ та матриць $\xi = (\xi_{kl})$ з елементами $\xi_{kl} \in \mathbb{R}^1$, де $k$ — номер рядка, $l$ — номер стовпчика, $k = \overline{1,N}$, $l = \overline{0,n}$, і є каратеодорівськими, тобто вимірними за $(x,t)$ для всіх $\xi$ і неперервними за $\xi$ для майже всіх $(x,t)$; $a_{ij}(x,t,0) = 0$, $i = \overline{1,N}, j = \overline{0,n}$;

**(B)** існують числа $p_0, p_1$ такі, що $p_0 > 2, p_1 > 1, p_0 > p_1$ і для майже всіх $(x,t) \in Q$ та довільних $\xi$

**1)** $\quad |a_{ij}(x,t,\xi)| \leqslant A_{ij}(\sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{l=1}^{n}|\xi_{kl}|^{p_1-1} + \sum\limits_{k=1}^{N}|\xi_{k0}|^{p_0(p_1-1)/p_1})$,

де $A_{ij} = \mathrm{const} > 0, \quad i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,n}$;

**2)** $\quad |a_{i0}(x,t,\xi)| \leqslant b_{i1}(x,t)\sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{l=1}^{n}|\xi_{kl}|^{p_1(p_0-1)/p_0} + b_{i2}(x,t)\sum\limits_{k=1}^{N}|\xi_{k0}|^{p_0-1} + b_{i3}(x,t)$,

де $b_{i1}, b_{i2} \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad b_{i3} \in L^{p_0'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \qquad 1/p_0 + 1/p_0' = 1$;

$$\mathbf{3)} \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}(x,t,\xi)\xi_{ij} \geqslant K_1\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}|\xi_{ij}|^{p_1} + K_2\sum_{i=1}^{N}|\xi_{i0}|^{q} + K_3\sum_{i=1}^{N}|\xi_{i0}|^{p_0} - b(x,t),$$

де $q = \min\{2, p_1\}$, $K_1$, $K_3 = \mathrm{const} > 0$, $K_2 = \mathrm{const} \geqslant 0$, $b(x,t) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $b(x,t) \geqslant 0$;

**(C)** $f_{i0}(x,t) \in L^{p_0'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad f_{ij}(x,t) \in L^{p_1'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n}$.

Під $L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $q \geqslant 1$, розуміємо простір визначених і вимірних на $Q$ функцій, звуження яких на довільну обмежену вимірну множину $Q' \subset Q$ належать простору $L^q(Q')$. Через $W^{1,0}_{p_1,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ позначимо простір функцій $v(x,t)$ з $L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ , які мають узагальнені похідні $v_{x_1}, ..., v_{x_n}$ з $L^{p_1}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ , а через $\overset{o}{W}{}^{1,0}_{p_1,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ – підпростір функцій з простору $W^{1,0}_{p_1,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, слід яких дорівнює нулю на $\Sigma$ .

**Зауваження 1.** *Частковим випадком системи (1), яка справджує умови (A),(B), є напівлінійне рівняння*

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x,t)\,D_i u + a_i(x,t)u) + \sum_{i=0}^{n} b_i(x,t)\,D_i u + c(x,t,u) = f_0(x,t) + \sum_{j=1}^{n} D_j f_j(x,t),$$

*де стосовно коефіцієнтів рівняння припускається таке:*

$$\lambda_0\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_1\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$$

*для довільних* $(\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ *і майже всіх* $(x,t) \in Q$, $\lambda_0, \lambda_1 = \mathrm{const} > 0$; $|a_i(x,t)| \leqslant K$, $|b_i(x,t)| \leqslant M$, $i = \overline{1,n}$, $b_0(x,t) \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $b_0(x,t) > (Kn + M)(K + M)n/(2\lambda_0)$,

$K, M = \text{const} > 0$; *для довільних* $s \in \mathbb{R}^1$ *і майже всіх* $(x,t) \in Q$ *виконується нерівність*

$$c(x,t,s)\, s \geqslant c_0|s|^{p_0},$$

*де* $c_0 = \text{const} > 0, p_0 > 2$ *(наприклад,* $c(x,t,s) = \hat{c}|s|^{p_0-2}s, \hat{c} = \text{const} > 0$*).*

*Другим прикладом системи (1), яка справджує умови (A),(B), є система*

$$u_{it} - D_i(a_i(x,t)|D_iu_i|^{p_1-2}D_iu_i) + b_i(x,t)|u_i|^{p_0-2}u_i + c_i(x,t,u) =$$
$$= f_{i0}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} D_j f_{ij}(x,t), \quad i = \overline{1,N},$$

*де* $p_0 > 2, p_1 > 1, p_0 > p_1$; $a_i \in L^\infty(Q)$, $a_i(x,t) \geqslant a_0 = \text{const} > 0$, $b_i \in L^\infty_{\text{loc}}(Q)$, $b_i(x,t) \geqslant b_0 = \text{const} > 0, i = \overline{1,N}$; $c_i(x,t,s)$ — *вимірні за* $(x,t)$ *для всіх* $s \in \mathbb{R}^N$ *і диференційовні за* $s$ *для майже всіх* $(x,t)$, *причому* $\partial c_i(x,t,s)/\partial s_j \in L^\infty(Q)$, $\partial c_i(x,t,s)/\partial s_i \geqslant c_0$, *де* $c_0 >> 1$ $(i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,N})$.

**Означення 1.** *Узагальненим розв'язком задачі (1),(2) назвемо вектор-функцію* $u(x,t) = \text{colon}(u_1(x,t),...,u_N(x,t))$, *компоненти якої* $u_i(x,t)$ *належать простору* $\overset{o}{W}{}^{1,0}_{p_1,\text{loc}}(\overline{Q}) \cap L^p_{\text{loc}}(\overline{Q})$ *і справджують інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_Q \sum_{i=1}^{N}\{-u_i\psi_{it} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,\delta u)D_j\psi_i + a_{i0}(x,t,\delta u)\psi_i\}\, dxdt =$$
$$= \iint\limits_Q \sum_{i=1}^{N}\{f_{i0}\psi_i - \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\, D_j\psi_i\}\, dxdt \tag{3}$$

*для довільних* $\psi_i \in C_0^\infty(Q), i = \overline{1,N}$.

**Зауваження 2.** *У тотожності (3) пробні функції* $\psi_i, i = \overline{1,N}$, *можна брати з простору* $W = \{\psi(x,t) : \psi \in L^{p_0}(Q) \bigcap L^{p_1}(Q), D_j\psi \in L^{p_1}(Q), \supset= \overline{1,n}, \psi_t \in L^2(Q), \psi = 0$ *на* $\partial Q$ *і поза деякою (що залежить від* $\psi$*) обмеженою підобластю області* $Q\}$. *Щоб переконатися в цьому, достатньо для довільних* $\psi_i \in W, i = \overline{1,N}$, *взяти послідовності* $\{\psi_i^m(x,t)\}_{m=1}^\infty$ *з простору* $C_0^\infty(Q)$, $i = \overline{1,N}$, *такі, що* $\psi_i^m \to \psi_i$ *в* $L^{p_0}(Q) \bigcap L^{p_1}(Q)$, $D_j\psi_i^m \to D_j\psi_i$ *в* $L^{p_1}(Q)$, $\psi_{it}^m \to \psi_{it}$ *у* $L^2(Q)$, $i = \overline{1,N}$, *підставити* $\psi_i^m$ *замість* $\psi_i$ $(i = \overline{1,N})$ *у (3) і перейти до границі при* $m \to \infty$. *Граничний перехід забезпечується умовами (A)–(C).*

**Зауваження 3.** *З означення 1 та зауваження 2 випливає, що похідна* $u_t$ *узагальненого розв'язку* $u$ *задачі (1),(2) в сенсі простору узагальнених функцій* $D(-\infty,T; (W^{-1}_{p_1',\text{loc}}(\overline{\Omega}) + L^{p_0'}_{\text{loc}}(\overline{\Omega}))^N)$ *належить простору* $(L^{p_1'}_{\text{loc}}((-\infty,T]; W^{-1}_{p_1',\text{loc}}(\overline{\Omega}))^N + (L^{p_0'}_{\text{loc}}(\overline{Q}))^N$. *Тут* $W^{-1}_{p_1',\text{loc}}(\overline{\Omega})$ — *простір узагальнених функцій на* $\Omega$, *звуження яких на довільну обмежену підобласть* $\Omega'$ *області* $\Omega$ *належить простору* $W^{-1}_{p_1'}(\Omega')$, *спряженому до* $\overset{o}{W}{}^1_{p_1}(\Omega')$. *Звідси (див., наприклад, [6]) випливає, що* $u \in C((-\infty,T]; (L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega}))^N)$.

*Під* $C((-\infty,T]; (L^2_{\text{loc}}(\overline{\Omega}))^N)$ *розуміємо простір вимірних на* $Q$ *функцій, звуження яких на множину* $\Omega' \times (-\infty,T)$, *де* $\Omega'$ — *довільна обмежена підобласть області* $\Omega$, *належить простору* $C((-\infty,T]; (L^2(\Omega'))^N)$.

Сформулюємо основні результати. Спочатку введемо деякі позначення. Будемо вважати, що точка $x = 0$ належить $\Omega$. Нехай для довільного числа $R > 0$ $\Omega_R$ — зв'язна компонента множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$, якій належить точка $x = 0$. Тоді, очевидно, $\Omega_R \subset \Omega_{R_1}$ для довільних $R < R_1$. Позначимо $Q_{R,t_0} = \Omega_R \times (t_0 - R, t_0)$, де $t_0$ — довільне число. Під $|\eta|$, де $\eta \in \mathbb{R}^k$, розуміємо норму вектора $\eta$, тобто $|\eta| = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \eta_i^2\right)^{1/2}$. Нехай $\nabla u = (D_j u_i)$ — матриця з елементами $D_j u_i$, де $i$ — номер рядка, $j$ — номер стовпчика, $i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n}$, $|\nabla u|^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{n} |D_j u_i|^2$.

Сформулюємо "локальну" апріорну оцінку узагальненого розв'язку задачі (1),(2).

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови (A)-(C) і $u(x,t)$ — узагальнений розв'язок задачі (1),(2). Тоді для довільних чисел $t_0, R_0, R$ таких, що $t_0 \leqslant T$, $0 < R_0 < R$, у випадку, коли $K_2 = 0$, справедлива оцінка*

$$\sup_{[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0,t_0}} (|\nabla u|^{p_1} + |u|^{p_0})\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{s+r} [B_1 R^{n+1-p_0/(p_0-2)} + B_2 R^{n+1-p_0p_1/(p_0-p_1)} +$$

$$+B_3 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^{N} \{|f_{i0}|^{p_0'} + \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'}\}\,dxdt + B_4 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} b\,dxdt], \tag{4}$$

*де $s, r$ — довільні числа такі, що $s > p_0p_1/(p_0 - p_1)$, $r > p_0/(p_0 - 2)$; $B_1, B_2, B_3, B_4$ — додатні сталі, які залежать тільки від $n$, $N$, $p_0$, $p_1$, $s$, $r$, $K_i$ $(i = 1,2,3)$, $A_{ij}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$, а у випадку, коли $K_2 > 0$, — оцінка*

$$\sup_{[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} |u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0,t_0}} (|\nabla u|^{p_1} + |u|^{p_0})\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\mu} [B_5 R^{-\beta} + B_6 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^{N} \{|f_{i0}|^{p_0'} + \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'}\}\,dxdt + B_7 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} b\,dxdt], \tag{5}$$

*де $\beta > 0$ — стала, яка залежить тільки від $p_0, p_1$; $\mu > 2(n+1+\beta)$ — довільне число; $B_5, B_6, B_7$ — додатні сталі, які залежать тільки від $n$, $N$, $p_0$, $p_1$, $\mu$, $K_i$ $(i = 1,2,3)$, $A_{ij}$ $(i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$.*

З теореми 1 за додаткових умов випливає така глобальна оцінка узагальненого розв'язку задачі (1),(2).

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми 1 і, крім того, якщо $K_2 = 0$ в умові (B), то $p_0 < 2(n+1)/n$ і $p_1 > (n+1)p_0/(n+1+p_0)$. Тоді, якщо $f_{i0}(x,t) \in L^{p_0{}'}(\overline{Q})$, $f_{ij}(x,t) \in L^{p_1{}'}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n}, b(x,t) \in L^1(Q)$, то узагальнений розв'язок $u$ задачі (1),(2) належить простору $(\overset{o}{W}{}^{1,0}_{p_1}(Q) \cap L^{p_0}(Q))^N$, і справджує оцінку*

$$\sup_{(-\infty,T]} \int_{\Omega} |u(x,t)|^2 \, dx + \iint_{Q} (|\nabla u|^{p_1} + |u|^{p_0}) \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant B_8 \iint_{Q} \sum_{i=1}^{N} \{|f_{i0}|^{p_0{}'} + \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1{}'}\} \, dxdt + B_9 \iint_{Q} b \, dxdt, \qquad (5')$$

*де $B_8, B_9$ — додатні сталі, які залежать тільки від $n, N, p_0, p_1, K_i (i = 1,2,3)$, $A_{ij} (i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n})$.*

Як наслідок оцінки $(5')$ отримаємо таку теорему типу Фрагмена–Ліндельофа.

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді, якщо $f_{ij}(x,t) = 0$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n}$, $b(x,t) = 0$, то $u_i = 0$, $i = \overline{1,N}$.*

**2. Доведення основних результатів.**

*Доведення теореми 1.* Спочатку нагадаємо означення і деякі потрібні нам властивості усереднень за Стєкловим [7]. Нехай $v(t) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$. Визначимо для кожного $h > 0$

$$v_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} v(\theta) \, d\theta, \qquad v_{\overline{h}}(t) = \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} v(\theta) \, d\theta.$$

Функції $v_h(t), v_{\overline{h}}(t)$ називаються усередненнями функції $v(t)$ за Стєкловим. Якщо $v(t) \in L^1(a,b)$, то усереднення $v_h(t), v_{\overline{h}}(t)$ будують за тими ж самими правилами, попередньо продовживши $v(t)$ поза $(a,b)$ нулем. Легко перевірити (замінивши порядок інтегрування) справедливість рівностей

$$\int_{a-h}^{b} v(t)\varphi_{\overline{h}}(t) \, dt = \int_{a}^{b} v_h(t)\varphi(t) \, dt, \quad \int_{a-h}^{b} v(t)\varphi_{\overline{h}t}(t) \, dt = -\int_{a}^{b} v_{ht}(t)\varphi(t) \, dt$$

для довільних $v(t), \varphi(t) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$, якщо $\varphi = 0$ поза $[a,b]$. Крім того, $v_h \to v$ в $L^q(a,b)$ при $h \to 0$, де $q \geqslant 1, -\infty < a < b < +\infty, v \in L^q(a,b)$.

Нехай $R > 0, t_0 \leqslant T$ — довільні числа . Визначимо функції $\zeta(x)$ і $\chi(t)$ таким чином: $\zeta(x) = \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2)$, якщо $|x| \leqslant R$, і $\zeta(x) = 0$, якщо $|x| > R$ ; $\chi(t) = R - |t - t_0|$, якщо $t \in [t_0 - R, t_0]$ і $\chi = 0$, якщо $t \notin [t_0 - R, t_0]$. Візьмемо довільні числа $\tau \in (t_0 - R, t_0), \delta \in (0, \tau - t_0 + R)$ і введемо функцію $\eta_\delta(t,\tau)$ таку, що $\eta_\delta(t,\tau) = 1$, якщо $t \in (-\infty, \tau - \delta]$, $\eta_\delta(t,\tau) = -(t-\tau)/\delta$, якщо $t \in [\tau - \delta, \tau]$, $\eta_\delta(t,\tau) = 0$, якщо $t \in [\tau, +\infty)$.

Підставимо в інтегральну тотожність (3) (див. зауваження 1) $\psi_i = (u_{ih}\zeta^s\chi^r\eta_\delta)_{\overline{h}}$, де $s > 0, r > 0$ — довільні додатні числа, $h < T - \tau$. У результаті, позначивши $Q^\tau = \Omega_R \times (t_0 - R, \tau)$, отримаємо

$$\iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} u_{iht}u_{ih}\zeta^s\chi^r\eta_\delta\,dxdt + \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N}\{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(x,t,\delta u))_h(D_j u_{ih})\zeta^s +$$

$$+s\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(x,t,\delta u))_h u_{ih}\zeta^{s-1}(D_j\zeta) + (a_{i0}(x,t,\delta u))_h u_{ih}\zeta^s\}\chi^r\eta_\delta\,dxdt =$$

$$= \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N}\{(f_{i0})_h u_{ih}\zeta^s\chi^r - \sum_{j=1}^{n}(f_{ij})_h D_j(u_{ih}\zeta^s)\chi^r\}\eta_\delta\,dxdt. \quad (6)$$

Перетворимо перший член лівої частини (6) у такий спосіб:

$$\iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} u_{iht}u_{ih}\zeta^s\chi^r\eta_\delta\,dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega_R}\sum_{i=1}^{N}(u_{ih}^2)_t\zeta^s\chi^r\eta_\delta\,dxdt =$$

$$= \frac{1}{2\delta}\int\limits_{\tau-\delta}^{\tau}\int\limits_{\Omega_R}|u_h|^2\zeta^s\chi^r\,dxdt - \frac{r}{2}\iint\limits_{Q^\tau}|u_h|^2\zeta^s\chi^{r-1}\chi'\eta_\delta\,dxdt. \quad (7)$$

Підставивши (7) у (6), перейдемо до границі спочатку при $h \to 0$, а потім при $\delta \to 0$. Це дає

$$\frac{\chi^r(\tau)}{2}\int\limits_{\Omega_R}|u(x,\tau)|^2\,\zeta^s\,dx + \iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^{N}\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t,\delta u)\;D_j u_i + a_{i0}(x,t,\delta u)\;u\}\zeta^s\chi^r\,dxdt =$$

$$= \frac{r}{2}\iint\limits_{Q^\tau}|u|^2\zeta^s\chi^{r-1}\chi'\,dxdt - s\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t,\delta u)u_i\zeta^{s-1}(D_j\zeta)\chi^r\,dxdt +$$

$$+ \iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^{N}\{f_{i0}\;u_i\zeta^s - \sum_{j=1}^{n}f_{ij}\;D_j(u_i\zeta^s)\}\chi^r\,dxdt. \quad (8)$$

Використовуючи умову (B) та оцінки $|D_j\zeta| \leqslant 2, j = \overline{1,n}$, $|\chi'| \leqslant 1$, з (8) знаходимо

$$\frac{\chi^r(\tau)}{2}\int\limits_{\Omega_R}|u(x,\tau)|^2\,\zeta^s\,dx + \iint\limits_{Q^\tau}\{K_1^*|\nabla u|^{p_1} + K_2^*|u|^q + K_3^*|u|^{p_0}\}\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{2}\iint\limits_{Q^\tau}|u|^2\zeta^s\chi^{r-1}\,dxdt+2s\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^n A_{ij}\left(\sum_{k=1}^N\sum_{l=1}^n|D_lu_k|^{p_1-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^N|u_k|^{p_0(p_1-1)/p_1}\right)|u_i|\zeta^{s-1}\chi^r\,dxdt+\iint\limits_{Q^\tau}b\zeta^s\chi^r\,dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^N\{|f_{i0}|\,|u_i|\zeta^s\chi^r+2s\sum_{j=1}^n|f_{ij}||u_i|\zeta^{s-1}\chi^r+\sum_{j=1}^n|f_{ij}||D_ju_i|\zeta^s\chi^r\}\,dxdt. \qquad (9)$$

Тут ми використали нерівність

$$\sum_{i=1}^N a_i^p\geqslant N^{-p/2}\left(\sum_{i=1}^N a_i^2\right)^{p/2},\quad p\geqslant 1,$$

і позначили $K_1^*=K_1(nN)^{-p_1/2}, K_2^*=K_2N^{-q/2}, K_3^*=K_3N^{-p_0/2}$.

Зауважимо, що

$$K_2^*|u|^q+2^{-1}K_3^*|u|^{p_0}\geqslant K_2^{**}(|u|^{q_1}+|u|^{q_2}+|u|^{q_3}), \qquad (10)$$

де $q_1,q_2,q_3$ — довільні числа з відрізка $[q;p_0]$, $K_2^{**}=\frac{1}{3}\min\{K_2^*,K_3^*/2\}>0$, якщо $K_2>0$, і $q_1=q_2=q_3=p_0$, $K_2^{**}=K_3^*/6>0$, якщо $K_2=0$.

На підставі (9) і (10) маємо

$$\frac{\chi^r(\tau)}{2}\int\limits_{\Omega_R}|u(x,\tau)|^2|\zeta^s\,dx+\iint\limits_{Q^\tau}\{K_1^*|\nabla u|^{p_1}+\ K_2^{**}(|u|^{q_1}+|u|^{q_2}+|u|^{q_3})+\frac{1}{2}K_3^*|u|^{p_0})\}\zeta^s\chi^r dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{r}{2}\iint\limits_{Q^\tau}|u|^2\zeta^s\chi^{r-1}\,dxdt+2sA_1\iint\limits_{Q^\tau}|\nabla u|^{p_1-1}|u|\zeta^{s-1}\chi^r\,dxdt+$$

$$+2sA_2\iint\limits_{Q^\tau}|u|^{p_0(p_1-1)/p_1+1}\zeta^{s-1}\chi^r\,dxdt+\iint\limits_{Q^\tau}b\zeta^s\chi^r\,dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q^\tau}\sum_{i=1}^N\{|f_{i0}|\,|u_i|\zeta^s\chi^r+2s\sum_{j=1}^n|f_{ij}||u_i|\zeta^{s-1}\chi^r+\sum_{j=1}^n|f_{ij}||D_ju_i|\zeta^s\chi^r\}\,dxdt, \qquad (11)$$

де $\quad A_1=nN\sum\limits_{i=1}^N\sum\limits_{j=1}^n A_{ij},\quad A_2=N\sum\limits_{i=1}^N\sum\limits_{j=1}^n A_{ij}.$

Оцінимо зверху члени правої частини нерівності (11), використовуючи нерівність Юнга

$$ab\leqslant\varepsilon a^\gamma+M(\varepsilon,\gamma)b^{\gamma'},$$

де $\varepsilon > 0$, $\gamma > 1$, $1/\gamma + 1/\gamma' = 1$, $M(\varepsilon, \gamma) = \dfrac{(\gamma - 1)}{\gamma}(\gamma\varepsilon)^{1/(1-\gamma)}$.

Взявши $q_1 \in (2, p_0]$, $\gamma = q_1/2$, $a = |u|^2\zeta^{2s/q_1}\chi^{2r/q_1}$, $b = \zeta^{s(q_1-2)/q_1}\chi^{r(q_1-2)/q_1-1}$, з нерівності Юнга маємо

$$\iint\limits_{Q_{R,t_0}} |u|^2\zeta^s\chi^{r-1}\,dxdt \leqslant \varepsilon_1 \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{q_1}\zeta^s\chi^r\,dxdt + M(\varepsilon_1, q_1/2)\iint\limits_{Q^\tau} \zeta^s\chi^{r-q_1/(q_1-2)}\,dxdt, \tag{12}$$

де $\varepsilon_1 > 0$ — довільне число.

Оскільки $p_0(p_1-1)/p_1 + 1 < p_0$, то для довільного числа $q_2 \in (p_0(p_1-1)/p_1+1, p_0]$ існує число $\nu = \nu(q_2) > 1$ таке, що $(p_0(p_1-1)/p_1+1)\nu = q_2$. Легко знайти, що $\nu = p_1q_2/(p_0p_1 - (p_0 - p_1))$, причому $\nu' = p_1q_2/(p_0 - p_1(1+p_0-q_2))$ $(1/\nu + 1/\nu' = 1)$. Взявши $\gamma = \nu$, $a = |u|^{p_0(p_1-1)/p_1+1}\zeta^{s/\nu}\chi^{r/\nu}$, $b = \zeta^{s/\nu'-1}\chi^{r/\nu'}$, з нерівності Юнга отримаємо

$$\iint\limits_{Q^\tau} |u|^{p_0(p_1-1)/p_1+1}\zeta^{s-1}\chi^r\,dxdt \leqslant \varepsilon_2 \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{q_2}\zeta^s\chi^r\,dxdt +$$

$$+ M(\varepsilon_2, \nu)\iint\limits_{Q^\tau} \zeta^{s-p_1q_2/(p_0-p_1(1+p_0-q_2))}\chi^r\,dxdt. \tag{13}$$

На підставі нерівностей Гельдера, Юнга і нерівності

$$\Big(\sum_{i=1}^N a_i^p\Big)^{1/p} \leqslant N^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^N a_i^2\Big)^{1/2}, \quad p \geqslant 1, \quad a_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, N},$$

маємо

$$\iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^N |f_{i0}|\,|u_i|\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant \iint\limits_{Q^\tau} \left(\sum_{i=1}^N |f_{i0}|^{p_0'}\right)^{\frac{1}{p_0'}} \left(\sum_{i=1}^N |u_i|^{p_0}\right)^{\frac{1}{p_0}} \zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_3 \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^N |u_i|^{p_0}\zeta^s\chi^r\,dxdt + M(\varepsilon_3, p_0)\iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^N |f_{i0}|^{p_0'}\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_3 N \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{p_0}\zeta^s\chi^r\,dxdt + M(\varepsilon_3, p_0)\iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^N |f_{i0}|^{p_0'}\zeta^s\chi^r\,dxdt. \tag{14}$$

Аналогічно

$$\iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |f_{ij}||D_ju_i|\zeta^s\chi^r\,dxdt \leqslant \varepsilon_4 nN \iint\limits_{Q^\tau} |\nabla u|^{p_1}\zeta^s\chi^r\,dxdt +$$

$$+M(\varepsilon_4, p_1) \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'} \zeta^s \chi^r \, dxdt, \tag{15}$$

$$\iint\limits_{Q^\tau} |\nabla u|^{p_1-1} |u| \zeta^{s-1} \chi^r \, dxdt \leqslant \varepsilon_5 \iint\limits_{Q^\tau} |\nabla u|^{p_1} \zeta^s \chi^r \, dxdt + M(\varepsilon_5, p_1') \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{p_1} \zeta^{s-p_1} \chi^r \, dxdt, \tag{16}$$

$$\iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}||u_i| \zeta^{s-1} \chi^r \, dxdt \leqslant \varepsilon_6 nN \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{p_1} \zeta^{s-p_1} \chi^r \, dxdt +$$

$$+M(\varepsilon_6, p_1) \iint\limits_{Q^\tau} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'} \zeta^s \chi^r \, dxdt. \tag{17}$$

З нерівності Юнга, взявши $q_3 \in (p_1, p_0], \gamma = q_3/p_1, a = |u|^{p_1} \zeta^{sp_1/q_3} \chi^{rp_1/q_3}$, $b = \zeta^{s(q_3-p_1)/q_3 - p_1} \chi^{r(q_3-p_1)/q_3}$, матимемо

$$\iint\limits_{Q^\tau} |u|^{p_1} \zeta^{s-p_1} \chi^r \, dxdt \leqslant \varepsilon_7 \iint\limits_{Q^\tau} |u|^{q_3} \zeta^s \chi^r \, dxdt + M(\varepsilon_7, q_3/p_1) \iint\limits_{Q^\tau} \zeta^{s - p_1 q_3/(q_3-p_1)} \chi^r \, dxdt, \tag{18}$$

де $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7 > 0$ — довільні числа.

Вибравши $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7$ досить малими, з (11)–(18) отримаємо

$$\chi^r(\tau) \int\limits_{\Omega_R} |u(x,\tau)|^2 \zeta^s \, dx + \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \{|\nabla u|^{p_1} + |u|^{p_0}\} \zeta^s \chi^r \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \zeta^s \chi^{r - q_1/(q_1-2)} \, dxdt + C_2 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \zeta^{s - p_1 q_2/(p_0 - p_1(1+p_0-q_2))} \chi^r \, dxdt +$$

$$+C_3 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \zeta^{s - p_1 q_3/(q_3-p_1)} \chi^r \, dxdt +$$

$$+C_4 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} \sum_{i=1}^{N} \{|f_{i0}|^{p_0'} + \sum_{j=1}^{n} |f_{ij}|^{p_1'}\} \zeta^s \chi^r \, dxdt + C_5 \iint\limits_{Q_{R,t_0}} b \zeta^s \chi^r \, dxdt. \tag{19}$$

Нехай $R_0$ — довільне число з проміжку $(0, R)$. Очевидно, що $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant R$, $0 \leqslant \chi(t) \leqslant R$, причому $R - R_0 \leqslant \zeta(x)$, коли $|x| \leqslant R_0$, $R - R_0 \leqslant \chi(t)$, коли $t \in [t_0 - R_0, t_0]$. У випадку, коли $K_2 = 0$ (тоді $q_1 = q_2 = q_3 = p_0$), з (19) вибираючи $s > p_0 p_1 (p_0 - p_1), r > p_0/(p_0 - 2)$, $\tau \in [t_0 - R_0, t_0]$, отримуємо (4), а у випадку $K_2 > 0$, вибираючи $q_1, q_2, q_3$ такими, що $p_1 q_3 (q_3 - p_1) = p_1 q_2/(p_0 - p_1(1 + p_0 - q_2)) = q_1/(q_1 - 2) = \alpha > n + 1$ ( тоді $\beta = \alpha - (n+1)$), отримаємо (5).

Теорему 1 доведено.

*Доведення теореми 2.* За даних умов в оцінках (4) і (5) можна перейти до границі спочатку при $R \to +\infty$, а потім при $R_0 \to +\infty$. У результаті отримуємо оцінку $(5')$. Теорему 2 доведено.

*Доведення теореми 3.* Прийнявши в $(5')$ $f_{ij} = 0, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, n}$, $b = 0$, отримаємо $u_i = 0$, $i = \overline{1, N}$, що й треба було довести.


1. Bernis F. *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity* // Arch. Ration Mech. and Anal.— 1989.— Vol.106, No.3.— P.217–241.

2. Бокало Н.М. *Об однозначной разрешимости задачи без начальных условий для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности* // Сиб. мат. журн.— 1993.— Т.34, N 4.— С.33–40.

3. Олейник О.А., Радкевич Е.В. *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделёфа для общих параболических систем дифференциальных уравнений* // Функциональный анализ и его прилож. —1974.— Т.8,вып.4.— С.59–70.

4. Ивасишен С.Д. *О параболических граничных задачах без начальных условий* // Укр. мат. журн. —1986.— Т. 34, N5.— С.547–552.

5. Шишков А.Е. *О существовании растущих на бесконечности обобщенных решений краевых задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений* // Укр. мат. журн.—1985.—Т.37, N4.— С.473–481.

6. Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 608 с.

7. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 408 с.


*Стаття надійшла до редколегії 04.07.96*

УДК 539.3 : 538.54

# ТЕМПЕРАТУРНІ ПОЛЯ І НАПРУЖЕННЯ В МАГНІТОМ'ЯКИХ ТІЛАХ ПІД ЧАС НАСКРІЗНОГО ІНДУКЦІЙНОГО НАГРІВУ

О. Р. Гачкевич, О. М. Дзюбачик, М. Т. Солодяк

**A. R. Gachkevich, O. M. Dziubachyk, M. T. Solodyak. Temperature fields and stresses in magnetically soft solids by throughout induction heating.** The calculation model of determination of electromagnetic, temperature, and mechanical fields in magnetically soft solids subjected to external harmonic magnetic field of industrial frequency is proposed. The solution of nonlinear problem we search in the form of power series of parametr, inverted to the depth of electromagnetic field penetration. The analysis of numerical investigations for technically pure iron is realized.

Проблема побудови раціональних режимів термообробки виробів за допомогою електромагнітних полів пов'язана з розробкою математичних моделей опису взаємопов'язаних електромагнітних, теплових і механічних процесів в тілах з різними фізичними властивостями матеріалу [1]. У цьому випадку для електропровідних неферомагнітних тіл (лінійних середовищ) в усталених полях радіочастотного діапазону одержують некласичні задачі математичної фізики, які потребують спеціальної процедури побудови розв'язків для конкретних тіл [2,3].

Ми запропонували розрахункову модель для визначення електромагнітного, температурного і механічних полів у магнітом'яких феромагнітних тілах (нелінійних середовищах), які містяться в зовнішньому періодичному за часом електромагнітному полі промислової частоти, заданому на поверхні $(S)$ тіла значенням напруженості магнітного поля

$$\vec{H}^{(0)}(\vec{r_0};t) = \vec{H}_0 \cos\omega t, \tag{1}$$

де $\vec{r_0}$ – радіус–вектор точки поверхні, яку розглядаємо; $\omega$ — кругова частота, $t$ — час; $\vec{H}_0$ — амплітуда напруженості магнітного поля.

До магнітом'яких віднесемо тіла, які практично не мають гістерезисної кривої намагнічення і нелінійна залежність між індукцією і напруженістю магнітного поля зображається основною кривою намагнічення [4,5].

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35K50; Secondary 35K60.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки Міжнародного Наукового Фонду та Уряду України (Грант NUCJ 200).

Взаємозв'язок електромагнітного поля з температурним і механічним відбувається через джоулеве тепло і пондеромоторну силу, усереднених за періодом коливань електромагнітного поля. В такому наближенні розрахункова схема зводиться до послідовного розв'язування рівнянь електродинаміки феромагнітних середовищ (перший етап) і незв'язаної задачі квазістатичної термопружності при знайдених джерелах тепла і об'ємних силах, а також заданих граничних і початкових умовах (другий етап). Модель є узагальненням відомої з літератури моделі для неферомагнітних тіл [2,3].

Розглянемо феромагнітні матеріали, для яких вектор індукції $\vec{B}$ є паралельним до вектора напруженості $\vec{H}$ магнітного поля [4], тобто

$$\vec{B} = B(H)\vec{e}_H. \tag{2}$$

Тут $\vec{e_H} = \vec{H}/H$ — одиничний орт у напрямку вектора $\vec{H}$; $H$ і $B$ — проекції векторів $\vec{H}$ і $\vec{B}$ на додатний напрям вектора $\vec{H}$.

Нелінійну залежність $B(H)$, характерну для магнітом'якого матеріалу [5], апроксимуємо основною кривою намагнічування, яку вибираємо у формі Дрейфуса [6]

$$B(H) = \mu_0 H + \beta \operatorname{arctg} \alpha H, \tag{3}$$

де $\beta = \frac{2}{\pi} B_S$, $\alpha = (\mu - 1)\mu_0\beta^{-1}$, $\mu_0$ — магнітна стала, $\mu$ — початкова відносна магнітна проникність матеріалу, $B_S$ — індукція насичення.

Зауважимо, що при $\mu < 100$ і $H_0 \leqslant 10^3 A/м$ величина $\alpha H_0 < 1$. Тоді з (3) отримаємо відому лінійну залежність між $B$ і $H$ :

$$B(H) = \mu\mu_0 H,$$

яку широко використовують під час дослідження електромагнітних полів в електротехнічних пристроях [1,2,5].

З рівнянь Максвелла для визначення вектора напруженості $\vec{H}$ одержимо таку систему нелінійних рівнянь [7] :

$$\triangle\vec{H} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right) = \sigma_* \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \tag{4}$$

де $\sigma_*$ — коефіцієнт електропровідності; $\triangle$ і $\vec{\nabla}$ — оператори Лапласа і Гамільтона відповідно.

Якщо визначені напруженість $\vec{H}$ і індукція $\vec{B}$ магнітного поля, то усереднені за періодом $T_*$ коливань електромагнітної хвилі джоулеве тепло і пондеромоторна сила (що характеризують теплову і силову дії електромагнітного поля на феромагнітне тіло) відповідно будуть [8–10] такі:

$$Q = \frac{1}{\sigma_* T_*} \int_0^{T_*} dt \left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)^2, \tag{5}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{T_*}\int\limits_0^{T_*} dt \left[\left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \times \vec{B} + \left(\vec{M} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{B} + \vec{M} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)\right], \tag{6}$$

де $\vec{M} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{H}$ — вектор намагніченості.

При відомих тепловиділеннях (5) температуру $T$ тіла будемо визначати з класичного рівняння теплопровідності [11]

$$\triangle T + \frac{Q}{\lambda} - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

для початкової

$$T(\vec{r}; 0) = 0 \tag{8}$$

і граничної умови

$$\frac{\partial T}{\partial n} + LT = 0, \tag{9}$$

яка відповідає наявності конвективного теплообміну тіла із зовнішнім середовищем [12]. Тут $T$ — відхилення температури від початкової $T_0$; $\partial T/\partial n = \left(\vec{\nabla} T\right) \cdot \vec{n}$, $L$ — коефіцієнт тепловіддачі з поверхні; $\lambda$ і $a$ — коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності відповідно.

Тензор напружень $\hat{\sigma}$ визначаємо з системи рівнянь незв'язаної квазістатичної задачі термопружності [3]

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} + \vec{F} = 0,$$
$$\mathrm{Ink}\left[(1+\nu)\hat{\sigma} + (\alpha_t E T - \nu \mathrm{Sp}\,\hat{\sigma})\vec{I}\right] = 0, \tag{10}$$

де $\mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}$ — слід тензора напружень, $\hat{I}$ — одиничний тензор, Ink — оператор несумісності [13], $\alpha_t$ — лінійний коефіцієнт температурного розширення, $E$ — модуль пружності, $\nu$ — коефіцієнт Пуассона.

Перейдемо до безрозмірних величин

$$\tau = \omega t, \qquad \vec{\nabla}_1 = l\vec{\nabla}, \qquad \triangle_1 = l^2 \triangle, \qquad h = \frac{H}{H_0}, \qquad b = \frac{B}{\mu_0 H_0}. \tag{11}$$

Тоді систему вихідних рівнянь (4) перепишемо так:

$$\triangle_1 \vec{h} - \vec{\nabla}_1 \left(\vec{\nabla}_1 \cdot \vec{h}\right) = \gamma \frac{\partial \vec{b}}{\partial \tau}, \qquad \vec{\nabla}_1 \cdot \vec{b} = 0. \tag{12}$$

У цьому випадку залежність (3) набуде вигляду

$$b(h) = h + \frac{\mu - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon} h, \tag{13}$$

де $\varepsilon = (\alpha H_0)^2$ — параметр нелінійності; $\gamma = \sigma_* \mu_0 \omega l^2$, $\delta = \sqrt{2/\gamma}$ — величина, що характеризує глибину проникання магнітного поля; $l$ — характерний розмір тіла.

Для промислової частоти $\omega = 100\pi\, \Gamma ц$ отримаємо

$$\gamma = 4\pi^2 \cdot 10^{-5}\sigma_* l^2.$$

Для металічних феромагнетиків $\sigma_* = (10^6 \div 10^7)\quad A/B \cdot м$ [14,15]. Тому при $l < (0,50 \div 0,16) \cdot 10^{-2} м$ (листові електротехнічні сталі) будемо мати

$$\gamma \leqslant 10^{-2} << 1, \quad (\delta >> 1). \tag{14}$$

Для феритів $\sigma_* = (0,2 \cdot 10^5 \div 10^8) A/B \cdot м$. Тоді умова (14) виконується при $l < (3,56 \cdot 10^{-2} \div 0,50) м$. Зауважимо, що умова (14) відповідає випадку, коли глибина проникання електромагнітного поля в тіло значно перевищує характерний розмір тіла (наскрізний індукційний нагрів). Обмежимось надалі розглядом цього випадку.

Розв'язок нелінійної задачі (1),(12)–(13) шукаємо у вигляді асимптотичного ряду за параметром $\gamma$. В першому наближенні ($\gamma = 0$) періодичний в часі розв'язок даної задачі буде [16]

$$\vec{H}(\vec{r};t) = H_0 \left[\vec{h}(\vec{r})e^{i\omega t} + \vec{h}^*(\vec{r})e^{-i\omega t}\right], \tag{15}$$

$$\vec{B}(\vec{r};t) = \mu_0 H_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left[\vec{b}_{2k+1}(\vec{r})e^{i(2k+1)\omega t} + \vec{b}^*_{2k+1}(\vec{r})e^{-i(2k+1)\omega t}\right]. \tag{16}$$

Тут і надалі зірочкою зверху позначено комплексно спряжені величини. Зауважимо, що відсутність парних гармонік індукції магнітного поля пов'язана з непарністю функції $B(H)$.

Підставляючи зображення (15)–(16) у співвідношення (1)–(4), одержимо таке рівняння для функції $\vec{h}(\vec{r})$ :

$$\triangle\vec{h} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{h}\right) = 0 \tag{17}$$

при граничній

$$\vec{h}(\vec{r}_0) = \frac{1}{2}\vec{e}_h \tag{18}$$

і додатковій

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b}_{2k+1} = 0 \tag{19}$$

умовах. У цьому випадку залежність $B(H)$ має вигляд

$$\vec{B}(H) = \mu_0 H_0 \left[h(\vec{r})e^{i\tau} + h^*(\vec{r})e^{-i\tau} + \frac{\mu - 1}{\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{arctg}\sqrt{\varepsilon}\left(h(\vec{r})e^{i\tau} + h^*(\vec{r})e^{-i\tau}\right)\right], \tag{20}$$

а коефіцієнти $\vec{b}_{2k+1}$ і їхні амплітуди

$$b_{2k+1}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\tau e^{-i(2k+1)\tau} b(\vec{r};\tau), \tag{21}$$

$$< b_{2k+1}(\vec{r}) >= 2\sqrt{\vec{b}_{2k+1}(\vec{r}) \cdot \vec{b}^*_{2k+1}(\vec{r})}. \tag{22}$$

Використовуючи теорію лишків, отримаємо

$$< b_{2k+1} >=< h > \sqrt{A_k \delta_{k0} + \left[\frac{2(\mu-1)\varepsilon^k}{(2k+1) < h >} C_0^{2k+1}\right]^2}, \tag{23}$$

де

$$C_0 = \frac{< h >}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon < h >^2}},$$

$$A_k = 1 + \frac{(\mu-1)(-\varepsilon)^k}{(2k+1)} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon < h >^2}}\right)^{2k+1} \left(h^{2k} + h^{*2k}\right), \quad .$$

$< h(\vec{r}) >$ — амплітуда основної гармоніки напруженості магнітного поля; $\delta_{k0}$ — символ Кронекера–Капеллі.

При $\mu >> 1$ [5,6,14] формула (23) набуде вигляду

$$< b_{2k+1}(\vec{r}) >= \frac{2\mu\varepsilon^k}{2k+1} \left(\frac{< h(\vec{r}) >}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon < h(\vec{r}) >^2}}\right)^{2k+1}. \tag{24}$$

З урахуванням граничної умови (18) отримаємо

$$< h_0(\vec{r}_0) >= 1, \tag{25}$$

$$< b_{2k+1}(\vec{r}_0) >= \frac{2\mu\varepsilon^k}{(2k+1)\left(1 + \sqrt{1+\varepsilon}\right)^{2k+1}}. \tag{26}$$

У цьому випадку

$$\frac{< b_{2k+1}(\vec{r}_0) >}{< b_{2k-1}(\vec{r}_0) >} = \frac{2k-1}{2k+1} \frac{\varepsilon}{\left[1 + \sqrt{1+\varepsilon}\right]^2} \;\; \overrightarrow{\varepsilon \to \infty} \;\; \frac{2k-1}{2k+1}. \tag{27}$$

Підставляючи зображення (15) і (16) у формули (5) і (6), отримаємо такі вирази для усереднених джоулевого тепла і пондеромоторної сили:

$$Q = \frac{2H_0^2}{\sigma_*} \left(\vec{\nabla} \times \vec{h}\right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{h}^*\right), \tag{28}$$

$$\vec{F} = \mu_0 H_0^2 \Big[ \left(\vec{\nabla} \times \vec{h}\right) \times \vec{b}^*_{2k+1} + \left(\vec{\nabla} \times \vec{h}^*\right) \times \vec{b}_{2k+1} + \left(\vec{m}_{2k+1} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{b}^*_{2k+1} +$$
$$+ \left(\vec{m}^*_{2k+1} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{b}_{2k+1} + \vec{m}_{2k+1} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}^*_{2k+1}\right) + \vec{m}^*_{2k+1} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}_{2k+1}\right) \Big], \tag{29}$$

де $\vec{m}_{2k+1}(\vec{r}) = \vec{b}_{2k+1}(\vec{r}) - h(\vec{r})\delta_{k0}$.

Аналогічно визначаємо вирази для джоулевого тепла і пондеромоторної сили в таких наближеннях.

Структура виразів (28), (29) дає змогу визначити температуру і компоненти напружень з відповідних задач (7)–(10) з використанням відомих методів розв'язування задач квазістатичної термопружності.

Для прикладу розглянемо магнітом'який шар товщиною $l$, який є жорстко скріплений з діелектричним півпростором (уздовж поверхні $z = 1$). Шар перебуває в зовнішньому електромагнітному полі, яке задане вектором напруженості магнітного поля на поверхні $z = 0$, що дорівнює $\vec{H}^{(0)}(0;\tau) = \{0; H_0 \cos\omega t; 0\}$. Тут $z$ – безрозмірна координата (віднесена до $l$ розмірної).

Будемо вважати, що на верхній основі шару відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого дорівнює початковій температурі $T_0$ шару, а нижня основа теплоізольована. Приймемо також, що основа шару $z = 0$ вільна від силового навантаження.

Система рівнянь електродинаміки (12) для відмінної від нуля складової напруженості магнітного поля $H_y = H(z;t)$ в наближенні наскрізного індукційного нагріву матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \tag{30}$$

З урахуванням співвідношення (1), а також відповідних умов спряження при $z = 1$, отримаємо такі граничні умови на поверхнях шару [16]

$$H(0;t) = H_0 \cos\omega t, \qquad H(1;t) = 0. \tag{31}$$

Тоді періодичний розв'язок задачі (30)—(31) містить основну (першу) гармоніку. У цьому випадку амплітуда має вигляд

$$h(z) = \frac{1}{2}(1-z), \qquad < h(z) >= 1 - z. \tag{32}$$

Аналогічно з формул (16),(23) для індукції магнітного поля будемо мати

$$b_{2k+1}(z) = \frac{1}{2}(1-z)\left[\delta_{k0} + \frac{2(\mu-1)(-\varepsilon)^k}{2k+1}\frac{(1-z)^{2k}}{(1+\sqrt{1+\varepsilon(1-z)^2})^{2k+1}}\right], \tag{33}$$

$$< b_{2k+1}(z) >= (1-z)\left[\delta_{k0} + \frac{2(\mu-1)\varepsilon^k(1-z)^{2k}}{(2k+1)[1+\sqrt{1+\varepsilon(1-z)^2}]^{2k+1}}\right]. \tag{34}$$

Зі співвідношень (28) і (29), врахувавши формули (32)–(33), отримаємо такі вирази для джоулевого тепла і пондеромоторної сили:

$$Q(z) = \frac{H_0^2}{2\sigma_* l^2}, \tag{35}$$

$$F(z) = \frac{1}{l}\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z}, \quad \Phi(z) = \mu_0 H_0^2 \left\{ \frac{(1-z)^2}{4}\left[\frac{4(\mu-1)^2}{(1+\sqrt{1+\varepsilon(1-z)^2})} - 1\right] + \right.$$

$$+(\mu-1)^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\varepsilon^k(1-z)^{2k+1}}{(2k+1)(1+\sqrt{1+\varepsilon(1-z)^2})^{2k+1}}\right]^2\Bigg\}. \qquad (36)$$

Зі співвідношень (7)–(9) для шару, який розглядаємо, прийдемо до задачі

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{l^2 Q}{\lambda}-\frac{\partial T}{\partial \tau_*}, \qquad (37)$$

$$T(z;0)=0, \qquad (38)$$

$$\frac{\partial T(0;\tau_*)}{\partial z}-Bi\cdot T(0;\tau_*)=0, \qquad \frac{\partial T(1;\tau_*)}{\partial z}=0, \qquad (39)$$

де $Bi=Ll$ — критерій Біо, $\tau_*=at/l^2$а — критерій Фур'є, а $Q(z)$ задається формулою (30).

Використавши перетворення Лапласа за часом $\tau_*$, отримаємо

$$T(z;\tau_*)=\frac{H_0^2}{2\sigma_*\lambda}\left[\frac{1}{Bi}+z-\frac{z^2}{2}-2Bi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\nu_n(1-z)e^{-\nu_n^2\tau_*}}{\nu_n^2\left[Bi(1+Bi)+\nu_n^2\right]\cos\nu_n}\right]. \qquad (40)$$

Тут $\nu_n$ — корені трансцендентного рівняння

$$Bi\cos\nu_n=\nu_n\sin\nu_n. \qquad (41)$$

Систему рівнянь термопружності (10) для цього випадку ($u_x=u_y=0$) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial(\sigma_{zz}+\Phi)}{\partial z}=0, \qquad (42)$$

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\frac{1}{1-\nu}\left(\nu\sigma_{zz}-\alpha_t ET\right), \qquad (43)$$

для граничної умови

$$\sigma_{zz}(0;t)=0. \qquad (44)$$

Тут $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$, $\sigma_{zz}$ — компоненти нормальних напружень у напрямі осей $x$, $y$ і $z$.

Розв'язок задачі (42), (44) буде

$$\sigma_{zz}(z)=\Phi(z)-\Phi(0), \qquad (45)$$

де вираз для функції $\Phi(z)$ задається формулою(36).

Наведені результати досліджень для технічно чистого заліза при характеристиках матеріалу [4–6,14,16]

$$\mu=251, \qquad B_S=2,07Тл, \qquad \sigma_*=1,03\cdot10^7 A/B\cdot м,$$

$$\lambda=0,74\cdot10^2 Bm/м\cdot K, \qquad a=0,15\cdot10^{-4}м^2/c, \qquad \alpha_t=0,12\cdot10^{-4}1/K,$$

$$E = 0,20 \cdot 10^{12} H/м^2, \qquad \nu = 0,28, \qquad Bi = 0,2.$$

Розрахунки виконувались для двох значень амплітуди напруженості магнітного поля на поверхні $H_0 = 10^4 A/м$ і $H_0 = 10^5 A/м$ (відповідно криві 1 і 2).

На рис.1 показано розподіл першої (темні криві) і третьої (світлі криві) гармонік амплітуди індукції магнітного поля. Як видно з графіків, розподіл амплітуди першої гармоніки має доволі глибинний характер порівняно з амплітудою напруженості магнітного поля. Величина самої індукції є пропорційна до $H_0$. Амплітуди третьої гармоніки мають більш виражений приповерхневий характер і становлять не більше 30% порівняно з першою. Амплітуди п'ятої і вище гармонік

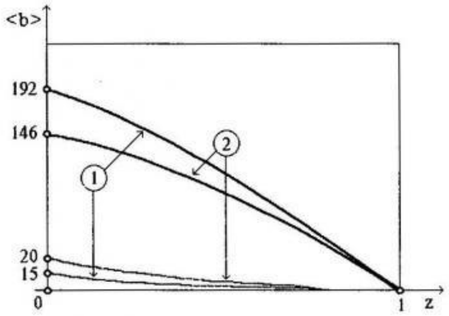



*Рис. 1*

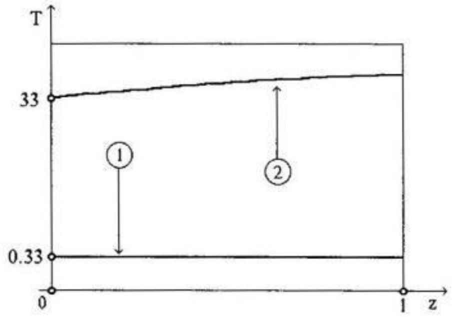



*Рис. 2*

на рисунку не показані, оскільки вони малі порівняно з аналогічними для першої.

Розподіл температури в усталеному режимі $\tau_* \longrightarrow \infty$ показано на рис.2. Як видно з графіка, у цьому випадку розподіл температури має рівномірний характер. При $H_0 = 10^4 A/м$ досягається максимальне значення температури $T = 0.36K$ (при $H_0 = 10^5 A/м$ — $T = 36.08K$).

Аналіз результатів досліджень свідчить, що силовими напруженнями можна знехтувати порівняно з температурами. Характер розподілу температурних напружень за даних умов закріплення повторює розподіл температури.

1. Слухоцкий А.Е., Немков В.С., Павлов Н.А., Бамунер А.В. Установки индукционного нагрева.— Л.: Энергоиздат, 1981.— 325 с.
2. Родигин Н.М. Индукционный нагрев стальных изделий токами нормальной частоты.— М.: Металургиздат, 1950.— 248 с.
3. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел.— К.: Наукова думка, 1977.— 248 с.
4. Бурак Я.Й., Гачкевич О.Р., Солодяк М.Т. *Термопружність електропровідних магнітом'яких тіл в зовнішніх усталених електромагнітних полях* // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1987.— N2.— С.43–47.
5. Преображенский А.А. Магнитные материалы и елементы.— М.: Высш. шк., 1976.- 336 с.
6. Колесников П.М. Введение в нелинейную электродинамику.— Минск: Наука и техника, 1971.— 384 с.

7. Тамм Н.Е. Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.— 616 с.
8. Де Грот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика.— М.: Мир, 1964.— 456 с.
9. Hutter K. *Wave propagation and attenuation in paramagnetic soft ferromagnetic materials* //I. - Int. J. Eng. Sci. – 1975.– Vol.13, N12. – P.1067–1084.
10. Pao Y.–H., Geh C.–S. *A linear theory for soft ferromagnetic elastic solids* //Int. J. Eng. Sci.– 1973. – Vol.11, N4. – P.415–436.
11. Коваленко А.Д. Термоупругость.— К.: Вища шк., 1975.— 216 с.
12. Коваленко А.Д. Избранные труды.— К.: Наукова думка, 1976.— 764 с.
13. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных електромагнитных полей.— К.: Техніка, 1974.— 352 с.
14. Мишин Д.Д. Магнитные материалы.— М.: Высш. шк., 1981.— 355 с.
15. ДружининВ.В. Магнитные свойства электротехнической стали.— М.– Л.: Госэнергоиздат, 1962.— 320 с.
16. Солодяк М.Т. *Плоская несвязанная задача магнитотермоупругости для магнитотвердого слоя* //Мат. методы и физ.–мех. поля.— 1993. – Вып. 30.— С.63–69.

*Стаття надійшла до редколегії 20.06.96*

УДК 517.95

# ЗАДАЧА ФУР'Є ЗІ ЗМІШАНОЮ ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ ДЛЯ СИСТЕМ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

В. М. Сікорський

**V. Sikorsky. The Fourier problem with a mixed boundary condition for the system of quasilinear parabolic equations in unbounded domains.** This work is devoted to the problem of existence and uniqueness of a generalized solution in the space $W^{1,0}_{\mathrm{loc}}$ of the Fourier problem for the system of quasilinear parabolic equations in unbounded domains in the case when boundary conditions of different types are given on different parts of the boundary of a domain. The theorem like the principle of Sen-Venan has been proved for this problem. It characterizes the behaviour of solution on infinity. The classes of the uniqueness of solutions are found. These classes are to be functions of exponencial growth. The existence of generalized solution from the classes of uniqueness has been proved when the right side of the system is the function of exponencial growth at infinity.

Наша праця присвячена питанням існування і єдиності розв'язку задачі Фур'є зі змішаною граничною умовою для систем квазілінійних параболічних рівнянь. Задачу Фур'є (задачу без початкових умов) для параболічних рівнянь та систем досліджували в [1–6] та ін. Зазначимо, що в [4–6] виділені класи суттєво нелінійних параболічних рівнянь, для яких розв'язок задачі Фур'є єдиний без обмежень щодо його поведінки на нескінченності, а існування доводиться без припущень про поведінку вихідних даних на нескінченності. А.Є.Шишков у [8] використав метод, який грунтується на енергетичних оцінках розв'язків, що в певному сенсі є узагальненням відомого в теорії пружності принципу Сен–Венана для дослідження умов єдиності та існування узагальнених розв'язків із $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}$ першої крайової задачі для лінійних та близьких до них квазілінійних рівнянь параболічного типу. По суті для таких рівнянь в праці [7] встановлені класи єдиності узагальних розв'язків з $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}$ задачі Фур'є і доведено існування узагальнених розв'яків із цих класів. Праця [12] узагальнює результати М.М.Бокала для квазілінійних параболічних рівнянь у випадку, коли на різних частинах бічної поверхні області задані крайові умови різних типів. У цій праці, на відміну від [12], визначено класи існування та єдиності розв'язку у випадку систем квазілінійних параболічних рівнянь.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35K50; Secondary 35K60.

**1. Формулювання задачі.** Нехай $Q = \Omega \times (-\infty, T)$, де $\Omega$ — необмежена область в $\mathbb{R}^n_x$ з кусково–гладкою границею $\partial\Omega$, $T < +\infty$. Нехай $\partial\Omega = \overline{\Gamma^{(1)}} \cup \overline{\Gamma^{(2)}}$, де $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ — відкриті (зокрема, порожні) множини на поверхні $\partial\Omega$, причому $\Gamma^{(1)} \cap \Gamma^{(2)} = \varnothing$. Приймемо $\Sigma^{(1)} = \Gamma^{(1)} \times (-\infty, T]$, $\Sigma^{(2)} = \Gamma^{(2)} \times (-\infty, T]$.

Розглянемо задачу

$$u_{it} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_{ij}(x,t,u,\nabla u) + a_{i0}(x,t,u,\nabla u) =$$

$$= f_{i0}(x,t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(x,t), \quad \text{в } (x,t) \in Q, \quad i = \overline{1,N}, \tag{1}$$

$$u_i = \psi_i^{(1)} \quad \text{на} \quad \Sigma^{(1)}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u,\nabla u)\nu_j + a_i u_i = \psi_i^{(2)} \quad \text{на} \quad \Sigma^{(2)}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньoї нормалі до $\partial\Omega$. Тут і далі для вихідних даних передбачені такі умови:

1) функції $a_{ij}(x,t,s,\xi)$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n}$ — визначені для $(x,t) \in Q$, $s = (s_1, s_2, ..., s_N) \in \mathbb{R}^N$, $\xi = (\xi_{ij})_{i=\overline{1,N}, j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^{nN}$, каратеодорівські, тобто вимірні по $(x,t)$ для будь-яких $(s,\xi)$, неперервні по $(s,\xi)$ для м.в. $(x,t) \in Q$.
2) функції $a_{ij}(x,t,s,\xi), i = \overline{1,N}, j = \overline{1,n}$, задовольняють локально умову Ліпшиця по $(s,\xi)$, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ і довільних $(s,\xi)$ справджується нерівність

$$|a_{ij}(x,t,s,\xi) - a_{ij}(x,t,\tau,\eta)| \leqslant k_{ij}^{(1)}(x,t) \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} |\xi_{lk} - \eta_{lk}| + k_{ij}^{(2)}(x,t) \sum_{l=1}^{N} |s_l - \tau_l|, \tag{4}$$

де $k_{ij}^{(l)} \in L^\infty_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $k_{ij}^{(l)} \geqslant 0$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$, $l = 1,2$, і, крім того, $a_{ij}(x,t,0,0) \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,n}$;

3) $a_{i0}(x,t,s,\xi) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\xi_{ij} + c_i(x,t,s,\xi)$, де $b_{ij}, (b_{ij})_{x_j} \in L^\infty_{\text{loc}}(\overline{Q})$, і для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(s,\xi), (\tau,\eta)$ з простору $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ справджується умова сильної параболічності

$$\sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}(x,t,s,\xi) - a_{ij}(x,t,\tau,\eta))(\xi_{ij} - \eta_{ij}) + (c_i(x,t,s,\xi) - c_i(x,t,\tau,\eta))(s_i - \tau_i) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{N} \left\{ p_i(x,t) \sum_{j=1}^{n} |\xi_{ij} - \eta_{ij}|^2 + q_i(x,t)|s_i - \tau_i|^2 \right\}, \tag{5}$$

де $p_i, q_i \in L^\infty_{\text{loc}}(\overline{Q}), \inf\limits_{Q'} p_i > 0$ для будь-якої обмеженої підобласті $Q'$ області $Q$ та $\inf\limits_{Q'} (q_i - 2^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (b_{ij})_{x_j}) > -\infty$, $i = \overline{1,N}$;

4) $f_{ij} \in L^2_{\text{loc}}(\overline{Q})$, $\psi_i^{(1)} \in L^2_{\text{loc}}(\overline{\Sigma^{(1)}})$, $\psi_i^{(2)} \in L^2_{\text{loc}}(\overline{\Sigma^{(2)}})$, $a_i \in L^\infty_{\text{loc}}(\Sigma^{(2)})$, $i = \overline{1,N}$, $j = \overline{0,n}$.

Під $L^\infty_{\text{loc}}(\overline{G})(L^2_{\text{loc}}(\overline{G}))$, де $G$ — необмежена вимірна множина, розуміємо простір функцій, вимірних і обмежених (інтегровних з квадратом) на обмежених вимірних підмножинах множини $G$, а під $W^{1,0}_{2,\text{loc}}(\overline{D})$, де $D$ — область в $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$, простір функцій $v \in L^2_{\text{loc}}(\overline{D})$, які мають узагальнені похідні $v_{x_i} \in L^2_{\text{loc}}(\overline{D})$, $i = \overline{1,n}$. Через $W^{1,1}_{2,0}(D)$ позначимо замикання простору $C_0^\infty(D)$ в нормі $W^{1,1}_2(D)$.

**Означення 1.** *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) назвемо вектор-функцію $u(x,t) = colon(u_1(x,t),...,u_N(x,t))$, компоненти якої належать простору $W^{1,0}_{2,\text{loc}}(\overline{Q})$ і задовольняють умову (2) (в сенсі сліду) та інтегральну тотожність*

$$\iint\limits_{Q'} \sum_{i=1}^N \left\{ -u_i\varphi_{it} + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t,u,\nabla u)\varphi_{ix_j} + a_{i0}(x,t,u,\nabla u)\varphi_i \right\} dxdt -$$
$$- \int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{Q}'} \sum_{i=1}^N a_i u_i \varphi_i \, ds = \iint\limits_{Q'} \sum_{i=1}^N \left\{ f_{i0}\varphi_i + \sum_{j=1}^n f_{ij}\varphi_{ix_j} \right\} dxdt + \int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{Q}'} \sum_{i=1}^N \psi_i^{(2)}\varphi_i \, ds \qquad (6)$$

*для довільної обмеженої підобласті $Q'$ області $Q$ і будь-яких $\varphi_i \in C^1(\overline{Q'}), i = \overline{1,N}$, які дорівнюють нулю на $\Sigma^{(1)} \cap \overline{Q}'$ і на $\partial Q' \cap Q$.*

Дослідимо умови єдиності та існування узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

**2. Позначення і додаткові припущення.** Позначимо через $M \in \mathbb{N}$ — кількість рукавів у необмеженій області $\Omega$. Нехай $\{\Omega_\tau\}$ — сім'я обмежених підобластей області $\Omega$, які залежать від параметра $\tau = (\tau_1,...,\tau_M), \tau \in \Pi = \{\tau | \tau_j \geqslant 0, j = \overline{1,M}\}$. Припустимо, що $\Omega_\tau \subset \Omega_{\tau'}$, якщо $\tau_j \leqslant \tau'_j, j = \overline{1,M}$, і $\Omega = \bigcup\limits_{\tau\in\Pi} \Omega_\tau$. Позначимо $\gamma_\tau = \partial\Omega_\tau \setminus \partial\Omega$ і припустимо, що $\gamma_\tau = \bigcup\limits_{l=1}^M \gamma_{\tau_l}$, де $\gamma_{\tau_l}$ є $(n-1)$–вимірною гіперповерхнею, яка має ту ж гладкість, що і $\partial\Omega$, і її межа належить $\partial\Omega$. Припустимо, що для будь-якого $\hat\tau \in \Pi$ з $\hat\tau_l > 0$, $l = \overline{1,M}$ в деякому околі $\gamma_{\hat\tau_l}$ можна ввести локальні координати $y$ такі, що

$$y_j = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1,n}, \qquad (7)$$

де функції $\varphi_j(x)$ — неперервно–диференційовні, $dx = \varkappa_l(x)dy$, гіперплощина $y_n = \tau_l$ містить $\gamma_{\tau_l}$ при всіх $\tau_l$ із деякого околу $\hat\tau_l$. Легко бачити, що існують неперервні додатні на $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_0$ функції $h_l(x), l = \overline{1,M}$, такі, що для будь-якої неперервної на $\overline{\Omega}$ функції $v$ справджується рівність

$$\frac{\partial}{\partial\tau_l} \int\limits_{\Omega_\tau} v(x)\,dx = \int\limits_{\gamma_{\tau_l}} v(x)h_l(x)\,ds, \quad \tau_l > 0. \qquad (8)$$

Позначимо $\partial\Omega = \overline{\Gamma^{(1)}} \cap \overline{\Gamma^{(2)}}$,

$$S_\tau^{(1)} = \Gamma^{(1)} \cap \partial\Omega_\tau,\ S_\tau^{(2)} = \Gamma^{(2)} \cap \partial\Omega_\tau,\ \partial\Omega_\tau = \overline{\Gamma_\tau^{(1)}} \cup \overline{\Gamma_\tau^{(2)}} \cup \gamma_\tau,\ Q_{\tau,t_0} = \Omega_\tau \times (t_0, T),$$

$$\Sigma_{\tau,t_0}^{(1)} = \overline{\Gamma_\tau^{(1)}} \times [t_0, T],\ \Sigma_{\tau,t_0}^{(2)} = \overline{\Gamma_\tau^{(2)}} \times [t_0, T],\ S_{\tau_l,t_0} = \overline{\gamma_{\tau_l}} \times [t_0, T],\ S_{\tau,t_0} = \bigcup_{l=1}^{M} S_{\tau_l,t_0},$$

де $\tau = (\tau_1, ..., \tau_M)$, $\tau_l \geqslant 0$, $l = \overline{1, M}$, $t_0 < T$.

Нехай

$$d_{1l}(\tau_l, t_0) = nN \sup_\tau \sup_{S_{\tau_l,t_0}} \left( \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} [k_{ij}^{(1)}(x,t)]^2 / [p_r(x,t) h_l(x)] \right)^{1/2},$$

$$d_{2l}(\tau_l, t_0) = nN \sup_{S_{\tau_l,t_0}} \left( \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} [k_{ij}^{(2)}(x,t)]^2 \right)^{1/2} - 2^{-1} \inf_i \inf_{S_{\tau_l,t_O}} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\nu_j,$$

де $\overrightarrow{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\gamma_{\tau_l}$, $\tau_l > 0$, $t_0 < T$, $l = \overline{1, M}$.

Візьмемо таке дійсне число $\mu$, що $\{q_i - 2^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (b_{ij})_{x_j} + \mu\} \geqslant 0$ на $Q$, $i = \overline{1, N}$, якщо $\Gamma^{(1)} \neq \varnothing$ і $\{q_i - 2^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (b_{ij})_{x_j} + \mu\} > 0$ на $Q$, $i = \overline{1, N}$, якщо $\Gamma^{(1)} = \varnothing$, і приймемо

$$E_\mu(v) = \sum_{i=1}^{N} \left[ p_i |\nabla v_i|^2 + (q_i - 2^{-1} \sum_{j=1}^{n} (b_{ij})_{x_j} + \mu) |v_i|^2 \right],$$

$$\lambda_l(\tau_l, t_0) = \inf_{t,v} \int\limits_{\gamma_{\tau_l}} E_\mu(v) h_l d\gamma \left( \int\limits_{\gamma_{\tau_l}} v^2\, d\gamma \right)^{-1}, \quad \tau_l > 0,\ t_0 < T,$$

де нижня грань береться по всіх неперервно–диференційовних в околі $\gamma_{\tau_l}$ вектор–функціях $v = \mathrm{colon}(v_1, ..., v_N)$, компоненти яких дорівнюють нулю на $\partial\gamma_{\tau_l} \cap \Gamma^{(1)}$, і всіх $t \in [t_0, T]$;

$$\Theta(\tau, t_0) = \inf_v \int\limits_{\Omega_\tau} E_\mu(v)|_{t=t_0}\, dx \left( \int\limits_{\Omega_\tau} v^2\, dx \right)^{-1},$$

де нижня грань береться по всіх вектор–функціях $v = \mathrm{colon}(v_1, ..., v_N)$, компоненти яких належать простору $C^1(\overline{\Omega_\tau})$ і дорівнюють нулю в околі $\Gamma_\tau^{(1)}$.

Додатково припустимо таке:

5) існують неперервні функції $A_0(\tau, t_0) > 0$, $A_{\tau_l}(\tau_l, t_0) > 0$, $l = \overline{1, M}$, $(\tau_l \geqslant 0,\ t_0 \leqslant T)$ такі, що

$$d_{1l}(\tau_l, t_0)\lambda_l^{-1/2}(\tau_l, t_0) + d_{2l}(\tau_l, t_0)\lambda_l^{-1}(\tau_l, t_0) \leqslant A_l(\tau_l, t_0),\ l = \overline{1, M}; \tag{9}$$

$$2^{-1}\Theta^{-1}(\tau, t_0) \leqslant A_0(\tau, t_0), \quad \forall \tau > 0,\ t_0 < T, \tag{10}$$

і задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\tau_l}{d\alpha} = A_l(\tau_l, t_0),\ l = \overline{1, M}, \quad \frac{dt_0}{d\alpha} = -A_0(\tau, t_0), \tag{11}$$

$$\tau_l(0) = 0, \quad l = \overline{1, M}, \quad t_0(0) = T \tag{12}$$

має єдиний розв'язок $\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha), ...\tau_M(\alpha)$, $t_0(\alpha)$, визначений на $[0, \infty)$ і такий, що $\tau_l(\alpha) \to +\infty$, $l = \overline{1, M}$, $t_0(\alpha) \to -\infty$ при $\alpha \to \infty$. Далі під $\tau_1(\alpha), \ldots, \tau_M(\alpha), t_0(\alpha)$ будемо завжди розуміти цей розв'язок.

Приймемо

$$Q_\alpha = Q_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}, \quad \Sigma_\alpha^{(1)} = \Sigma_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}^{(1)}, \quad \Sigma_\alpha^{(2)} = \Sigma_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}^{(2)}, \quad S_\alpha = S_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}.$$

Введемо простір

$$\hat{W}_2^{1,0}(Q_\alpha) = \{v = \mathrm{colon}(v_1, ..., v_N) \mid v_i \in W_2^{1,0}(Q_\alpha),\ v_i = 0 \text{ на } \Sigma_\alpha^{(1)},\ i = \overline{1, N}\}$$

і норму в ньому

$$\langle v \rangle_\alpha = \left( \iint\limits_{Q_\alpha} E_\mu(v) \exp\{-2\mu t\} dxdt \right)^{1/2}.$$

На основі наших припущень, як випливає з [10], норма $\langle v \rangle_\alpha$ в просторі $\hat{W}_2^{1,0}(Q_\alpha)$ еквівалентна нормі

$$\|v\|_\alpha = \left( \iint\limits_{Q_\alpha} \sum_{i=1}^N [v_i^2 + |\nabla v_i|^2] dxdt \right)^{1/2}.$$

Далі використаємо усереднення за Стєкловим і деякі властивості цих усереднень. Нагадаємо їх (див., наприклад, [10]). Нехай $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^1)$. Приймемо для кожного $h > 0$ $v_h = \frac{1}{h} \int\limits_{t-h}^{t} v(\theta)\, d\theta$, $v_{\overline{h}} = \frac{1}{h} \int\limits_{t}^{t+h} v(\theta)\, d\theta$. Легко перевірити справедливість рівностей

$$\int\limits_{a-h}^{b} v\varphi_{\overline{h}}\, dt = \int\limits_{a}^{b} v_h \varphi\, dt, \quad \int\limits_{a-h}^{b} v(\varphi_{\overline{h}})_t\, dt = -\int\limits_{a}^{b} (v_h)_t \varphi\, dt$$

для будь-яких $v(t), \varphi(t) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, якщо $\varphi = 0$ поза $[a, b]$. Крім того, $v_h \to v$ при $h \to 0$ в $L^2(a, b)$, де $-\infty < a < b < +\infty, v \in L^2(a, b)$.

Перейдемо до формулювання і доведення основних результатів. Далі ми завжди будемо вважати, що виконуються умови 1)–4).

**3. Енергетична оцінка і єдиність розв'язку.** Спочатку доведемо оцінку різниці узагальнених розв'язків задачі (1)–(3).

**Теорема 1.** *Нехай* $R^* > 0$ *і* $u(x,t), \tilde{u}(x,t)$ — *вектор-функції з компонентами відповідно* $u_i, \tilde{u}_i \in W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $i = \overline{1,N}$, *які збігаються на* $\Sigma^{(1)}_{R^*}$ *та задовольняють інтегральну тотожність* (6) *за умови, що* $Q' \subset Q_{R^*}$. *Крім того, припустимо, що* $\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\nu_j + a_i > 0$ *на* $\overline{\Sigma}^{(2)}_{R^*}$. *Тоді для будь-яких* $R_1, R_2$ *таких, що* $0 < R_1 < R_2 \leqslant R^*$, *справедлива оцінка*

$$\langle u - \tilde{u}\rangle_{R_1} \leqslant \exp\{(R_1 - R_2)/2\}\langle u - \tilde{u}\rangle_{R_2}. \tag{13}$$

*Доведення.* Нехай $R^*, R_1, R_2$ — довільні числа, такі, що $0 < R_1 <. R_2 \leqslant R^*$. Тоді $\tau(R^*) > 0 \quad (l = \overline{1,R})$. Для будь-якого $\hat{\tau} \in \Pi$, такого, що $\tau_l(R_1) \leqslant \hat{\tau}_l \leqslant \tau_l(R^*)$ і $(x,t) \in \Omega_{\tau(R^*)}$ побудуємо зрізаючу функцію $0 \leqslant \psi_\delta(x,\hat{\tau}) \leqslant 1$, яка залежить від параметра $\delta$, де $0 < 2\delta < \min\limits_l \tau_l(R_1)$, таку, що, якщо $x \in \overline{\gamma}_{\tau_l}$ при $\tau_l \geqslant \hat{\tau}_l$, то $\psi_\delta(x,\hat{\tau}) = 0$; якщо ж $x \in \overline{\gamma}_{\tau_l}$ при $\tau_l \leqslant \hat{\tau}_l - 2\delta$, то $\psi_\delta(x,\hat{\tau}) = 1$. На основі припущень щодо функцій $\varphi_j$, які визначають перетворення координат (6), $\psi_\delta(x,\hat{\tau})$ є неперервно диференційовною функцією змінної $x$ в $\Omega_{\tau(R^*)}$ і параметрів $\hat{\tau}_l$ при $\tau_l(R_1) \leqslant \hat{\tau}_l \leqslant \tau_l(R^*)$ $(l = \overline{1,M})$.

Нехай $\{u^{(m)}\}$, $\{w^{(m)}\}$ – послідовності функцій, компоненти яких належать $C^2(\overline{Q_{R^*}})$, збігаються до відповідних компонент $u$ та $w = u - \tilde{u}$ в нормі $W^{1,0}_2(Q_{R^*})$, причому $w^{(m)} = 0$ на $\Sigma^{(1)}_{R^*}$. Приймемо $\tilde{u}^{(m)} = u^{(m)} - w^{(m)}, m \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $\{\tilde{u}^{(m)}\}$ збігається до $\tilde{u}$ в нормі $W^{1,0}_2(Q_{R^*})$. Віднімемо із інтегральної тотожності (6), записаної для $u$, цю ж тотожність, але записану для $\tilde{u}$. Візьмемо довільні $\tau$, $t_0$, $0 < \tau_l < \tau_l(R^*)$, $l = \overline{1,M}$, $t_0(R^*) < t_0 < T$ і в отриманій після віднімання інтегральній тотожності (14) покладемо $Q' = Q_{\tau,t_0}$, $\varphi_i = (\hat{w}^{(m)}_{ih}\psi_\delta \exp\{-2\mu t\})_{\overline{h}}$, де $i = \overline{1,N}$, $0 < h < t_0 - t_0(R^*)$, $\hat{w}^{(m)}_{ih} = w^{(m)}_{ih}$ на $Q_{\tau,t_0}$ і $\hat{w}^{(m)}_{ih} = 0$ зовні $Q_{\tau,t_0}$, $\delta > 0$ — довільне число з проміжку $(0; \frac{1}{2}\min\limits_l \tau_l(R_1))$. Тоді, враховуючи властивості усереднень, отримаємо

$$\begin{aligned}\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}} \sum_{i=1}^{N} \Bigg[ w_{iht} w^{(m)}_{ih}\psi_\delta + \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(u) - a_{ij}(\tilde{u}))_h w^{(m)}_{ihx_j}\psi_\delta + \\ + \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(u) - a_{ij}(\tilde{u}))_h w^{(m)}_{ih}\psi_{\delta x_j} + + (a_{i0}(u) - a_{i0}(\tilde{u}))_h w^{(m)}_{ih}\psi_\delta \Bigg] \exp\{-2\mu t\}\, dxdt + \\ + \int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{Q}_{\tau,t_0}} \sum_{i=1}^{N} a w_{ih} w^{(m)}_{ih}\psi_\delta \exp\{-2\mu t\}\, ds = 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Тут і далі приймаємо $a_{ij}(u) = a_{ij}(x,t,u,\nabla u)$, $a_{ij}(\tilde{u}) = a_{ij}(x,t,\tilde{u},\nabla\tilde{u})$, $j = \overline{0,n}$, $i = \overline{1,N}$. Перепишемо рівність (14), враховуючи зображення $a_{i0}(u)$ та $a_{i0}(\tilde{u})$ (див. [2]), таким чином:

$$\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}} \sum_{i=1}^{N} \Bigg[ w^{(m)}_{iht} w^{(m)}_{ih} + \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(u^{(m)}_h) - a_{ij}(\tilde{u}^{(m)}_h)) w^{(m)}_{ihx_j} +$$

$$+(c_i(u_h^{(m)}-c_i(\tilde{u}_h^{(m)}))w_{ih}^{(m)}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}w_{ihx_j}^{(m)}w_{ih}^{(m)}\Big]\exp\{-2\mu t\}\,dtdx+ \tag{15}$$

$$+\int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{Q}_{\tau,t_0}}\sum_{i=1}^{N}a_i[w_{ih}^{(m)}]^2\exp\{-2\mu t\}\,ds=\varepsilon_{mh\delta}(\tau,t_0)+G_{mh\delta}(\tau,t_0),$$

де

$$G_{mh\delta}(\tau,t_0)=-\iint\limits_{Q_{(\tau,t_0)}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(a_{ijh}(u)-a_{ijh}(\tilde{u}))w_{ih}^{(m)}\psi_{\delta x_j}\exp\{-2\mu t\}\,dtdx,$$

а під $\varepsilon_{mh\delta}(\tau,t_0)$ розуміємо суму всіх інших членів, перенесених у праву частину рівності.

Перетворимо $G_{mh\delta}$ таким чином. Довизначимо функції $a_{ij}(u_h^{(m)})$ та $a_{ij}(\tilde{u}_h^{(m)})$ нулем ззовні $Q_R^*$ і приймемо

$$a_{ij\rho}(u_h^{(m)}(x,t))=\iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}a_{ij}(u_h^{(m)}(y,\theta))\omega_\rho(x-y,t-\theta)\,dyd\theta,$$

$$a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}(x,t))=\iint\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}a_{ij}(\tilde{u}_h^{(m)}(y,\theta))\omega_\rho(x-y,t-\theta)\,dyd\theta,$$

де $j=\overline{0,n}$, $i=\overline{1,N}$, $\omega_\rho$ — ядра усереднень [9]. Тоді

$$G_{mh\delta}(\tau,t_0)=$$

$$\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}[(a_{ij\rho}(u_h^{(m)})-a_{ijh}(u))-(a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)})-a_{ijh}(\tilde{u}))]w_{ih}^{(m)}\psi_{\delta x_j}\exp\{-2\mu t\}\,dtdx+$$

$$+\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}\setminus Q_{\tau-2\delta,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\Big[(a_{ij\rho}(u_h^{(m)})-a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}))w_{ih}^{(m)}\Big]_{x_j}\psi_\delta\exp\{-2\mu t\}\,dtdx-$$

$$-\int\limits_{S_{\tau-2\delta,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij\rho}(u_h^{(m)})-a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}))w_{ih}^{(m)}\nu_j\exp\{-2\mu t\}\,ds+$$

$$+\int\limits_{S_{\tau,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij\rho}(u_h^{(m)})-a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}))w_{ih}^{(m)}\nu_j\exp\{-2\mu t\}\,ds-$$

$$-\int\limits_{S_{\tau,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij\rho}(u_h^{(m)})-a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}))w_{ih}^{(m)}\nu_j\exp\{-2\mu t\}\,ds.$$

Тепер перетворимо ліву частину (15), інтегруючи частинами та використовуючи нерівність (5). Отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{N}(w_{ih}^{(m)})^2|_{t=T}\exp\{-2\mu T\}\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{N}(w_{ih}^{(m)})^2|_{t=t_0}\exp\{-2\mu t_0\}\,dx+$$

$$\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}}E_\mu(w_h^{(m)})\exp\{-2\mu t\}\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{S_{\tau,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\nu_j(w_{ih}^{(m)})^2\exp\{-2\mu t\}\,ds+$$

$$+\int\limits_{\Sigma^{(2)}\cap\overline{Q}_{\tau,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}[\frac{1}{2}b_{ij}\nu_j+a_i](w_{ih}^{(m)})^2\exp\{-2\mu t\}\,ds= \tag{16}$$

$$=-\int\limits_{S_{\tau,t_0}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij\rho}(u_h^{(m)})-a_{ij\rho}(\tilde{u}_h^{(m)}))\nu_j w_{ih}^{(m)}\exp\{-2\mu t\}\,ds+\varepsilon_{mh\delta}(\tau,t_0)+G^*_{mh\rho\,\delta}(\tau,t_0),$$

де $G^*_{mh\rho\,\delta}(\tau,t_0)$ — сума всіх членів правої частини (15) за винятком останнього. Отже, із (16), використовуючи введені вище позначення та нерівність Коші-Буняковського, отримаємо

$$\begin{aligned}\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}}E_\mu(w_h^{(m)})\exp\{-2\mu t\}\,dxdt &\leqslant \sum_{l=1}^{R}[d_{1l}(\tau_l,t_0)\lambda_l^{-1/2}(\tau_l,t_0)+\\ &+d_{2l}(\tau_l,t_0)\lambda_l^{-1}(\tau_l,t_0)]\int\limits_{S_{\tau,t_0}}E_\mu(w_h^{(m)})h_l\exp\{-2\mu t\}\,ds+\\ &+\frac{1}{2}\Theta^{-1}(\tau,t_0)\int\limits_{\Omega_\tau}E_\mu(w_h^{(m)})|_{t=t_0}\exp\{-2\mu t_0\}\,dx+\\ &+\varepsilon_{mh\delta}(\tau,t_0)+G^*_{mh\rho\,\delta}(\tau,t_0)+L_{mh\rho}(\tau,t_0),\end{aligned} \tag{17}$$

де

$$L_{mh\rho}=\int\limits_{S_{\tau,t_0}}b_{h\rho}^{(m)}(x,t)\,ds,\quad b_{h\rho}^{(m)}(x,t)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}|(k_{ij}^{(1)}|\nabla w_{ih}^{(m)}|+$$

$$+k_{ij}^{(2)}|w_{ih}^{(m)}|)_\rho-(k_{ij}^{(1)}|\nabla w_{ih}^{(m)}|+k_{ij}^{(2)}|w_{ih}^{(m)}|)||w_{ih}^{(m)}||\nu_j|\exp\{-2\mu t\}$$

Приймемо $F_h^{(m)}(\tau,t_0)=\iint\limits_{Q_{\tau,t_0}}E_\mu(w_h^{(m)})\exp\{-2\mu t\}\,dxdt$. Тоді з (7)–(11) і (17) отримаємо

$$F_{mh}(\tau,t_0)\leqslant\frac{\partial F_h^{(m)}}{\partial\tau_l}\frac{d\tau_l}{d\alpha}+\frac{\partial F_h^{(m)}}{\partial\tau_0}\frac{d\tau_0}{d\alpha}+\varepsilon_{mh\delta}(\tau,t_0)+G^*_{mh\rho\,\delta}(\tau,t_0)+L_{mh\rho}(\tau,t_0),$$

звідки

$$0 \leqslant -F_h^{(m)} + \frac{dF_h^{(m)}}{d\alpha} + \varepsilon_{mh\delta} + G^*_{mh\rho\,\delta} + L_{mh\rho\,\delta}. \tag{18}$$

Помножимо (18) на $\exp\{-\alpha\}$ і проінтегруємо отриману нерівність по $\alpha$ від $R_1$ до $R_2$

$$F_h^{(m)}(\tau(R_1), t_0(R_1)) \leqslant \exp\{R_1 - R_2\} F_h^{(m)}(\tau(R_2), t_0(R_2)) +$$
$$+ \exp\{R_1\} \int_{R_1}^{R_2} [\varepsilon_{mh\delta} + G^*_{mh\rho\,\delta} + L_{mh\rho\,\delta}] \exp\{-\alpha\}\, d\alpha. \tag{19}$$

Аналогічно як у [2] і [7], можна показати, що інтеграли $\int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_{mh\delta} \exp\{-\alpha\}\, d\alpha$ і $\int_{R_1}^{R_2} G^*_{mh\rho\,\delta} \exp\{-\alpha\}\, d\alpha$ як завгодно малі, якщо $h > 0$ – достатньо мале, $m(h) \in \mathbb{N}$ – достатньо велике, $\rho\,(h, m) > 0$ – достатньо мале і $\delta(m, h, \rho\,)$ – достатньо мале. Це ж правильно і для інтеграла $\int_{R_1}^{R_2} L_{mh\rho} \exp\{-\alpha\}\, d\alpha$. Враховуючи сказане, із (19) отримаємо оцінку (13). Теорему 1 доведено.

Із доведеної теореми випливає теорема про єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

**Теорема 2.** *У класі функцій $u$ з $W^{1,0}_{2,\mathrm{loc}}$, які задовольняють умову*

$$\iint_{Q_R} E_\mu(u) \exp\{-2\mu t\}\, dxdt = o(1) \exp\{R\} \quad \text{\textit{при}} \quad R \to \infty, \tag{20}$$

*узагальнений розв'язок задачі (1)–(3) єдиний.*

*Доведення.* Нехай $u, \tilde{u}$ – два узагальнені розв'язки задачі (1)–(3), які задовольняють умову (20). Тоді $\langle u - \tilde{u} \rangle_R = o(1) \exp\{R/2\}$ при $R \to \infty$. Звідси і з оцінки (13) маємо для довільних $R_1$ і $R_2$, $R_1 < R_2$, оцінку

$$\langle u - \tilde{u} \rangle_{R_1} = \beta(R_2),$$

де $\beta(R_2) \to 0$ при $R_2 \to \infty$. Фіксуючи $R_1$ і спрямувавши $R_2$ до $\infty$, отримаємо $\langle u - \tilde{u} \rangle_{R_1} = 0$, тобто $u = \tilde{u}$ майже всюди на $Q_{R_1}$. На основі довільності $R_1$ $u = \tilde{u}$ майже всюди на $Q$. Теорему 2 доведено.

**4. Існування розв'язку.** Доведемо існування узагальненого розв'язку задачі (1)–(3) із вказаного в теоремі 2 класу єдиності, припустивши, що умови (2), (3) однорідні, тобто мають вигляд

$$u_i = 0 \text{ на } \Sigma^{(1)}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u,\nabla u)\nu_j + a_i u_i = 0 \text{ на } \Sigma^{(2)},\ i = \overline{1,N} \tag{21}$$

і права частина системи (1) задовольняє певні умови щодо поведінки на нескінченності.

Спочатку введемо деякі потрібні нам позначення. Нехай $\tau_1(\alpha), ..., \tau_M(\alpha)$, $t_0(\alpha)$ – розв'язок системи (8), який задовольняє названі вище умови, і для довільного $k \in \mathbb{N}$, $t_k = t_0(k)$, $\Omega^k = \Omega_{\tau(k)}$, $Q_k = \Omega^k \times (t_k, T)$, $\Sigma_k = \partial\Omega^k \times [t_k, T]$. Приймемо

$$\Lambda_k = \inf_{t,v} \left\{ \left[ \int\limits_{\Omega^k} E_\mu(v)\, dx \right] \left[ \int\limits_{\Omega^k} v^2\, dx \right]^{-1} \right\},$$

де нижня грань береться по всіх функціях $v = \mathrm{colon}(v_1, ..., v_N)$, компоненти яких належать простору $C^1(\overline{\Omega^k})$, і які дорівнюють нулю на $\partial\Omega^k \cap \Gamma^{(1)}$ та всіх $t \in [t_k, T]$;

$$p_k = \inf_{Q_k} p(x,t) > 0.$$

**Теорема 3.** *Нехай існують числа $c > 0$ і $\varepsilon > 0$ такі, що для довільних $k \in \mathbb{N}$*

$$\Lambda_k^{-1} \iint\limits_{Q_k} \sum_{i=1}^{N} [f_{i0}(x,t) - a_{i0}(x,t,0,0)]^2 \exp\{-2\mu t\}\, dxdt + \tag{22}$$

$$+ p_k^{-1} \iint\limits_{Q_k} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} [f_{ij}(x,t) - a_{ij}(x,t,0,0)]^2 \exp\{-2\mu t\}\, dxdt \leqslant C \cdot \exp\{(1-\varepsilon)k\}.$$

*Крім того, припустимо, що* $\frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\nu_i + a_i \geqslant 0$ *на* $\Sigma_k^{(2)}$, $i = \overline{1,N}$.

*Тоді існує узагальнений розв'язок $u$ задачі $(1)-(21)$, який належить класу єдиності, зазначеному в теоремі 2. Крім того, цей розв'язок справджує оцінку*

$$< u >_k \leqslant C_0 \exp\{(1-\varepsilon)k/2\}, \tag{23}$$

*де $C_0 > 0$ – стала, яка залежить тільки від $C$ і $\varepsilon$.*

*Доведення.* Розглянемо для кожного $k \in \mathbb{N}$ змішану задачу

$$u_{it}^{(k)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j} a_{ij}(x,t,u^{(k)},\nabla u^{(k)}) + a_{i0}(x,t,u^{(k)},\nabla u^{(k)}) =$$

$$= f_{i0}(x,t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_{ij}(x,t) \text{ в } Q_k, \quad i = \overline{1,N}, \tag{$1_k$}$$

$$u_i^{(k)} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_k^{(1)}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{$2_k$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u^{(k)},\nabla u^{(k)}) + a_i u_i^{(k)} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_k^{(2)}, \quad i = \overline{1,N}. \tag{$3_k$}$$

Узагальненим розв'язком задачі $(1_k)-(3_k)$ назвемо функцію $u^{(k)} = \mathrm{colon}(u_1^{(k)},...,u_N^{(k)})$, компоненти якої належать простору $\overset{o}{W}{}_2^{1,0}(\overline{Q}_k)$, яка задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint\limits_{Q_k} \sum_{i=1}^{N} \{-u_i^{(k)}\varphi_t + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u^{(k)},\nabla u^{(k)})\varphi_{ix_j} + a_{i0}(x,t,u^{(k)},\nabla u^{(k)})\varphi_i\} dxdt+$$

$$+\int\limits_{\Sigma_k^{(2)}} \sum_{i=1}^{N} a_i u_i^{(k)} \varphi_i \, ds = \iint\limits_{Q_k} \sum_{i=1}^{N} \{f_{i0}\varphi_i + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\varphi_{ix_j}\} \, dxdt \tag{$4_k$}$$

для довільних $\varphi_i \in W_{2,0}^{1,1}(Q_k)$, які дорівнюють нулю на $\Sigma_k^{(1)} \bigcup (\partial Q_k \cap Q)$, та $\varphi_i(x,T) = 0$, $i = \overline{1,N}$.

На підставі припущень з [8] випливає існування узагальненого розв'язку задачі $(1_k)-(3_k)$. Доозначимо $u^{(k)}$ нулем поза $Q_k$ і одержані функції позначимо знову через $u^{(k)}$. Аналогічно як у [7] доводять, що отримана послідовність $\{u^{(k)}\}$ збігається в нормі $\langle\cdot\rangle_m$ для кожного $m \in \mathbb{N}$ до деякої функції $u$, компоненти якої належать простору $W_{2,\mathrm{loc}}^{1,0}(\overline{Q})$, і ця функція є узагальненим розв'язком задачі (1),(21). Причому для $\langle u^{(k)}\rangle_k$ отримують таку оцінку:

$$\langle u^{(k)}\rangle_k \leqslant \sqrt{2C}\exp\{(1-\varepsilon)k/2\}. \tag{24}$$

Використовуючи (24) та результати теореми 1, після нескладних перетворень [7], отримаємо оцінку (23). Теорему 3 доведено.


1. Тихонов А.Н. *Теорема единственности для уравнения теплопроводности* // Матем. сб.—1935.— N 2.— С.199–196.
2. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений* // Успехи мат. наук.— 1976.— Т.31, N 6.— С.142–166.
3. Ивасишен С.Д. *О параболических граничных задачах без начальных условий* // Укр. мат. журн.— 1982.— Т.34, N 5.— С.547–552.

4. Бокало Н.М. *О задаче Фурье для квазилинейных параболических уравнений* // Успехи мат. наук.— 1984.— Т.39, N 4.— С.128–129.

5. Бокало Н.М. *О единственности решения задачи без начальных условий для нелинейных параболических уравнений* // Успехи мат. наук.— 1986.—Т.41, N 5.— С.199–200.

6. Бокало Н.М. О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // В кн.: Труды семинара им. И.Г.Петровского.— 1989. – Вып. 14 . — С.3–32.

7. Бокало Н.М. *Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений* // Дифференц. уравн.— 1994.— Т.30, N8.— С.1395–1402.

8. Шишков А.Е. *О существовании растущих на бесконечности обобщенных решений краевых задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений* // Укр. мат. журн.— 1986.— Т.37, N 4.— С.473–481.

9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.—736 с.

10. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.— 421 с.

11. Х.Гаевский, К.Грегер, К.Захариас. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978.— 321 с.

12. Сікорський В.М. *Задача Фур'є зі змішаною граничною умовою для квазілінійних параболічних рівнянь в необмежених областях* // Львів.—1995.— Деп. в ДНТБ України 16.08.95, N1957.– Ук95.

*Стаття надійшла до редколегії 23.06.96*

УДК 519.95

# ПРЯМІ Й ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В МОДЕЛЯХ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ В КАПІЛЯРНО–ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

В. А. Козицький

**V. A. Kozitskiy. Direct and inverse problems for the pseudoparabolic equation in models of the filtering of water in capillar-porous media.**

With the help of the exact solution of a characteristic problem for a pseudoparabolic equation the unique solvability of local and non-local problems for this equation is proved. Sufficient conditions of the unique solvability for non-local problems are obtained in terms of the coefficients of boundary conditions. Inverse boundary problems of the determination of the source depending of $t$ or $x$ in the pseudoparabolic equation are considered. The global existence and uniqueness theorems of a solution are proved.

Фільтрацію рідини в середовищах з подвійною пористістю [1], динаміку вологопереносу в грунтах [2] описує рівняння вигляду

$$Lu \equiv u_{xxt} - k(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + c(x,t)u_{xt} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = F(x,t). \qquad (1)$$

Крайові задачі для рівняння (1) вивчали D.Colton [3], В.А.Водохова [4], J.Cannon, Y.Lin [5], M.Majchrowski [6], M.Шхануков [7, 8] та ін. Праці [3,5–8] найбільш наближені до питань, які ми досліджували, а в їхній основі лежить аналог методу функції Рімана. За допомогою цього методу отримані умови існування та єдиності класичного розв'язку локальних і нелокальних крайових задач для рівняння (1), де

$$k_t, \eta_x, a_x, b, F \in C(\bar{Q}_T), c \equiv 0, \quad \bar{Q}_T = \{(x,t) : x \in [0,H], t \in [0,T]\}.$$

У праці [5] шляхом зведення до інтегро–диференціального рівняння доведено існування та єдиність класичного розв'язку характеристичної задачі для (1) у випадку неперервних коефіцієнтів.

У теорії фільтрації виникають також обернені задачі, наприклад, під час визначення фільтраційних параметрів грунтів за деякою інформацією про розв'язок відповідних прямих задач. Обернені задачі для рівняння (1) досліджували Б.С.Аблабеков

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35K70; Secondary 35R30.

[9], О.Мамаюсупов [10], M.Majchrowski [11]. У працях [9,10] досліджено обернену задачу відшукання вільного члена, залежного від t або x, а також задачу визначення коефіцієнта, залежного від часу, при невідомій функції для рівняння (1), якщо

$$Lu \equiv \beta(x,t)u_t - (k(x,t)(u_{xt} + u_x))_x + g(t)u\,,$$

і умовою перевизначення є значення розв'язку прямої задачі у фіксованій точці $x_0$ або в момент часу $t = T$.

У [11] досліджена обернена задача визначення вільного члена $F(x,t) = f(t)$ в рівнянні (1), де $k(x,t) = k(t)$, $\eta(x,t) = \eta = \text{const}$, $b(x,t) = b = const$, $c(x,t) = a(x,t) \equiv 0$ з умовою перевизначення $\int_0^l u(x,t)\,dx = h(t)$, $t \in [0,T]$, а також задача відшукання вільного члена, залежного від $x$, якщо $k(x,t) = k(x)$, $\eta(x,t) = \eta = \text{const}$, $a = a(x)$, $b = b(x)$, $c \equiv 0$ з умовою перевизначення $\int_0^T u(x,t)\,dt = h(x)$, $x \in [0,l]$. У працях [9–11] вивчали умови існування та єдиності класичного розв'язку.

У цій статті запропоновано інший метод дослідження локальних та нелокальних крайових задач з інтегральним членом $\alpha(t)\int_0^H u(x,t)\,dx$, а також досліджено обернену задачу відшукання залежного від $t$ або $x$ вільного члена рівняння (1) у випадку загальних умов перевизначення.

**1. Характеристична задача.** В області $Q_T$ для рівняння (1) розглянемо характеристичну задачу

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in [0,H], \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \nu(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Зробимо таке припущення.

**Припущення(A).** $k_t, c_t, \eta, a, b, F \in C(\bar{Q}_T);\ \ \mu, \nu \in C^1[0,T];\ \ u_0 \in C^2[0,H];$
$k(x,t) \geqslant k_0 > 0,\ \ (x,t) \in \bar{Q}_T;\ \ u_0(0) = \mu(0),\ \ \ u_0'(0) = \nu(0).$

**Означення.** *Функція $u(x,t)$ називається класичним розв'язком задачі (1)–(4), якщо $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ і вона справджує умови (1)–(4).*

Якщо виконується припущення (A), то задача (1)–(4) має єдиний класичний розв'язок [5].

Нехай $u(x,t)$ — класичний розв'язок задачі (1)–(4). Будемо шукати його у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^x \int_0^t [(x-\xi)\omega_1(t,\xi,\tau) + \omega_2(x,\xi,\tau) - (x-\xi)]v(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi + \\ + u_0(x) + \mu(t) - u_0(0) + x(\nu(t) - u_0'(0)), \tag{5}$$

де функція $\omega_1(t,\xi,\tau)$ є розв'язком задачі Коші

$$\omega_{1t}(t,\xi,\tau) + \eta(\xi,t)\omega_1(t,\xi,\tau) = 0,\ \omega_1(\tau,\xi,\tau) = 1,$$

а $\omega_2(x,\xi,\tau)$ — розв'язок задачі Коші

$$\omega_{2xx}(x,\xi,\tau)+c(x,\tau)\omega_{2x}(x,\xi,\tau)-k(x,\tau)\omega_2(x,\xi,\tau)=0, \quad \omega_2(\xi,\xi,\tau)=0,\, \omega_{2x}(\xi,\xi,\tau)=1.$$

Відшукавши похідні $u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}, u_{xxt}$ і підставивши їх в (1), одержимо рівняння для функції $v(x,t)$:

$$v(x,t)=\int_0^x\int_0^t A(x,t,\xi,\tau)v(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi+F(x,t)+g_1(x,t)+k(x,t)\mu'(t)- \\ -b(x,t)\mu(t)-(a(x,t)+xb(x,t))\nu(t)+(xk(x,t)-c(x,t))\nu'(t), \tag{6}$$

де

$$A(x,t,\xi,\tau)=-[-k(x,t)(x-\xi)\omega_{1t}(t,\xi,\tau)+\eta(x,t)\omega_{2xx}(x,\xi,\tau)+c(x,t)\omega_{1t}(t,\xi,\tau)+ \\ +a(x,t)(\omega_1(t,\xi,\tau)+\omega_{2x}(x,\xi,\tau)-1)+b(x,t)((x-\xi)\omega_1(t,\xi,\tau)+\omega_2(x,\xi,\tau)-(x-\xi)];$$
$$g_1(x,t)=-a(x,t)(u_0'(x)-u_0'(0))-\eta(x,t)u_0''(x)-b(x,t)g(x);$$
$$g(x)=u_0(x)-u_0(0)-xu_0'(0).$$

Рівняння (6) є рівнянням Вольтера другого роду стосовно $v(x,t)$ з неперервним ядром та вільним членом, а отже, має єдиний розв'язок у $C(\bar{Q}_T)$. Записавши розв'язок рівняння (6) через резольвенту і підставивши його в (5), отримаємо зображення розв'язку характеристичної задачі (1)-(4):

$$u(x,t)=\chi(x,t)\mu(t)+\lambda(x,t)\nu(t)+\int_0^t k_1(x,t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau+\int_0^t k_2(x,t,\tau)\nu(\tau)\,d\tau+g_2(x,t), \tag{7}$$

де

$$\begin{gathered} k_i(x,t,\tau)=\int_0^x\Bigg[p(x,t,\xi,\tau)P_i(\xi,\tau)-\frac{\partial\,[\,p(x,t,\xi,\tau)q_i(\xi,\tau)\,]}{\partial\tau}- \\ -\int_0^\xi\int_\tau^t p(x,t,\xi,t_1)R_i(\xi,t_1,s,\tau)\,dt_1\,ds\Bigg]\,d\xi,\ i=1,2; \\ q_1=k(\xi,\tau),\ q_2=\xi k(\xi,\tau)-c(\xi,\tau); \\ R_i(\xi,t_1,s,\tau)=R(\xi,t_1,s,\tau)z_i(s,\tau)+\frac{\partial\,[\,R(\xi,t_1,s,\tau)q_i(s,\tau)\,]}{\partial\tau},\ i=1,2; \\ z_1=b(s,\tau),\ z_2=a(s,\tau)+sb(s,\tau); \\ R(x,t,\xi,\tau)=\sum_{n=2}^{\infty}\int_\xi^x\int_\tau^t A_1(x,t,\alpha,\beta)A_{n-1}(\alpha,\beta,\xi,\tau)\,d\beta\,d\alpha+ \\ +A_1(x,t,\xi,\tau),\ \ A_1\equiv A(x,t,\xi,\tau); \end{gathered} \tag{8}$$

$$P_i(\xi,\tau) = -z_i(\xi,\tau) + \int_0^\xi A(\xi,\tau,s,\tau)q_i(s,\tau)\,ds,\ i=1,2;$$
$$p(x,t,\xi,\tau) = (x-\xi)\omega_1(t,\xi,\tau) + \omega_2(x,\xi,\tau) - (x-\xi);$$
$$g_2(x,t) = \int_0^x \int_0^t \left[p(x,t,\xi,\tau) + \int_\xi^x \int_\tau^t R(s,t_1,\xi,\tau)p(x,t,s,t_1)\,dt_1\,ds\right]\times$$
$$\times\left[F(\xi,\tau) + g_1(\xi,\tau)\right]d\tau\,d\xi -$$
$$-\int_0^x \left[p(x,t,\xi,0) + \int_0^t \int_\xi^x R(s,\tau,\xi,0)p(x,t,s,\tau)\,ds\,d\tau\right]\times$$
$$\times\left[u_0(0)q_1(\xi,0) + u_0'(0)q_2(\xi,0)\right]d\xi + g(x);$$
$$\chi(x,t) = 1 + \int_0^x \omega_2(x,\xi,t)k(\xi,t)\,d\xi;\quad \lambda(x,t) = x + \int_0^x \omega_2(x,\xi,t)(\xi k(\xi,t) - c(\xi,t))\,d\xi.$$

Безпосередньою перевіркою можна показати, що функції $\chi(x,t)$ і $\lambda(x,t)$ відповідно є розв'язками задач Коші:

$$\chi_{xx}(x,t) + c(x,t)\chi_x - k(x,t)\chi(x,t) = 0,\quad \chi(0,t) = 1,\ \chi_x(0,t) = 0; \tag{9}$$
$$\lambda_{xx}(x,t) + c(x,t)\lambda_x - k(x,t)\lambda(x,t) = 0\quad \lambda(0,t) = 0,\ \lambda_x(0,t) = 1. \tag{10}$$

Тому справедлива лема.

**Лема 1.** *Нехай виконується припущення (A). Тоді розв'язок $u(x,t)$ характеристичної задачі (1)–(4) допускає зображення (7),(8).*

**2. Нелокальні крайові задачі.** В області $Q_T$ для рівняння (1), коефіцієнти і вільний член якого задовольняють припущення **(A)**, розглянемо нелокальну крайову задачу

$$\begin{gathered}\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(H,t) + \alpha_3(t)u_x(0,t) + \alpha_4(t)\int_0^H u(x,t)\,dx = \varphi_1(t),\\ \beta_1(t)u(H,t) + \beta_2(t)u_x(0,t) + \beta_3(t)u_x(H,t) + \beta_4(t)\int_0^H u(x,t)\,dx = \varphi_2(t),\ t\in[0,T],\end{gathered} \tag{11}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\quad x\in[0,H]. \tag{12}$$

Зробимо таке припущення.

**Припущення (B).** *Нехай $\alpha_i,\beta_i \in C^1[0,T]$, $i=\overline{1,4}$; $\varphi_i \in C^1[0,T], i=1,2$; ранг матриці*

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$$

*дорівнює двом, а також виконуються умови узгодженості*

$$\alpha_1(0)u_0(0) + \alpha_2(0)u_0(H) + \alpha_3(0)u_0'(H) + \alpha_4(0)\int_0^H u_0(x)\,dx = \varphi_1(0),$$

$$\beta_1(0)u_0(H) + \beta_2(0)u_0'(0) + \beta_3 u_0'(H) + \beta_4(0)\int_0^H u_0(x)\,dx = \varphi_2(0).$$

Позначимо через $\Delta_{ij}$ визначники, складені з відповідних стовпців матриці $G$.

Для дослідження задачі (1),(11),(12) використаємо зображення (7),(8) розв'язку характеристичної задачі (1)–(4). Підставляючи (7) в (11), одержимо систему інтегральних рівнянь Вольтера стосовно $\mu$ і $\nu$:

$$D(t)\begin{pmatrix}\mu(t)\\ \nu(t)\end{pmatrix} = \int_0^t K(t,\tau)\begin{pmatrix}\mu(\tau)\\ \nu(\tau)\end{pmatrix}d\tau + \Psi(t), \tag{13}$$

де

$$D(t) = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\alpha_1(t) + \alpha_2(t)\chi(H,t)+\\ +\alpha_4(t)\int_0^H \chi(x,t)\,dx\end{matrix} & \begin{matrix}\alpha_2(t)\lambda(H,t) + \alpha_3(t)+\\ +\alpha_4(t)\int_0^H \lambda(x,t)\,dx\end{matrix} \\ \\ \begin{matrix}\beta_1(t)\chi(H,t) + \beta_3(t)\chi_x(H,t)+\\ +\beta_4(t)\int_0^H \chi(x,t)\,dx\end{matrix} & \begin{matrix}\beta_1(t)\lambda(H,t) + \beta_2(t)+\\ +\beta_3(t)\lambda_x(H,t)+\\ +\beta_4(t)\int_0^H \lambda(x,t)\,dx\end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$K(t,\tau) = -\begin{pmatrix} \begin{matrix}\alpha_2(t)k_1(H,t,\tau)+\\ +\alpha_4(t)\int_0^H k_1(x,t,\tau)\,dx\end{matrix} & \begin{matrix}\alpha_2(t)k_2(H,t,\tau)+\\ +\alpha_4(t)\int_0^H k_2(x,t,\tau)\,dx\end{matrix} \\ \\ \begin{matrix}\beta_1(t)k_1(H,t,\tau)+\\ +\beta_3(t)k_{1x}(H,t,\tau)+\\ +\beta_4(t)\int_0^H k_1(x,t,\tau)\,dx\end{matrix} & \begin{matrix}\beta_2(t)k_2(H,t,\tau)+\\ +\beta_3(t)k_{2x}(H,t,\tau)+\\ +\beta_4(t)\int_0^H k_2(x,t,\tau)\,dx\end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) - \alpha_2(t)g_2(H,t) - \alpha_4(t)\int_0^H g_2(x,t)\,dx \\ \varphi_2(t) - \beta_1(t)g_2(H,t) - \beta_3(t)g_{2x}(H,t) - \beta_4(t)\int_0^H g_2(x,t)\,dx \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці $D(t)$ має вигляд

$$\begin{aligned}\det D(t) = \Delta_{13} + \Delta_{23}\,\chi(H,t) + \Delta_{43}\,\chi_x(H,T) + \Delta_{53}\int_0^H \chi(x,t)\,dx+\\ +\left[\Delta_{12} + \Delta_{42}\,\chi_x(H,t) + \Delta_{52}\int_0^H \chi(x,t)\,dx\right]\lambda(H,t) + \Big[\Delta_{14} + \Delta_{24}\,\chi(H,t)+\\ +\Delta_{54}\int_0^H \chi(x,t)\,dx\Big]\lambda_x(H,t) + [\Delta_{15} + \Delta_{25}\,\chi(H,t) + \Delta_{45}\,\chi_x(H,t)]\int_0^H \lambda(x,t)\,dx.\end{aligned} \tag{14}$$

Якщо визначник (14) відмінний від нуля для всіх $t \in [0,T]$, то система (13) інтегральних рівнянь Вольтера другого роду стосовно $\mu(t)$ і $\nu(t)$ має єдиний розв'язок у $C^1[0,T]$. А це означає, що існує єдиний розв'язок відповідної характеристичної задачі.

Отже, справедлива лема.

**Лема 2.** *Нехай виконуються припущення (A),(B) і нехай* $\det D(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,T]$. *Нелокальна крайова задача (1),(11),(12) еквівалентна в класичному сенсі характеристичній задачі (1)–(4) тоді і тільки тоді, коли* $\mu(t)$ *і* $\nu(t)$ *є розв'язком системи інтегральних рівнянь (13).*

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови леми 2. Тоді нелокальна крайова задача (1),(11),(12) має єдиний класичний розв'язок.*

*Доведення.* В умовах теореми нелокальна крайова задача (1),(11),(12) еквівалентна характеристичній задачі (1)–(4), розв'язок якої існує і єдиний. Теорему доведено.

Розглянемо деякі крайові задачі для рівняння (1), коли умови теореми виконуються. Спочатку покажемо, що

$$\lambda(H,t) \neq 0,\ \lambda_x(H,t) \neq 0,\ \chi(H,t) \neq 0,\ \chi_x(H,t) \neq 0,\ \forall t \in [0,T].$$

З задачі Коші (10) випливає

$$\int_0^H \lambda(x,t)(\lambda_{xx} + c\lambda_x - k\lambda) \exp\left\{\int_0^x c(\xi,t)\,d\xi\right\} dx = \lambda(H,t)\lambda_x(H,t) \exp\left\{\int_0^H c(x,t)\,dt\right\} -$$
$$-\int_0^H (\lambda_x^2(x,t) + k(x,t)\lambda^2(x,t)) \exp\left\{\int_0^x c(\xi,t)\,d\xi\right\} dx = 0.$$

Якщо при деякому $\tau \in [0,T]$ $\lambda(H,\tau) = 0$ (або $\lambda_x(H,\tau) = 0$), то задача

$$\lambda_{xx}(x,\tau) + c(x,\tau)\lambda_x(x,\tau) - k(x,\tau)\lambda(x,\tau) = 0,$$
$$\lambda(0,\tau) = \lambda(H,\tau) = 0 \qquad (\text{або } \lambda(0,\tau) = \lambda_x(H,\tau) = 0)$$

має тільки нульовий розв'язок $\lambda(x,\tau) = 0$, що суперечить умові $\lambda_x(0,\tau) = 1$.

Аналогічно доводимо, що $\chi(H,t) \neq 0$, $\chi_x(H,t) \neq 0, \forall t \in [0,T]$. Крім того, для $\chi(x,t)$ отримуємо інтегральне рівняння Вольтера другого роду

$$\chi(x,t) = 1 + \int_0^x k(\xi,t)\chi(\xi,t)\,d\xi \int_\xi^x \exp\left(\int_s^\xi c(s_1,t)\,ds_1\right) ds,$$

звідки випливає, що $\chi(x,t) > 1$, $\chi_x(x,t) > 0$, $\forall t \in [0,T], \forall x \in (0,H]$. Зауважимо також, що $\lambda(x,t) > 0$, $\lambda_x(x,t) > 0$, $\forall t \in [0,T], \forall x \in (0,H]$.

**2.1.** В області $Q_T$ розглянемо задачу для рівняння (1) з такими умовами

$$\alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(H,t) = \varphi_1(t), \quad \beta_2(t)u_x(0,t) + \beta_3(t)u_x(H,t) = \varphi_2(t); \tag{15}$$
$$u(x,0) = u_0(x). \tag{16}$$

Задача (1),(15),(16) еквівалентна характеристичній задачі (1)–(4), де $\mu(t)$ і $\nu(t)$ є розв'язком системи рівнянь (13). Визначник матриці $D(t)$ у цьому випадку має вигляд

$$\det D(t) = \alpha_2(t)\beta_3(t)\left[\frac{\alpha_1(t)\beta_2(t)}{\alpha_2(t)\beta_3(t)} + \frac{\beta_2(t)\chi(H,t)}{\beta_3(t)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_1(t)\lambda_x(H,t)}{\alpha_2(t)} + \lambda_x(H,t)\chi(H,t) - \lambda(H,t)\chi_x(H,t)\right]. \tag{17}$$

Визначимо достатні умови, при яких задача (1),(15),(16) має єдиний розв'язок. Розглянемо функцію $\gamma(x,t) = \lambda_x(x,t)\chi(x,t) - \lambda(x,t)\chi_x(x,t)$. Враховуючи, що $\gamma(x,t)$ є розв'язком задачі Коші:

$$\gamma_x(x,t) + c(x,t)\gamma(x,t) = 0, \quad \gamma(0,t) = 1,$$

отримуємо $\gamma(x,t) > 0$, $x \in [0,H]$, $t \in [0,T]$. Із (17) випливає, що задача (1),(15),(16) має єдиний розв'язок у $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, якщо коефіцієнти $\alpha_i(t), \beta_{i+1}$, $i = 1,2$, задовольняють умови

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geqslant 0, \quad \beta_2(t)\beta_3(t) \geqslant 0, \quad \alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) \neq 0, \quad \beta_2^2(t) + \beta_3^2(t) \neq 0, \ t \in [0,T].$$

**2.2.** В області $Q_T$ розглянемо задачу для рівняння (1) з такими умовами

$$\alpha_1(t)u(0,t)+\alpha_4(t)\int_0^H u(x,t)\,dx=\varphi_1(t), \ \beta_1(t)u(H,t)+\beta_4(t)\int_0^H u(x,t)\,dx=\varphi_2(t); \tag{18}$$
$$u(x,0) = u_0(x). \tag{19}$$

Задача (1),(18),(19) еквівалентна до характеристичної задачі (1)–(4), де $\mu(t), \nu(t)$ є розв'язком системи (13). Дослідимо, коли визначник матриці $D(t)$ відмінний від нуля. Визначник матриці $D(t)$ має вигляд

$$\det D(t) = \alpha_4(t)\beta_1(t)\left[\frac{\alpha_1(t)\lambda(H,t)}{\alpha_4(t)} + \frac{\beta_1(t)\alpha_1(t)}{\beta_4(t)\alpha_4(t)}\int_0^H \lambda(x,t)\,dx\right] +$$
$$+\alpha_4(t)\beta_1(t)\left[\lambda(H,t)\int_0^H \chi(x,t)\,dx - \chi(H,t)\int_0^H \lambda(x,t)\,dx\right].$$

Розглянемо функцію

$$\delta(x,t) = \lambda(x,t)\int_0^x \chi(s,t)\,ds - \chi(x,t)\int_0^x \lambda(s,t)\,ds.$$

Легко перевірити, що $\delta(x,t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\delta_{xx} + c(x,t)\delta_x - k(x,t)\delta = \exp\left(-\int_0^x c(s,t)\,ds\right), \quad \delta(0,t) = 0, \quad \delta_x(0,t) = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\delta(x,t)=\int_0^x[k(\xi,t)\int_\xi^x \exp\Big(\int_s^\xi c(s_1,t)\,ds_1\Big)\,ds]\delta(\xi,t)\,d\xi+$$
$$+\int_0^x\int_\xi^x \exp\Big(-\int_0^s c(s_1,t)\,ds_1\Big)\,ds\,d\xi>0,\quad \forall x\in[0,H],t\in[0,T].$$

Отже, задача (1),(18),(19) має єдиний розв'язок в $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, якщо коефіцієнти $\alpha_1,\alpha_4$, $\beta_1,\beta_4$ задовольняють умови $\alpha_1(t)\alpha_4(t)\geqslant 0$, $\beta_1(t)\beta_4(t)\geqslant 0$, $\alpha_1^2+\alpha_4^2\neq 0$, $\beta_1^2+\beta_4^2\neq 0$, $\forall t\in[0,T]$.

**2.3.** В області $Q_T$ розглянемо задачу для рівняння (1) з такими умовами

$$u(0,t)=\gamma u(H,t),\ t\in[0,T]; \tag{20}$$
$$u_x(0,t)=\nu(t); \tag{21}$$
$$u(x,0)=u_0(x), \tag{22}$$

де $\gamma$ — деяка стала.

Задача (1),(20)–(22) еквівалентна характеристичній задачі, де $\mu(t)$ є розв'язком рівняння

$$(1-\gamma\chi(H,t))\mu(t)=\int_0^t(\gamma k_1(H,t,\tau))\mu(\tau)\,d\tau+h(t), \tag{23}$$

а $k_1(H,t,\tau)$, $h(t)=\gamma\lambda(H,t)\nu(t)+\gamma\int_0^t k_2(H,t,\tau)\nu(\tau)\,d\tau+\gamma g_2(H,t)$ — неперервно диференційовні функції. Оскільки $\chi(H,t)>1$, $\forall t\in[0,T]$, то рівняння (23) буде інтегральним рівнянням Вольтера другого роду для всіх

$$\gamma\notin[(\max_{[0,T]}\chi(H,t))^{-1},(\min_{[0,T]}\chi(H,t))^{-1}]\subset(0,1).$$

Визначаючи для таких $\gamma$ із рівняння (23) функцію $\mu(t)$, відшукуємо розв'язок задачі (1),(20)–(22).

Аналогічні результати можна отримати і у випадку крайових умов $u(0,t)=\mu(t)$, $u_x(0,t)=\gamma u_x(H,t)$.

## 3. Обернена задача визначення джерела в рівнянні (1).

**Задача 1.** *Знайти функції $(u(x,t),f(t))$ з класу $C^{2,1}(\bar{Q}_T)\times C[0,T]$, що задовольняють умови*

$$Lu=f(t)h(x,t)+g(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T, \tag{24}$$

$$u(0,t)=\mu(t),\qquad t\in[0,T], \tag{25}$$
$$u_x(0,t)=\nu(t),\qquad t\in[0,T], \tag{26}$$
$$u(x,0)=u_0(x),\qquad x\in[0,H], \tag{27}$$

$$(lu)(t)\equiv\gamma_1(t)u(x_0,t)+\gamma_2(t)\int_0^H\sigma_1(x,t)u(x,t)\,dx=\delta(t),\ t\in[0,T]. \tag{28}$$

**Задача 2.** *Знайти функції* $(u(x,t), f(x))$ *з класу* $C^{2,1}(\bar{Q}_T) \times C[0,H]$, *що задовольняють рівняння*

$$Lu = f(x)h(x,t) + g(x,t), \ \ (x,t) \in Q_T, \tag{29}$$

*умови (25)–(27) та умову перевизначення*

$$(Mu)(x) \equiv \alpha_1(x)u(x,t_0) + \alpha_2(x)\int_0^T \sigma_2(x,t)u(x,t)\,dt = \beta(x), \ \ x \in [0,H], \tag{30}$$

*де* $x_0$, $t_0$ — *фіксовані точки* $x_0 \in (0,H], t_0 \in (0,T]$.

Зробимо таке припущення.

**Припущення (С).** $\alpha_1^2(x) + \alpha_2^2(x) \neq 0, \ \ x \in [0,H], \ \ \alpha_i(x) \in C^2[0,H],$

$$\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t) \neq 0, \ t \in [0,T]; \quad \gamma_i(t) \in C^1[0,T], \quad i = 1,2; \quad \sigma_{1t}(x,t) \in C(\bar{Q}_T),$$

$$\sigma_{2xx}(x,t) \in C(\bar{Q}_T), \quad \beta(x) \in C^2[0,H], \quad \delta(t) \in C^1[0,T], \quad h(x,t), g(x,t) \in C(\bar{Q}_T);$$

$$\gamma_1(0)u_0(x_0) + \gamma_2(0)\int_0^H \sigma_1(x,0)u_0(x)\,dx = \delta(0),$$

$$\alpha_1(0)\mu(t_0) + \alpha_2(0)\int_0^T \sigma_2(0,t)\mu(t)\,dt = \beta(0),$$

$$\alpha_1'(0)\mu(t_0) + \alpha_1(0)\nu(t_0) + \alpha_2'(0)\int_0^T \sigma_2(0,t)\mu(t)\,dt +$$

$$+\alpha_2(0)\left(\int_0^T \sigma_{2x}(0,t)\mu(t)\,dt + \int_0^T \sigma_2(0,t)\nu(t)\,dt\right) = \beta'(0).$$

**3.1.** Розглянемо задачу 1. Оскільки задача 1 лінійна, то її розв'язок $(u,f)$ можна шукати у вигляді

$$(u,f) = (u^1, 0) + (u^2, f),$$

де $Lu^1 = g(x,t)$, $u^1(x,0) = u_0(x)$, $u^1(0,t) = \mu(t)$, $u^1_x(0,t) = \nu(t)$; $Lu^2 = f(t)h(x,t)$, $u^2(x,0) = 0$, $u^2(0,t) = u^2_x(0,t) = 0$, $lu^2 = \delta(t) - lu^1$. Звідси випливає, що досить дослідити однорідну задачу

$$Lu = f(t)h(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{31}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,H], \tag{32}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{33}$$

$$(lu)(t) = \delta(t), \qquad t \in [0,T], \quad \delta(0) = 0. \tag{34}$$

Користуючись зображенням (7),(8) розв'язку характеристичної задачі, розв'язок прямої задачі (31)–(33) запишемо у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^x \int_0^t G(x,t,\xi,\tau)h(s,\tau)f(\tau)\,d\tau\,d\xi, \tag{35}$$

де

$$G(x,t,\xi,\tau) = p(x,t,\xi,\tau) + \int_\xi^x \int_\tau^t p(x,t,s,t_1) R(s,t_1,\xi,\tau)\, dt_1\, ds,$$

а $p(x,t,\xi,\tau)$, $R(s,t_1,\xi,\tau)$ — задаються формулою (8). Продиференціювавши (34), враховуючи (35) та умову $G(x,t,s,t){=}\omega_2(x,s,t)$, отримуємо

$$(l\psi)(t)\cdot f(t) + \int_0^t G_1(t,\tau) f(\tau)\, d\tau = \delta'(t), \tag{36}$$

$$\text{де } \psi(x,t) = \int_0^x \omega_2(x,s,t) h(s,t)\, ds, \tag{37}$$

$$G_1(t,\tau) = \gamma_1(t) \int_0^{x_0} G_t(x_0,t,s,\tau) h(s,\tau)\, ds + \gamma_1'(t) \int_0^{x_0} G(x_0,t,s,\tau) h(s,\tau)\, ds +$$

$$+\gamma_2(t) \int_0^H \sigma_1(x,t)\, dx \int_0^x G_t(x,t,s,\tau) h(s,\tau)\, ds + \gamma_2(t) \int_0^H \sigma_{1t}(x,t)\, dx \times$$

$$\times \int_0^x G(x,t,s,\tau) h(s,\tau)\, ds + \gamma_2'(t) \int_0^H \sigma_1(x,t)\, dx \int_0^x G(x,t,s,\tau) h(s,\tau)\, ds.$$

**Лема 3.** *Нехай виконуються припущення (A) і (C). Якщо $(u, f)$ — розв'язок задачі (31)–(34), то $f(t)$ є розв'язком рівняння (36). Навпаки, якщо $f(t)$ — розв'язок рівняння (36), то $(u, f)$, де $u$ визначається формулою (35), є розв'язком задачі (31)–(34).*

*Доведення.* Першу частину леми 3 уже доведено. Навпаки, нехай $f(t)$ — розв'язок рівняння (36). Тоді, підставляючи $f(t)$ в (35), отримуємо функцію $u(x,t)$ і перевіркою визначаємо, що функція $u(x,t)$ справджує умови (31)–(33). Потрібно довести, що $(lu)(t) = \delta(t)$. Нехай $(lu)(t) = \delta_1(t) \neq \delta(t)$. Тоді $\delta_1'(t) - \delta'(t) = 0$. Згідно з припущенням (C) маємо, що $\delta_1(0) - \delta(0) = 0$. Отже, $\delta_1(t) - \delta(t) \equiv 0,\ t \in [0,T]$.

Тому задача (31)–(34) однозначно розв'язна тоді і тільки тоді, коли однозначно розв'язне інтегральне рівняння (36) стосовно $f(t)$. Лему доведено.

Функція $\psi(x,t)$, що визначається формулою (37), є розв'язком задачі Коші:

$$\psi_{xx} + c(x,t)\psi_x - k(x,t)\psi = h(x,t), \quad \psi(0,t) = 0, \quad \psi_x(0,t) = 0. \tag{38}$$

Якщо $(l\psi)(t) \neq 0,\ \forall t \in [0,T]$, то для $f(t)$ отримуємо рівняння Вольтера другого роду з неперервним ядром $\dfrac{1}{(l\psi)(t)} G_1(t,\tau)$.

Отже, справедлива теорема.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються припущення (A),(C) і $(l\psi)(t) \neq 0,\ \forall t \in [0,T]$. Тоді розв'язок оберненої задачі 1 існує і єдиний.*

Розглянемо тепер задачу 1 при інших крайових умовах, замінивши умову (26) такою

$$u(H,t) = \varphi(t),\ t \in [0,T], \tag{39}$$

де $\varphi \in C^1[0,T]$, $\varphi(0) = u_0(H)$. Оскільки задача 1 лінійна, то для доведення теореми про її розв'язність достатньо довести існування і єдиність розв'язку оберненої задачі відшукання функцій $(u, f)$ з умов

$$Lu = f(t)h(x,t), \tag{40}$$

$$u(x,0) = 0, \tag{41}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{42}$$

$$u(H,t) = 0, \tag{43}$$

$$(lu)(t) = \delta(t). \tag{44}$$

Розв'язок прямої задачі (40)–(43) будемо шукати у вигляді (7),(8)

$$u(x,t) = \lambda(x,t)\nu(t) + \int_0^t k_2(x,t,\tau)\nu(\tau)\,d\tau + \int_0^x \int_0^t G(x,t,s,\tau)h(s,\tau)f(\tau)\,d\tau\,ds, \tag{45}$$

де функція $G(x,t,s,\tau)$ визначається з формули (35).

Підставимо рівність (45) в умову (43). Отримавши рівняння Вольтера другого роду для визначення $\nu(t)$, запишемо розв'язок цього рівняння через резольвенту $R_1(t,\tau)$. Тоді з (45) випливає, що

$$u(x,t) = \int_0^t G_2(x,t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{46}$$

де

$$\begin{aligned} G_2(x,t,\tau) = \frac{\lambda(x,t)}{-\lambda(H,t)} \int_0^H G(H,t,s,\tau)h(s,\tau)\,ds + \int_0^x G(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,ds + \\ + \int_\tau^t \left[ k_2(x,t,\tau_1) \int_0^H \frac{G(H,\tau_1,s,\tau)}{-\lambda(H,\tau_1)} h(s,\tau)\,ds + \frac{\lambda(x,t)}{-\lambda(H,t)} \int_0^H G(H,\tau_1,s,\tau) \times \right. \\ \left. \times R(t,\tau_1)h(s,\tau)\,ds + k_2(x,t,\tau_1) \int_0^H \int_\tau^{\tau_1} R_1(\tau_1,\eta) \frac{G(H,\eta,s,\tau)}{-\lambda(H,\eta)} h(s,\tau)\,d\eta\,ds \right] d\tau_1. \end{aligned}$$

Диференціюючи (44) за t і враховуючи (46), маємо

$$(l\psi)(t)f(t) + \int_0^t G_3(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = \delta'(t), \tag{47}$$

де

$$\psi(x,t) = G_2(x,t,t) = \frac{\lambda(x,t)}{-\lambda(H,t)} \int_0^H \omega_2(H,s,t)h(s,t)\,ds + \int_0^x \omega_2(x,s,t)h(s,t)\,ds,$$

$$\begin{aligned} G_3(t,\tau) = \gamma_1(t)G_{2t}(x_0,t,\tau) + \gamma_2(t)\int_0^H \sigma_1(x,t)G_{2t}(x,t,\tau)\,dx + \gamma_1'(t)G_2(x_0,t,\tau) + \\ + \gamma_2(t)\int_0^H \sigma_{1t}(x,t)G_2(x,t,\tau)\,dx + \gamma_2'(t)\int_0^H \sigma_1(x,t)G_2(x,t,\tau)\,dx. \end{aligned} \tag{48}$$

Безпосередньою перевіркою можна показати, що функція $\psi(x,t)$ є розв'язком крайової задачі

$$\psi_{xx} + c(x,t)\psi_x - k(x,t)\psi = h(x,t), \quad \psi(0,t) = \psi(H,t) = 0.$$

Оскільки обернена задача (40)–(44) є еквівалентна рівнянню Вольтера другого роду (47), то справедлива така теорема.

**Теорема 3.** *Нехай виконуються припущення (A),(C) і $(l\psi)(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,T]$, де $\psi(x,t)$ визначається за формулою (48). Тоді розв'язок оберненої задачі (24),(25), (27),(28),(39) існує і єдиний.*

Зауважимо, що аналогічно можна отримати умови розв'язності оберненої задачі 1 і при інших крайових умовах. Умови розв'язності, якщо виконуються припущення (A) і (C), полягають в нерівності нулю дії оператора $l$ на функцію $\psi(x,t)$, яка є розв'язком рівняння

$$\psi_{xx} + c(x,t)\psi_x - k(x,t)\psi = h(x,t)$$

і задовольняє відповідні крайові умови.

**3.2.** Розглянемо задачу 2. Оскільки ця задача лінійна, то досить розглянути задачу

$$Lu = f(x)h(x,t); \tag{49}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(0,t) = 0; \tag{50}$$

$$(Mu)(t) = \beta(x),\ \beta(0) = \beta'(0) = 0. \tag{51}$$

Двічі диференціюючи умову (51) за $x$ і враховуючи (35) із заміною $f(t)$ на $f(x)$, маємо

$$(M\psi)(x)f(x) + \int_0^x \Omega(x,s)f(s)\,ds = \beta''(x), \tag{52}$$

$$\text{де } \psi(x,t) = \int_0^t \omega_1(t,x,\tau)h(x,\tau)\,d\tau, \tag{53}$$

$$\Omega(x,s) = \alpha_1(x)\int_0^{t_0} G_{xx}(x,t_0,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau + \alpha_2(x)\int_0^T \sigma_2(x,t)\,dt\times$$
$$\times\int_0^t G_{xx}(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau + 2\left[\alpha_1'(x)\int_0^{t_0} G_x(x,t_0,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_0^T (\alpha_2(x)\sigma_2(x,t))_x\,dt\int_0^t G_x(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau\right] + \alpha_1''(x)\times$$
$$\times\int_0^{t_0} G(x,t_0,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau + \int_0^T (\alpha_2(x)\sigma_2(x,t))_{xx}\,dt\int_0^t G(x,t,s,\tau)h(s,\tau)\,d\tau.$$

**Лема 4.** *Нехай виконуються припущення (A),(C). Якщо $(u,f)$ — розв'язок задачі (49)–(51), то $f$ — розв'язок рівняння (52). Навпаки, якщо $f$ — розв'язок рівняння*

*(52), то $(u,f)$ — розв'язок задачі (49)–(51), де $u$ визначається за формулою (35) з заміною $f(t)$ на $f(x)$.*

*Доведення.* Доведення леми 4 аналогічне до доведення леми 3. Покажемо лише, що $(Mu)(x) = \beta(x)$. Нехай $(Mu)(x) = \beta_1(x) \neq \beta(x)$, тоді для $\beta_2(x) = \beta_1(x) - \beta_(x)$ отримуємо задачу $\beta_2''(x) = 0$, $\beta_2(0) = \beta_2'(0) = 0$. Звідси випливає, що $\beta(x) \equiv \beta_1(x), x \in [0,H]$. Лему доведено.

З леми 4 випливає, що достатньо визначити умови розв'язності рівняння (52).

Легко перевірити, що функція $\psi(x,t)$, яка задається формулою (53), є розв'язком задачі Коші:

$$\psi_t(x,t) + \eta(x,t)\psi(x,t) = h(x,t), \ \psi(x,0) = 0.$$

Отже, якщо $(M\psi)(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,H]$, то для знаходження $f(x)$ отримуємо рівняння Вольтера другого роду з неперервними функціями $\frac{1}{(M\psi)(x)}\Omega(x,s)$, $\quad \frac{1}{(M\psi)(x)}\beta''(x)$. Тому справедлива теорема.

**Теорема 4.** *Нехай виконуються припущення (A),(C) і $(M\psi)(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,H]$. Тоді розв'язок задачі 2 існує і єдиний.*

Зауважимо, що для знаходження функції $f(x)$ оберненої задачі 2 з іншими крайовими умовами отримуємо рівняння

$$(M\psi)(x)f(x) + \int_0^x \Omega_1(x,s)f(s)\,ds + \int_0^H \Omega_2(x,s)f(s)\,ds = \beta''(x), \tag{54}$$

де $\psi(x,t)$ — задається формулою (53), $\Omega_1(x,s)$, $\Omega_2(x,s)$ – неперервні задані функції та твердження, аналогічне до леми 4. На підставі цього твердження обернена задача 2 з іншими крайовими умовами еквівалентна рівнянню (54), яке при $(M\psi)(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,H]$ є рівнянням Фредгольма другого роду. Для цих задач вдалося визначити тільки умову фредгольмовості $(M\psi)(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,H]$.


1. Barenblatt G.I.,Zheltov I.P., Kochina I.N. *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks* // J. Appl. Math. Mech.— 1960.—N 24.— P.1286–1303.
2. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.— 352 с.
3. Colton D. *Pseudoparabolic equations in one space variable* // J. Differen. Equattions.— 1972.— N 12.— P. 559–565.
4. Водохова В.А.*Краевая задача с нелокальным условием А.М.Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса* // Дифференц. уравнения.— 1982.—Т.18, N 12.— С. 280–285.
5. Cannon J.R., Yanpinq Lin. *Classical and Weak Solutions for One–Dimensional Pseudo–Parabolic Equations with Typical Boundary Data* // Annali di Matem. Pura ed Applicata.— 1988. — N 152.— P. 375–385.

6. Majchrowski M. *On non-local problems for pseudoparabolic equattions* // Z. Anal. und Anwed.— 1988. — Vol.7, N 4.— P. 377–383.

7. Шхануков М.Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающие при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах* // Дифференц. уравнения.—1982.— Т.18, N 4.— С. 689–698.

8. Шхануков М.Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений* // Дифференц. уравнения.—1983.— Т.19, N 1.—С. 145–152.

9. Аблабеков Б.С. *Одномерные обратные задачи для уравнения фильтрации жидкости в трещиноватой породе и приближенные методы решения* // В сб. Исслед. по интегро–дифференц. уравнениям.— Фрунзе: 1988. — Вып. 21.— С. 273–280.

10. Аблабеков Б.С., Мамаюсупов О.Ш. *Разностные схемы для обратной задачи фильтрации жидкости в пористой среде* // Матер. 9 респ. конф. молодых ученых.— Фрунзе:, 1987.— С. 42.

11. Majchrowski M. *On inverse problems with nonlocal condition for parabolic systems of partial differential equations and pseudoparabolic equations.* // Demonstr. matem.— 1993. — Vol. 26, N 1, 1993.— P. 255–275.

*Стаття надійшла до редколегії 29.06.96*

УДК 517.95

# ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

М. О. Колінько, С. П. Лавренюк

**M. O. Kolinko, S. P. Lavrenyuk. Uniqueness of a solution of the Fourier problem for a nonlinear pseudoparabolic system.** In the article some sufficient conditions of uniqueness of the weak solution of the problem without initial data for one nonlinear pseudoparabolic system, independent of the behavior of a solution, when the time approaches to minus infinity are obtained. The case of homogeneous boundary values of Dirichlet and a bounded domain on space variables is considered.

Нехай $\Omega$ – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T < \infty$; $S_T = \partial\Omega \times (-\infty, T)$. Розглянемо в $Q_T$ систему рівнянь

$$\mathcal{A}(u) \equiv u_t + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} H_\alpha(x,t) D^\alpha u -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) u_{x_i t})_{x_i} + \mathcal{B}(u) + G(x,t)u = \sum_{|\alpha|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t) \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \dots, l-1, \tag{2}$$

де $\mathcal{B}(u) = -\sum\limits_{i=1}^{n} (C_i(x)\theta_i(u))_{x_i}$, $l \geqslant 1$, $A_{\alpha\beta}$, $B_{ij}$, $H_\alpha$, $G$ — квадратні матриці розміру $N$; $C_i(x) = \operatorname{diag}\{c_1^i(x), \dots, c_N^i(x)\}$, $\theta_i(u) = \operatorname{colon}(|u_{1,x_i}|^{p-2}u_{1,x_i}, \dots, |u_{N,x_i}|^{p-2}u_{N,x_i})$, $i = 1, \dots, n$; $p > 2$; $u = \operatorname{colon}(u_1, \dots, u_N)$; $F_\alpha = \operatorname{colon}(f_{1\alpha}, \dots, f_{N\alpha})$, $|\alpha| \leqslant 1$; $\nu$ — зовнішня нормаль до $S_T$ та

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 12345.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP) Міжнародного фонду "Відродження", грант N APU 061062

Метою нашої праці є визначення умов єдиності розв'язку задачі Фур'є (задачі без початкових умов) (1), (2). Зауважимо, що задачу Фур'є для лінійних еволюційних рівнянь і систем досліджували раніше багато авторів [1 – 11]. У цих працях виділено клас єдиності та існування розв'язків задачі Фур'є у різних функціональних просторах. Зокрема, для єдиності розв'язку потрібно, щоб при $t \to -\infty$ розв'язок зростав не швидше ніж $\exp(-at)$, причому стала $a$ залежить від даних задачі. Для нелінійних параболічних рівнянь у роботах [12 – 13] отримано умови існування і єдиності розв'язку задачі Фур'є незалежно від поведінки при $t \to -\infty$.

Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються такі умови.

**Умова (A).** *Для всіх* $w \in (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta w, D^\alpha w)dx \geqslant a_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w|^2 dx,$$

*де* $A_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l$ *та* $a_0 > 0$.

**Умова (B).** *Для всіх* $\xi_i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1,\dots,n$ *і майже скрізь в* $Q_T$

$$\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)\xi_i, \xi_j) \geqslant b_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad \sum_{i,j=1}^n \Big(B_{ijt}(x,t)\xi_i, \xi_j\Big) \leqslant b_1(t) \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2,$$

*де* $b_0 > 0$; $B_{ij}, B_{ijt} \in L^\infty(Q_T)$; $B_{ij}(x,t) = B_{ji}(x,t)$; $B_{ij}(x,t) = B^*_{ij}(x,t)$, $i,j = 1,\dots,n$ *та* $b_1(t) \in L^\infty(-\infty,T)$.

**Умова (C).** *Нехай* $C_i \in L^\infty(\Omega)$ *та майже скрізь у* $\Omega$ *маємо* $c^i_k(x) \geqslant c_0 > 0$, *де* $i = 1,\dots,n$ *та* $k = 1,\dots,N$.

**Умова (G).** *Для всіх* $\xi \in \mathbb{R}^N$ *і майже скрізь у* $Q_T$ *виконується нерівність*

$$(G(x,t)\xi,\xi) \geqslant g_0(t)|\xi|^2,$$

*де* $G \in L^\infty(Q_T)$ *та* $g_0 \in L^\infty(-\infty,T)$.

**Умова (H).** *Нехай для всіх таких* $\alpha$, *що* $1 \leqslant |\alpha| \leqslant l$, *справедливо* $H_\alpha \in L^\infty(Q_T)$.

**Умова (F).** *Нехай* $F_\alpha(x,t) \in L^2_{loc}((-\infty,T];(L^2(\Omega))^N)$ *для* $0 \leqslant |\alpha| \leqslant l$.

Тут через $(\cdot,\cdot)$ позначено скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^N$. Введемо також позначення

$$g_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad g_0(t) \geqslant 0, \\ g_0(t), & \text{якщо} \quad g_0(t) < 0, \end{cases} \quad g_2 = \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} g_1(\tau),$$

$$h_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} \|H_\alpha(x,\tau)\|^2, \quad h_1 = \inf_{(-\infty,T)} h_0(t).$$

**Означення.** *Функцію $u(x,t)$, яка задовольняє включення*

$$u \in L^2_{loc}((-\infty,T];(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N) \cap L^p_{loc}((-\infty,T];(\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N),\ u_t \in L^2_{loc}((-\infty,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$$

*та для всіх функцій $v \in (C_0^\infty(Q_T))^N$ рівність*

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg[ (u_t, v) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t) u_{x_i t}, v_{x_j}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^n (C_i(x)\theta_i(u), v_{x_i}) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} (H_\alpha(x,t) D^\alpha u, v) + (G(x,t)u, v) \Bigg] dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha| \leqslant l} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v)\, dxdt$$

*назвемо узагальненим розв'язком задачі (1),(2).*

Зауважимо, що у випадку виконання умови $(B)$ у просторі $(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N$ можна ввести еквівалентні норми:

$$\|u\|^{(1)}_{(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N} = \left( \int\limits_\Omega |u_x|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{де } |u_x|^2 = \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2;$$
$$\|u\|^{(2)}_{(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N} = \left( \int\limits_\Omega \left( |u|^2 + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t) u_{x_i}, u_{x_j}) \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Надалі використаємо відомі нерівності Фрідріхса ([14], с. 50)

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2\, dx \leqslant \gamma_{l,j} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2\, dx, \tag{3}$$

справедливі для будь-яких $v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$ , де $j = 0, \ldots, l,$, а сталі $\gamma_{l,j}$ залежать від $\Omega, l, n$.

**Теорема.** *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови $(A)$, $(B)$, $(C)$, $(G)$, $(H)$, $(F)$ і, крім того,*

$$a_0 - \left( h_1 \gamma_{l,0} \sum_{j=1}^l \gamma_{l,j} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \gamma_{l,1} \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} b_1(\tau) + \gamma_{l,0}\, g_2 > 0.$$

*Тоді задача (1), (2) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

*Доведення.* Нехай задача (1), (2) має два узагальнені розв'язки $u^1(x,t)$ і $u^2(x,t)$. Тоді, очевидно, для функції $u(x,t) = u^1(x,t) - u^2(x,t)$ виконується рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[(u_t, v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)u_{x_it}, v_{x_j}) + \\ + \sum_{i=1}^{n}(C_i(x)(\Theta_i^1(u^1) - \Theta_i^2(u^2)), v_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) + (G(x,t)u, v)\Big]\,dxdt = 0 \tag{4}$$

для довільної функції $v \in (C_0^\infty(Q_{t_1,t_2}))^N$ та при довільних фіксованих $t_1, t_2(-\infty < t_1 < t_2 < T)$. Тут $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$;

$$\Theta_i^j(u^j) = \mathrm{colon}(|u^j_{1,x_i}|^{p-2}u^j_{1,x_i}, \ldots, |u^j_{N,x_i}|^{p-2}u^j_{N,x_i}), \quad j = 1,2; \quad i = 1,\ldots,n.$$

Тоді рівність (4) справджується і для всіх

$$v \in L^2((t_1,t_2); (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N) \cap L^p((t_1,t_2); (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N).$$

Візьмемо в (4) за $v(x,t)$ функцію $u(x,t)$. Тоді отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[(u_t, u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u, D^\alpha u) + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)u_{x_it}, u_{x_j}) + \\ + \sum_{i=1}^{n}(C_i(x)(\Theta_i^1(u^1) - \Theta_i^2(u^2)), u_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha u, u) + (G(x,t)u, u)\Big]\,dxdt = 0. \tag{5}$$

Перетворюючи й оцінюючи кожний член рівності (5) на підставі умов теореми, маємо

$$\Im_1 = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (u_t, u)\,dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |u|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |u|^2\,dx;$$

$$\Im_2 = \int\limits_{\Omega_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u, D^\alpha u)\,dxdt \geqslant a_0 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2\,dxdt, \quad \Omega_t = Q \cap \{\tau = t\};$$

$$\Im_3 = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)u_{x_it}, u_{x_j})\,dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t_2)u_{x_i}, u_{x_j})\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t_1)u_{x_i}, u_{x_j})\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ijt}(x,t)u_{x_i}, u_{x_j})\,dxdt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t_2)u_{x_i}, u_{x_j})\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t_1)u_{x_i}, u_{x_j})\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} b_1(t)\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dxdt.$$

Для оцінки інтеграла

$$\Im_4 = \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} (C_i(x)(\Theta_i^1 - \Theta_i^2), u_{x_i})\, dxdt$$

скористаємося умовами (B), (C), лемою 1.2 ([15], с.60) і нерівністю Гельдера

$$\Im_4 \geqslant c_0 2^{2-p} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} |u_{j,x_i}|^p\, dxdt \geqslant \mu_0 \int\limits_{\Omega_t} |u_x|^p\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \mu_1 \Bigg( \int\limits_{\Omega_t} |u_x|^2\, dx \Bigg)^{\frac{p}{2}} \geqslant \mu_2 (\|u\|^{(2)}_{(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N})^p, \quad \mu_2 > 0.$$

Далі

$$\Im_5 = \int\limits_{\Omega_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} (H_\alpha(x,t) D^\alpha u, u)\, dxdt \leqslant \int\limits_{\Omega_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} \|H_\alpha(x,t)\|\; |D^\alpha u|\, |u|\, dxdt,$$

де $\|H_\alpha(x,t)\|$ — евклідова норма матриці $H_\alpha(x,t)$. Враховуючи нерівність Коші, оцінки (3) і умови теореми, отримаємо

$$\Im_5 \leqslant \left( h_0(t) \gamma_{l,0} \sum_{j=1}^{l} \gamma_{l,j} \right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u|^2\, dx;$$

$$\Im_6 = \int\limits_{\Omega_t} (G(x,t)u, u)\, dxdt \geqslant g_0(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} |u|^2\, dx.$$

Перепишемо рівність (5) у вигляді

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_2}} \Bigg[ |u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t_2) u_{x_i}, u_{x_j}) \Bigg] dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_1}} \Bigg[ |u|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t_1) u_{x_i}, u_{x_j}) \Bigg] dx =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \Bigg[ \int\limits_{\Omega_t} \Bigg( - \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u, D^\alpha u) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ijt}(x,t) u_{x_i}, u_{x_j}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (C_i(x)(\Theta_i^1 - \Theta_i^2), u_{x_i}) - \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} (H_\alpha(x,t) D^\alpha u, u) - (G(x,t)u, u) \Bigg) dx \Bigg] dt. \qquad (6)$$

Оскільки (6) справджується для всіх $t_1, t_2 \in (-\infty, T)$, то з неї отримаємо майже для всіх $t \in (-\infty, T)$ рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}y(t)+\int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u,D^\alpha u)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ijt}(x,t)u_{x_i},u_{x_j})+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(C_i(x)(\Theta_i^1-\Theta_i^2),u_{x_i})+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha u,u)+(G(x,t)u,u)\Bigg]dx=0, \qquad (7)$$

де

$$y(t)=\int\limits_{\Omega_t}\left[|u|^2+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)u_{x_i},u_{x_j})\right]dx.$$

На підставі оцінок інтегралів $\Im_2,\ldots,\Im_6$ з рівності (7) випливає нерівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}y(t)+\mu_2(y(t))^{\frac{p}{2}}+ \qquad (8)$$

$$+\left[\frac{1}{\gamma_{l,1}}\left(a_0-\left(h_0(t)\gamma_{l,0}\sum_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}\right)^{\frac{1}{2}}+\gamma_{l,0}g_1(t)\right)-\frac{1}{2}b_1(t)\right]\int\limits_{\Omega_t}|u_x|^2\,dx\leqslant 0$$

для майже всіх $t\in(-\infty,T)$. Згідно з умовами теореми існує таке число $\tau_0\in(-\infty,T)$, що для всіх $t\in(-\infty,\tau_0)$ виконується нерівність

$$a_0-\left(h_0(t)\gamma_{l,0}\sum_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}\right)^{\frac{1}{2}}+\gamma_{l,0}g_1(t)-\frac{1}{2}\gamma_{l,1}b_1(t)\geqslant 0.$$

Тому з (8) на проміжку $t\in(-\infty,\tau_0)$ отримуємо диференціальну нерівність

$$\frac{dy(t)}{dt}+2\mu_2(y(t))^{p/2}\leqslant 0.$$

Звідси на підставі леми 1.1 ([12], с.10) випливає, що $y(t)=0$ майже для всіх $t\in(-\infty,\tau_0)$. Далі не складно показати, що $y(t)=0$ майже скрізь у $[\tau_0,T]$. Отже, майже скрізь в $Q_T$ маємо $u(x,t)=0$, тобто єдиність узагальненого розв'язку задачі (1),(2) доведена.


1. Олейник О.А.,Иосифьян Г.А.*Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений* //Успехи мат. наук.— 1976.— Т.31, N6.— С.142–166.

2. Ивасишен С.Д. *О параболических граничных задачах без начальных условий* // Укр. мат. журн.— 1982.— Т.34, N5.— С. 547–552.

3. Кадыров Р.Р., Жураев Б.Б.*О классах единственности решений краевых задач без начальных условий для параболических уравнений высшего порядка* //Изв. АН УзССР, сер. физ.– мат. наук.— 1985.— N2.— С.23–29.

4. Лавренюк С.П.*Задача для одного эволюционного уравнения в неограниченном по времени цилиндре* // Укр. мат. журн.— 1990.— Т.42, N11. — С.1481–1486.

5. Лавренюк С.П.*Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единственности* // Нелинейные граничные задачи.— 1993.— Вып. 5.— С. 53–58.

6. Кирилич В.М., Мишкіс А.Д.*Крайова задача без початкових умов для лінійної одновимірної системи рівнянь гіперболічного типу* // Доп. АН УРСР, сер.А.— 1991.— N5.— С.8–10.

7. Ивасишен С.Д.*О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий* // Дифференц. уравнения. - 1978.— Т.14, N 2.— С. 361–363.

8. Олейник О.А.*О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях* // Успехи мат. наук.— 1975.— Т.30, N2.— С. 219–220.

9. Олейник О.А., Радкевич Е.В.*О поведении решений общих параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях* // Докл. АН СССР.— 1975.— Т.220, N5.— С. 1027–1030.

10. Олейник О.А., Радкевич Е.В.*Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений* // Функциональный анализ и его прилож.— 1974.— Т.8, N4.— С. 59–70.

11. Лавренюк С.П.*Про единість розв'язку задачі без початкових умов для одного еволюційного рівняння* // Вісн. Львів. ун–ту. Сер. мех.–матем.— 1993.— Вип. 38.— С.3–6.

12. Бокало Н.М.*О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Тр. сем. им. И.Г.Петровского. 1989.— Т.14.— С.3–44.

13. Бокало Н.М.*Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности* // Сиб. мат. журн. – 1993.— Т.34, N4.— С.33–40.

14. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1978.—336 с.

15. Лионс Ж.–Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.— 608 с.

*Стаття надійшла до редколегії 03.06.96*

УДК 517.946

# ТРИТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

І. С. Клюс, Б. Й. Пташник

**I. S. Klyus, B. Jo. Ptashnyk. The three-point problem for a wave equation.** The classical correctness of the problem about finding of the solution of the uniform equation of fluctuation of the string according to its three photographs has been investigated. The existences and uniquenesses of the solution have been conditionally determined, which have theoretical–numerical character. The investigation of the problem is connected with the problem of small denominators for estimation from below of which the metric approach is used.

**1. Формулювання задачі.** В області $D = \{(t, x), 0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}\}$ розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

$$u(t_j, x) = g_j(x), \quad j = 1, 2, 3; \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant T, \tag{2}$$

яка полягає в з'ясуванні процесу коливань струни за трьома її фотографіями. Дослідимо питання класичної коректності задачі (1), (2).

Задачу з багатоточковими умовами за часовою змінною в області $Q_p = \{(t, x), 0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^p, p \geqslant 1\}$ для гіперболічних рівнянь $n$-го порядку, коли задані значення шуканої функції для $n$ моментів часу $t_1, \ldots, t_n$, $n \geqslant 2$, досліджували в працях [1-6]. Ця задача, на відміну від задачі Коші, взагалі, не буде коректною, якщо на розв'язок не накласти ще деяких додаткових умов. Зокрема, задача про визначення розв'язку рівняння (1), коли задані лише дві із вказаних умов (2), є некоректна в класі обмежених функцій [7; 5, гл. 2]. Наприклад, задача з однорідними умовами $u(t_1, x) = u(t_2, x) = 0$ для рівняння (1) має нетривіальні розв'язки вигляду $u(t, x) = p(x + t) - p(x - t + 2t_1)$, де $p(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна періодична функція з періодом $2(t_2 - t_1)$, а розв'язок відповідної неоднорідної задачі, якщо він існує, не буде єдиним. Щоб за певних умов на параметри задачі забезпечити єдиність розв'язку, на шуканий розв'язок накладали додаткові умови за змінною $x$ (умови періодичності, майже періодичності) [1–6].

Ми показали, як можна досягти єдиності розв'язку, наклавши додаткову третю умову за змінною $t$; встановлено умови на функції $g_j(x)$ і числа $t_j$, $j = 1, 2, 3$, при яких задача (1), (2) є коректна.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L05.

Зауважимо, що наша праця близька до статті [8], де досліджена задача з триточковими умовами за змінною $x$ для псевдопараболічного рівняння $u_t(t,x) = u_{xxt}(t,x) + u_{xx}(t,x)$.

Розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t), \tag{3}$$

де функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ визначаються із системи рівнянь

$$\varphi(x+t_j) + \psi(x-t_j) = g_j(x), \quad j = 1,2,3. \tag{4}$$

**2. Єдиність розв'язку.** Задача (1), (2) не може мати двох різних розв'язків тоді і тільки тоді, коли відповідна однорідна задача з умовами

$$u(t_j,x) = 0, \ j = 1,2,3 \tag{5}$$

не має нетривіальних розв'язків. Позначимо: $\ell_1 = t_3 - t_2$, $\ell_2 = t_3 - t_1$, $\ell_3 = t_2 - t_1$, $\alpha_1 = \ell_3/\ell_1$, $\alpha_2 = \ell_3/\ell_2$, $\alpha_3 = \ell_2/\ell_3$, $\beta_1 = t_2/\ell_1$, $\beta_2 = t_1/\ell_2$, $\beta_3 = t_1/\ell_3$.

**Теорема 1.** *Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) в просторі $C(D)$ необхідно і достатньо, щоб число $\alpha_1$ було ірраціональним.*

*Доведення.* Розв'язок задачі (1), (5) визначається формулою (3), де функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ такі, що задовольняють систему рівнянь

$$\varphi(x+t_j) + \psi(x-t_j) = 0, \ j = 1,2,3. \tag{6}$$

Легко показати, що система (6) рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x+2(t_2-t_1)) - \varphi(x) = 0, \\ \varphi(x+2(t_3-t_2)) - \varphi(x) = 0, \\ \varphi(x+2t_1) + \psi(x) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Розв'язки системи рівнянь (7) мають вигляд

$$\varphi(x) = p(x), \ \psi(x) = -p(x+2t_1), \tag{8}$$

де $p(x) \in C(\mathbb{R})$ – довільна двоякоперіодична функція з періодами $2\ell_1$ і $2\ell_3$.

Якщо відношення $\ell_3/\ell_1$ є числом раціональним, тобто якщо $\alpha_1 = m/k$, $(m,k \in \mathbb{N})$, то система (7) має розв'язки вигляду (8), де $p(x) = v(x) \in C(\mathbb{R})$ – довільна періодична функція з періодом $\omega = 2\ell_3/m = 2\ell_1/k$; для цього випадку задача (1), (5) має нетривіальні розв'язки вигляду

$$u(t,x) = v(x+t) - v(x-t+2t_1).$$

Якщо ж число $\alpha_1$ є ірраціональним, то неперервна функція $p(x)$, яка має два несумірні періоди, набуває одного і того ж значення в усіх точках вигляду $2\ell_3 m + 2\ell_1 k$ $(k,m \in \mathbb{Z})$, які утворюють всюди щільну множину, і внаслідок неперервності ця функція є константою [9, с. 29; 10, с. 55]. У цьому випадку всі розв'язки системи рівнянь (7) мають вигляд: $\varphi(x) = C$; $\psi(x) = -C$, де $C$ – довільна стала, а задача (1), (5) у класі $C(D)$ має лише тривіальний розв'язок. Теорему доведено.

**3. Існування розв'язку.** Надалі вважатимемо, що має місце єдиність розв'язку задачі (1), (2), тобто що число $\alpha_1$ – ірраціональне. Зауважимо, що з ірраціональності числа $\alpha_1$ випливає ірраціональність чисел $\alpha_2$ і $\alpha_3$. Розв'язок задачі (1), (2) можна записати у вигляді

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) + u_3(t,x), \tag{9}$$

де $u_j(t,x)$, $j = 1,2,3$ – розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови

$$u_j(t_q, x) = \delta_{jq} g_j(x), \ q = 1,2,3, \tag{10}$$

$\delta_{jq}$ – символ Кронекера.

Знайдемо розв'язок задачі (1), (10) при $j = 1$, тобто функцію $u_1(t,x)$, яка зображається формулою (3), де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначаються із такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x+t_1) + \psi(x-t_1) = g_1(x), \\ \varphi(x+t_2) + \psi(x-t_2) = 0, \\ \varphi(x+t_3) + \psi(x-t_3) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x+t_1) + \psi(x-t_1) = g_1(x), \\ \varphi(x+2(t_3-t_2)) - \varphi(x) = 0, \\ \varphi(x+2t_2) + \psi(x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Два останні рівняння системи (12) задовольняють функції

$$\varphi(x) = p_1(x), \ \psi(x) = -p_1(x+2t_2), \tag{13}$$

де $p_1(x)$ – довільна періодична функція з періодом $2(t_3 - t_2)$, яка має вигляд

$$p_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_1(k) \exp(i\pi kx/\ell_1), \tag{14}$$

де $p_1(k)$ – коефіцієнти Фур'є функції $p_1(x)$. Отже, щоб система (12) мала розв'язок, функція $g_1(x)$ повинна бути періодичною з періодом $2\ell_1$, тобто

$$g_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_1(k) \exp(i\pi kx/\ell_1), \tag{15}$$

де $g_1(k)$ – коефіцієнти Фур'є функції $g_1(x)$.

Визначимо $p_1(x)$ так, щоб функції (13) задовольняли систему рівнянь (12). На основі першого рівняння системи (12) та формул (13) – (15) отримуємо, що кожен з коефіцієнтів $p_1(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, визначається відповідно з рівняння

$$p_1(k)\Big(\exp(i\pi kt_1/\ell_1) - \exp(i\pi k(2t_2 - t_1)/\ell_1)\Big) = g_1(k). \tag{16}$$

При $k = 0$ рівняння (16) має вигляд $p_1(0) \cdot 0 = g_1(0)$; розв'язок цього рівняння існує і є довільною константою, якщо $g_1(0) = \int_0^{2\ell_1} g_1(x)\,dx = 0$. Для кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ коефіцієнти $p_1(k)$ однозначно визначаються формулами

$$p_1(k) = g_1(k)\Big[\exp(i\pi k t_1/\ell_1) - \exp(i\pi k(2t_2 - t_1)/\ell_1)\Big]^{-1},$$

де знаменники відмінні від нуля, оскільки число $\alpha_1$ – ірраціональне. Отже, функція $p_1(x)$ визначається (з точністю до довільної сталої $p_1(0)$) формулою

$$p_1(x) = p_1(0) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' g_1(k)\frac{\exp(i\pi kx/\ell_1)}{\exp(i\pi k t_1/\ell_1) - \exp(i\pi k(2t_2 - t_1)/\ell_1)}, \tag{17}$$

де штрих біля суми означає, що пропущено доданок для $k = 0$. На основі формул (3), (13) і (17) розв'язок задачі (1), (10) при $j = 1$ зобразимо у вигляді

$$u_1(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' g_1(k)\frac{\Big[\exp(i\pi k(t/\ell_1-\beta_1)) - \exp(-i\pi k(t/\ell_1-\beta_1)\Big]}{\exp(-i\pi k\alpha_1) - \exp(i\pi k\alpha_1)}\exp(i\pi kx/\ell_1). \tag{18}$$

Аналогічно знаходимо розв'язок задачі (1), (10) при $j = 2$, який теж має вигляд (3), де функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ визначаються з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x + t_2) + \psi(x - t_2) = g_2(x), \\ \varphi(x + t_3) + \psi(x - t_3) = 0, \\ \varphi(x + t_1) + \psi(x - t_1) = 0, \end{cases} \tag{19}$$

яка рівносильна системі

$$\begin{cases} \varphi(x + t_2) + \psi(x - t_2) = g_2(x), \\ \varphi(x + 2(t_3 - t_1)) - \varphi(x) = 0, \\ \varphi(x + 2t_1) + \psi(x) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Таким же шляхом, як у випадку $j = 1$, встановлено, що для існування розв'язку системи (20) необхідно, щоб функція $g_2(x)$ була періодичною з періодом $2(t_3 - t_1)$ і щоб $\int_0^{2\ell_2} g_2(x)\,dx = 0$; у цьому випадку показано, що розв'язок задачі (1), (10) при $j = 2$ однозначно визначається формулою

$$u_2(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' g_2(k)\frac{\Big[\exp(i\pi k(t/\ell_2-\beta_2)) - \exp(-i\pi k(t/\ell_2-\beta_2)\Big]}{\exp(i\pi k\alpha_2) - \exp(-i\pi k\alpha_2)}\exp(i\pi kx/\ell_2), \tag{21}$$

де $g_2(k)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – коефіцієнти Фур'є функції $g_2(x)$.

Розв'язок задачі (1), (10) при $j = 3$ визначається формулою (3), де функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x+t_3) + \psi(x-t_3) = g_3(x), \\ \varphi(x+2(t_2-t_1)) - \varphi(x) = 0, \\ \varphi(x+2t_1) + \psi(x) = 0, \end{cases} \tag{22}$$

для існування розв'язку якої необхідно, щоб функція $g_3(x)$ була періодичною з періодом $2(t_2 - t_1)$ і щоб $\int_0^{2\ell_3} g_3(x)\,dx = 0$. Розв'язуючи систему (22) за аналогією з випадком $j = 1$, знаходимо, що

$$u_3(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' g_3(k) \frac{\left[\exp(i\pi k(t/\ell_3-\beta_3)) - \exp(-i\pi k(t/\ell_3-\beta_3)\right]}{\exp(i\pi k\alpha_3) - \exp(-i\pi k\alpha_3)} \exp(i\pi kx/\ell_3), \tag{23}$$

де $g_3(k)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – коефіцієнти Фур'є функції $g_3(x)$. Тоді з формул (9), (18), (21) і (23) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^{[j/2]+1} \frac{\left[\exp(i\pi k(t/\ell_j-\beta_j)) - \exp(-i\pi k(t/\ell_j-\beta_j)\right]}{\exp(i\pi k\alpha_j) - \exp(-i\pi k\alpha_j)} g_j(k) \exp(i\pi kx/\ell_j), \tag{24}$$

де

$$g_j(k) = \frac{1}{2\ell_j} \int_0^{2\ell_j} g_j(x) \exp(-i\pi kx/\ell_j)\,dx, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad j = 1,2,3. \tag{25}$$

Величини $|\exp(i\pi k\alpha_j) - \exp(-i\pi k\alpha_j)|$, $j = 1,2,3$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини $k \in \mathbb{Z}$; тому питання про збіжність ряду (24) пов'язане загалом з проблемою малих знаменників.

Якщо функції $g_j(x)$, $j = 1,2,3$ є тригонометричними многочленами вигляду

$$g_j(x) = \sum_{k=-N_j}^{N_j} g_j(k) \exp(i\pi kx/\ell_j), \quad g_j(0) = 0, \quad j = 1,2,3,$$

то розв'язок задачі (1), (2) завжди існує, коли числа $\alpha_j$, $j = 1,2,3$ є ірраціональні. У загальному випадку справедливе таке твердження.

**Теорема 2.** *Нехай числа $\alpha_j$, $j = 1,2,3$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) пар цілих чисел $m$ і $k$ виконуються нерівності*

$$\left|\alpha_j - \frac{m}{k}\right| \geqslant C|k|^{-(n_j+\varepsilon)}, \ C > 0, \quad n_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1,2,3, \quad 0 < \varepsilon < 1; \tag{26}$$

*нехай $g_j(x)$ – періодична з періодом $2\ell_j$ функція з класу $C^{n_j+3}([0;2\ell_j])$ така, що $\int_0^{2\ell_j} g_j(x)\,dx = 0$, $j = 1,2,3$. Тоді існує розв'язок задачі (1),(2) із класу $C^2(D)$, який неперервно залежить від функцій $g_j(x)$, $j = 1,2,3$, і зображається формулою (24).*

*Доведення.* Зауважимо, що для довільного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ виконуються нерівності

$$|\exp(i\pi k\alpha_j) - \exp(-i\pi k\alpha_j)| = 2|\sin|\pi k\alpha_j - m(k)\pi|| \geqslant 4|k||\alpha_j - m(k)/k|,\ j = 1,2,3, \quad (27)$$

де $m(k)$ – ціле число, що задовольняє нерівність $|k\alpha_j - m(k)| < 1/2$. Оцінки (27) випливають з того, що $\sin x \geqslant 2x/\pi$ для всіх значень $x \in [0;\pi/2]$. За умов теореми з формул (25) випливають оцінки

$$|g_j(k)| \leqslant (\ell_j/\pi)^{n_j+3}|k|^{-(n_j+3)}\|g_j(x)\|_{C^{n_j+3}([0;2\ell_j])}, \quad j = 1,2,3. \quad (28)$$

На основі формули (24) та оцінок (26)-(28) отримуємо нерівність

$$\|u(t,x)\|_{C^2(D)} \leqslant \frac{B}{4C}\sum_{j=1}^{3} A_j\|g_j(x)\|_{C^{n_j+3}([0;2\ell_j])}, \quad (29)$$

де $B$ – сума ряду $\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' 1/k^{2-\varepsilon}$, $A_j = (\ell_j/\pi)^{n_j+1}[2 + (\ell_j/\pi + 1)^2]$, $j = 1,2,3$. З оцінки (29) випливає доведення теореми.

**Зауваження 1.** *Згідно з теоремою Бореля [5, с. 12] для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\alpha_j$ нерівності (26) виконуються для всіх (крім скінченного числа) пар $m,k \in \mathbb{Z}$ при $n_j = 2$, $j = 1,2,3$.*

**Наслідок 1.** *Нехай функції $g_j(x)$ задовольняють умови теореми 2 при $n_j = 2$, $j = 1,2,3$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\alpha_j$, $j = 1,2,3$ існує класичний розв'язок задачі (1), (2), який неперервно залежить від функцій $g_j(x)$, $j = 1,2,3$.*

Щоб отримати точніший, ніж метричний, опис класу чисел $\alpha_j$, $j = 1,2,3$, для яких задача (1),(2) є некоректна, можна застосувати розмірність Хаусдорфа, яка дає змогу розрізняти множини нульової міри Лебега.

**Лема (Теорема Ярніка-Безіковича [3, с. 21]).** *Нехай $A(\omega)$ – множина дійсних чисел $\alpha$, для яких нерівність*

$$|\alpha - p/q| < q^{-\omega}, \quad \omega > 2$$

*має безмежну кількість розв'язків у цілих $p$ і $q > 0$. Тоді розмірність Хаусдорфа множини $A(\omega)$ дорівнює $2/\omega$.*

Із теореми 2 та леми випливає таке твердження.

**Наслідок 2.** *Для всіх чисел $\alpha_j$, $j = 1,2,3$, крім множиини, розмірність Хаусдорфа якої дорівнює $2/\omega$ ($\omega > 2$), існує розв'язок задачі (1),(2), якщо функції $g_j(x)$ задовольняють умови теореми 2 при $n_j = [\omega]$, $j = 1,2,3$, де $[\omega]$ – ціла частина числа $\omega$.*

**Зауваження 2.** *Із наслідка 2 бачимо, що за рахунок підвищення гладкості функцій $g_j(x)$, $j = 1,2,3$, можна домогтися того, що задача (1),(2) буде розв'язна для всіх чисел $\alpha_j$, $j = 1,2,3$, крім множини, розмірність Хаусдорфа якої не перевищує як завгодно малого наперед заданого числа $\delta > 0$.*

**Зауваження 3.** *Якщо число $\alpha_1$ – раціональне, то неоднорідна задача (1),(2) не має розв'язку.*

**Зауваження 4.** *Якщо в (2) взяти більше ніж три умови, тобто задати значення шуканої функції в точках $t_1, t_2, \ldots, t_p$, де $p > 3$, то однорідна задача (1),(5) буде мати лише тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли відрізки $t_2 - t_1, t_3 - t_2, \ldots, t_p - t_{p-1}$ є несумірні, а неоднорідна задача (1),(2), незалежно від розміщення точок $t_j$, $j = 1, \ldots, p$, не буде мати розв'язку.*

Результати роботи поширені на випадок більш загального гіперболічного рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} - b_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} - b_2\right)u = 0,$$

де $\lambda_1$, $\lambda_2$, $b_1$, $b_2$ – дійсні числа.


1. Пташник Б.Й. *Задача типу Валле-Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами* // Доп. АН УРСР.— 1966.— N10.— С. 1254–1257.

2. Пташник Б.Й. *Аналог n-точечной задачи для гиперболических операторов с постоянными коэфициентами, распадающихся на множители первого порядка* // В сб. Методы приближенного решения дифференциальних уравнений.–К.: Ин-т математики АН УССР, 1973.— С. 230–242.

3. Пташник Б.Й. *Аналог n-точкової задачі для системи гіперболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами* // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1974.— N 8.— С. 709–712.

4. Пташник Б.Й. *Задача типу Валле-Пуссена для лінійних гіперболіних рівнянь із змінними коефіцієнтами* // Там само.— 1967.— N 2.— С. 127–130.

5. Пташник Б.Й. Некорректные граничные граничные задачи для диференциальных уравнений с частными производными.— К.: Наук. думка, 1984.— 264 с.

6. Пташник Б.Й., Штабалюк П.І. *Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних* // Мат. методи і фіз.мех. поля.— 1992.— Вип.35.— С. 210–215.

7. Борок В.М. *Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое* // Докл. АН СССР.— 1968.— Т.183, N5.— С. 995–998.

8. Атаманов Э.Р. *О единственности и устойчивости решения многоточечной задачи для псевдопараболического уравнения* // В сб. Вопр. корректности задач матем. физики.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977.— С. 12–22.

9. Арнольд В.И. *Малые знаменатели. I. Об отображении окружности на себя* // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1961.— Т.25, N1.— С.21–86.

10. Jacobi C.G.I, *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium abeliarum inititur* // I. fur. Math.— 1835.— XIII.— P. 55–78.

11. Берник В.И., Мельничук Ю.В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа.— Минск: Наука и техника, 1988.— 144 с.

*Стаття надійшла до редколегії 14.06.96*

УДК 517.95

# ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ПРИ ВЕЛИКИХ ЗНАЧЕННЯХ ЧАСУ

М. О. Оліскевич

**M. O. Oliskevytch. The behaviour of a solution of the many-points problem for the hyperbolic equation for the long time.** The many-points mixed problem for a hyperbolic equation is considered. With the help of the Green function of a subsidiary problem the conditions of solutions by Liapunov stability for starting equation were obtained.

Розглянемо у смузі $P = (0,1) \times (0,\infty)$ мішану задачу для гіперболічного рівняння

$$\prod_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\gamma_i(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) y(x,t) = \sum_{j=0}^{n-1} R_j(x) \frac{\partial^{(n-1)} y(x,t)}{\partial t^j \partial x^{n-1-j}} + f(x) , \tag{1}$$

де $R_j(x)$ — диференційовні функції на $[0,1]$, а $\gamma_i(x)\,, (i = \overline{1,n})$ — дійсні, різні і не обертаються в нуль, причому

$$\gamma_1(x) < \cdots < \gamma_p(x) < 0 < \gamma_{p+1}(x) < \cdots < \gamma_n(x) , \quad p \geqslant n-p . \tag{2}$$

У точках відрізка $[0,1]$ задані умови

$$\begin{gathered} \sum_{l=0}^{l_r} \nu_l^r \frac{\partial^{(l)} y(0,t)}{\partial x^l} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{l_r} \alpha_{kl}^r \frac{\partial^{(l)} y(c_k,t)}{\partial x^l} = 0 , \quad r = \overline{1,p} , \\ \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{l_r} \alpha_{kl}^r \frac{\partial^{(l)} y(c_k,t)}{\partial x^l} + \sum_{l=0}^{l_r} \mu_l^r \frac{\partial^{(l)} y(1,t)}{\partial x^l} = 0 , \ r = \overline{p+1,n} , \end{gathered} \tag{3}$$

причому $c_k$ такі, що $0 < c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_n < 1$, $l_r = \overline{0,n-1}$ і $l_i \neq l_j$ якщо $i \neq j$. Крім того, задані початкові умови

$$\frac{\partial^{(k)}}{\partial t^k} y(x,0) = \varphi_k(x) , \quad k = 0,1,\ldots,n-1 . \tag{4}$$

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35L35; Secondary 35B35.

Описаним в [1] методом задачу (1),(3),(4) можна звести до відповідної мішаної задачі для системи. Введемо невідомі функції

$$u_i(x,t) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\gamma_j(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) y(x,t)\,, \quad i = \overline{1,n}\,. \tag{5}$$

Звідси похідні $(n-1)$-го порядку можна відшукати як лінійні комбінації від $u_j$, а саме

$$\frac{\partial^{(n-1)} y(x,t)}{\partial t^k \partial x^{n-k-1}} = \sum_{i=1}^{n} C_{k,i}(x) u_i(x,t)\,, \quad k = \overline{0, n-1}\,, \tag{6}$$

де

$$C_{k,i}(x) = \left( \gamma_i^k(x) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left( \frac{1}{\gamma_i(x)} - \frac{1}{\gamma_j(x)} \right) \right)^{-1}. \tag{7}$$

Підставивши отримані вирази для відповідних похідних у праву частину рівняння (1), отримаємо систему

$$\frac{\partial U}{\partial t} - A(x) \frac{\partial U}{\partial x} = F(x,U)\,, \tag{8}$$

де $A(x) = (\delta_{ij} \frac{1}{\gamma_i(x)})$, $U = (u_1(x,t), \ldots, u_n(x,t))^T$, $F(x,U) = (f(x,U), \ldots, f(x,U))$, $f(x,U) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} R_j(x) \sum\limits_{i=1}^{n} C_{j,i}(x) u_i(x,t) + f(x)$.

Виразимо $\dfrac{\partial^{(k)} y(x,t)}{\partial t^j \partial x^{k-j}}$ через лінійні комбінації функцій $u_j$:

$$\frac{\partial^{(k)} y(x,t)}{\partial t^j \partial x^{k-j}} = \frac{\partial^{(k)} y(x,0)}{\partial t^j \partial x^{k-j}} + \int_0^t \frac{d}{d\tau} \frac{\partial^{(k)} y(x,\tau)}{\partial t^j \partial x^{k-j}}\, d\tau =$$

$$= \varphi_j^{(k-j)}(x) + \frac{\partial^{(k+1)} y(x,0)}{\partial t^{j+1} \partial x^{k-j}} t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\partial^{(k+2)} y(x,\tau)}{\partial t^{j+2} \partial x^{k-j}}\, d\xi =$$

$$= \varphi_j^{(k-j)}(x) + \varphi_{j+1}^{(k-j)}(x) t + \int_0^t \int_\xi^t \frac{\partial^{(k+2)} y(x,\xi)}{\partial t^{j+2} \partial x^{k-j}}\, d\tau d\xi =$$

$$= \varphi_j^{(k-j)}(x) + t\, \varphi_{j+1}^{(k-j)}(x) + \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial^{(k+2)} y(x,\tau)}{\partial t^{j+2} \partial x^{k-j}}\, d\tau =$$

$$= \varphi_j^{(k-j)}(x) + t\, \varphi_{j+1}^{(k-j)}(x) - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^{(k+2)} y(x,\tau)}{\partial t^{j+2} \partial x^{k-j}}\, d(t-\tau)^2 =$$

$$= \varphi_j^{(k-j)}(x) + t\, \varphi_{j+1}^{(k-j)}(x) + \frac{1}{2} t^2 \varphi_{j+2}^{(k-j)}(x) + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 \frac{\partial^{(k+3)} y(x,\tau)}{\partial t^{j+3} \partial x^{k-j}}\, d\tau\,.$$

Інтегруємо частинами дот, доки під інтегралом не одержимо похідні $(n-1)$-го порядку від $y(x,t)$. Замінивши їх за формулами (6), отримаємо

$$\frac{\partial^{(k)}y(x,t)}{\partial t^j\partial x^{k-j}} = \sum_{i=0}^{n-2-k}\frac{t^i}{i!}\varphi_{j+i}^{(k-j)}(x)+$$
$$+\frac{1}{(n-2-k)!}\sum_{i=1}^{n}C_{n-1-(k-j),i}(x)\int_0^t(t-\tau)^{n-2-k}u_i(x,\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Щоб отримати початкові і граничні умови для системи, продиференціюємо $r$-те рівняння в (3) за змінною $t$ $(n-1-l_r)$ разів $(r=\overline{1,n})$ і $j$-ту умову в (4) — за змінною $x$ $(n-1-j)$ разів $(j=\overline{0,n-1})$. Замінивши $(n-1)$-ші похідні функції $y(x,t)$ лінійними комбінаціями $u_j(x,t)$ за формулами (6), а похідні нижчих порядків за формулами (9), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\nu_{l_r}^r C_{n-1-l_r,j}(0)u_j(0,t)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kl_r}^r C_{n-1-l_r,j}(c_k)u_j(c_k,t)+\mu_{l_r}^r C_{n-1-l_r,j}(1)u_j(1,t)\right]+$$
$$+\sum_{l=0}^{l_r-1}\left[\sum_{i=0}^{l_r-l-1}\left(\nu_l^r\varphi_{i+n-1-l}^{(l)}(0)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kl}^r\varphi_{i+n-1-l}^{(l)}(c_k)+\mu_l^r\varphi_{i+n-1-l}^{(l)}(1)\right)\frac{t^i}{i!}+\right.$$
$$+\frac{1}{(l_r-l-1)!}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t(t-\tau)^{l_r-l-1}\left(\nu_l^r C_{n-1-l,i}(0)u_i(0,\tau)+\right. \tag{10}$$
$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kl}^r C_{n-1-l,i}(c_k)u_i(c_k,\tau)+\mu_l^r C_{n-1-l,i}(1)u_i(1,\tau)\right)d\tau\right]=0\,,\ r=\overline{1,n}$$

(вважаємо, що $\nu_l^r=0$ для $r=\overline{p,n}$, $\mu_l^r=0$ для $r=\overline{1,p}$, $l=\overline{0,l_r}$) та

$$\sum_{k=1}^{n}C_{j,k}(x)u_k(x,0)=\varphi_j^{(n-1-j)}(x)\,,\quad j=0,1,\ldots,n-1\,.$$

Припустимо, що $\varphi_{n-1-i}(0)=0$, $\varphi_{n-1-i}(c_k)=0$, $\varphi_{n-1-i}(1)=0$, $(i=\overline{1,m}$, $m=\max\limits_{1\leqslant r\leqslant n}l_r)$. Зауважимо, що $p-1\leqslant m$, оскільки $l_i\neq l_j$ при $i\neq j$. Позначимо

$$I_0=(\alpha_{ij}^0)=\begin{pmatrix}\nu_{l_1}^1C_{n-1-l_1,1}(0) & \ldots & \nu_{l_1}^1C_{n-1-l_1,n}(0)\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ \nu_{l_p}^pC_{n-1-l_p,1}(0) & \ldots & \nu_{l_p}^pC_{n-1-l_p,n}(0)\\ 0 & \ldots & 0\\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\ 0 & \ldots & 0\end{pmatrix},$$

$$I_{n+1} = (\alpha_{ij}^{n+1}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ 0 & \dots & 0 \\ \mu_{l_{p+1}}^{p+1} C_{n-1-l_{p+1},1}(1) & \dots & \mu_{l_{p+1}}^{p+1} C_{n-1-l_{p+1},n}(1) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \mu_{l_n}^{n} C_{n-1-l_n,1}(1) & \dots & \mu_{l_n}^{n} C_{n-1-l_n,n}(1) \end{pmatrix},$$

$I_k = (\alpha_{ij}^k) = (\alpha_{k,l_i}^i C_{n-1-l_i,j}(c_k))\,, (i,j = \overline{1,n}\,,\ k = \overline{1,n})$, $\quad U_0(x) = C^{-1}(x)\Phi(x)$, де $\Phi(x) = (\varphi_0(x), \dots, \varphi_{n-1}(x))$, і запишемо (3),(4) у векторному вигляді

$$I_0 U(0,t) + \sum_{i=1}^{n} I_i U(c_i,t) + I_{n+1} U(1,t) + \sum_{l=0}^{l_r-1} \frac{1}{(l_r-l-1)!} \times$$
$$\times \int_0^t (t-\tau)^{l_r-l-1} \left( I_0^l U(0,\tau) + \sum_{k=1}^{n} I_k^l U(c_k,\tau) + I_{n+1}^l U(1,\tau) \right) d\tau = 0\,, \tag{11}$$

$$U(x,0) = U_0(x)\,, \tag{12}$$

( $I_0^l\,, I_k^l\,, (k = \overline{1,n})\,, I_{n+1}^l$ — матриці, побудовані з відповідних коефіцієнтів в (12) ).

Нехай $L_B U = A(x)U_x + B(x)U$ — лінійний диференціальний оператор, $B(x) = (b_{ij}(x))\,, (i,j = \overline{1,n})\,,\quad b_{ij}(x)$ — диференційовні функції на $[0,1]$. Покажемо, що спектр оператора $L_B$ обмежений праворуч, тобто існує $\varkappa_B = \sup \operatorname{Re}\lambda_k\,, \quad (\lambda_k$ — власні значення оператора $L_B)$. Для цього розглянемо у смузі $P$ мішану задачу для лінійної гіперболічної системи

$$U_t - L_B U = 0\,, \quad (x,t) \in P\,. \tag{13}$$

Застосувавши перетворення Лапласа за змінною $t$, отримуємо крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$(L_B - \lambda I) v(x,\lambda) = -U_0(x)\,, \tag{14}$$

$$I_0 v(0,\lambda) + I_1 v(c_1,\lambda) + \dots + I_n v(c_n,\lambda) + I_{n+1} v(1,\lambda) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{l_r-1} \left( I_0^l v(0,\lambda) + \sum_{k=1}^{n} I_k^l v(c_k,\lambda) + I_{n+1}^l v(c_k,\lambda) \right) \lambda^{l-l_r} = 0\,, \tag{15}$$

де $v(x,\lambda) = [v_1(x,\lambda), \dots, v_n(x,\lambda)]^T$, $v_i(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty u_i(x,t) e^{-\lambda t}\, dt$, неперервно диференційовний розв'язок якої записують у вигляді

$$v(x,\lambda) = -\int_0^1 G(x,\xi,\lambda) U_0(\xi)\, d\xi$$

($G(x,\xi,\lambda)$ — функція Гріна оператора $L_B-\lambda I$). Тоді розв'язок задачі (13),(11),(12) знайдемо за формулою

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} v(x,\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda\,,$$

де $\sigma>\varkappa_B$.

Запишемо зображення функції Гріна $G(x,\xi,\lambda)$ в правому секторі

$$|\arg\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon\,,$$

припустивши що

$$\nu^i_{l_i}\neq 0\,,\quad i=\overline{1,p},\qquad \mu^i_{l_i}\neq 0\,,\quad i=\overline{p+1,n}. \tag{16}$$

**Теорема 1.** *Функцію Гріна $G(x,\xi,\lambda)$ оператора $L_B-\lambda I$, де $L_B=A\dfrac{d}{dx}+B$, при виконанні умов (2),(11),(16) в секторі $|\arg\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ з довільним $\varepsilon$ для $|\lambda|\to\infty$ можна асимптотично зобразити*

$$G_{ij}(x,\xi,\lambda)=e^{\lambda f_{ij}(x,\xi)}\left[V_{ij}(x,\xi)+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\,, \tag{17}$$

*причому функції $f_{ij}(x,\xi)<0$ для всіх $x\geqslant 0,\xi\leqslant 1$, за винятком точок $x=\xi$, де деякі $f_{ij}=0$.*

*Доведення.* У праці [2] доведено, що матрицю $Y(x,\lambda)$ фундаментальних розв'язків системи $Ly-\lambda y=0$ можна зобразити у вигляді

$$Y_{ij}(x,\lambda)=e^{\lambda\Gamma_j(x)+B_j(x)}\left(\delta_{ij}+\frac{p^1_{ij}(x)}{\lambda}+\cdots+\frac{p^{k+1}_{ij}(x)}{\lambda^{k+1}}+\frac{\overline{w}^{k+1}_{ij}(x,\lambda)}{\lambda^{k+1}}\right),\quad i,j=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Тут

$$\Gamma_j(x)=\int_0^x\gamma_j(\theta)d\theta\,,\quad B_j(x)=-\int_0^x b_{jj}(\theta)\gamma_j(\theta)d\theta\,,$$

а функції $\overline{w}^{k+1}_{ij}(x,\lambda)$ неперервно диференційовні за змінною $x\in[0,1]$, аналітичні за $\lambda$ в областях $\operatorname{Re}\lambda<0$, $\operatorname{Re}\lambda>0$ для $|\lambda|>N$, і $|\overline{w}^{k+1}_{ij}(x,\lambda)|\leqslant B$, де стала $B$ залежить від

$$\max_{ij}\left(\|b_{ij}\|_{C^{k+1}},\|\gamma_i(x)\|_{C^{k+1}}\right)\,,$$

а функції $p^m_{ij}(x)$ належать простору $C^{k+2-m}[0,1]$, $m=1,\dots,k+1$. Будемо позначати $[f]=f+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ для великих $|\lambda|$. Тоді (18) можна переписати у вигляді

$$Y_{ij}(x,\lambda)=e^{\lambda\Gamma_j(x)+B_j(x)}[\delta_{ij}]\,, \tag{19}$$

а елементи оберненої матриці —

$$Z_{ij}(x,\lambda) = e^{-\lambda\Gamma_i(x)-B_i(x)}[\delta_{ij}]\,.$$

Врахувавши зображення (19) і використавши результати праці [3,§1], функцію Гріна можна зобразити у вигляді

$$G(x,\xi) = \overline{G}(x,\xi) - Y(x,\lambda)F^{-1}\times\left(I_0\overline{G}(0,\xi) + I_1\overline{G}(c_1,\xi) + \cdots + I_n\overline{G}(c_n,\xi) + I_{n+1}\overline{G}(1,\xi)\right),$$

де $F = I_0Y(0) + I_1Y(c_1) + \cdots + I_nY(c_n) + I_{n+1}Y(1)\,,$

$$\overline{G}(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2}Y(x,\lambda)Z(\xi,\lambda) & \text{для } \xi < x\,, \\ -\frac{1}{2}Y(x,\lambda)Z(\xi,\lambda) & \text{для } \xi > x\,. \end{cases}$$

Позначимо $c_0 = 0$ і $c_{n+1} = 1$. Тоді для кожного $l = 0, 1, \ldots, n+1$ в прямокутнику $P_l = \{(x,\xi) | c_l < \xi < c_{l+1}\,, 0 < x < 1\}$ функція Гріна має вигляд

$$G(x,\xi,\lambda) = Y(x,\lambda)\left[\pm\frac{1}{2} - \frac{1}{2}F^{-1}\left(-\sum_{j=0}^{l} I_jY(c_j) + \sum_{j=l+1}^{n+1} I_jY(c_j)\right)\right] \times Z(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi)\,.$$

Введемо символи

$$\delta^{*}_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{для } \operatorname{Re}\lambda\gamma_j \leqslant 0 \\ 0 & \text{для } \operatorname{Re}\lambda\gamma_j > 0 \end{cases}, \quad \delta^{**}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{для } \operatorname{Re}\lambda\gamma_j \leqslant 0 \\ \delta_{ij} & \text{для } \operatorname{Re}\lambda\gamma_j > 0 \end{cases},$$

а матриці, побудовані з них, позначимо $I^*(\lambda)$ і $I^*(\lambda)$ відповідно.

Позначимо

$$\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}F^{-1}\left(-\sum_{j=0}^{l} I_jY(c_j) + \sum_{j=l+1}^{n+1} I_jY(c_j)\right) \equiv I^* + U_1,$$

$$-\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}F^{-1}\left(-\sum_{j=0}^{l} I_jY(c_j) + \sum_{j=l+1}^{n+1} I_jY(c_j)\right) \equiv -I^{**} + U_2\,.$$

Тоді для $(x,\xi) \in P_l \quad (l = \overline{0, n+1})$ матимемо

$$U = U_1 = U_2 = F^{-1}\left[\sum_{j=0}^{l} I_jY(c_j)I^{**} - \sum_{j=l+1}^{n+1} I_jY(c_j)I^*\right]$$

і функцію $G(x,\xi,\lambda)$ можемо записати у вигляді

$$G(x,\xi,\lambda) = G_1(x,\xi,\lambda) + G_2(x,\xi,\lambda)\,, \tag{20}$$

де

$$G_1(x,\xi,\lambda)=Y(x,\lambda)\left[\begin{cases}-I^{**}(\lambda) & \text{для } \xi<x\,,\\ I^{*}(\lambda) & \text{для } \xi>x\end{cases}\right]Z(\xi)A^{-1}(\xi)\,,$$

$$G_2(x,\xi,\lambda)=Y(x,\lambda)U(\lambda)Z(\xi)A^{-1}(\xi)\,.$$

Розглянемо асимптотичну поведінку $G(x,\xi,\lambda)$ в правому секторі

$$|\arg\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon\,.$$

Дослідимо визначник матриці $F(\lambda)$

$$K(\lambda)=\det|F(\lambda)|=[\alpha^0_{ij}]+\sum_{k=1}^{n}[\alpha^k_{ij}]e^{\lambda\Gamma_j(c_k)+B_j(c_k)}+[\alpha^{n+1}_{ij}]e^{\lambda\Gamma_j(1)+B_j(1)}\,.$$

Позначимо $\Gamma_j=\Gamma_j(1)\,,B_j=B_j(1)\,,E^i(x)=e^{\lambda\Gamma_i(x)+B_i(x)}$. Якщо знехтувати малими доданками, то $K(\lambda)$ можна записати у вигляді

$$\left|\begin{array}{cccc}[\alpha^0_{11}] & \dots & [\alpha^n_{1,p+1}]E^{p+1}(c_n) & \dots\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ \dots & [\alpha^0_{p,p}] & \dots & [\alpha^n_{p,n}]E^n(c_n)\\ [\alpha^1_{p+1,1}]E^1(c_1) & \dots & [\alpha^{n+1}_{p+1,p+1}]E^{p+1}(1) & \dots\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ \dots & [\alpha^1_{n,p}]E^p(c_1) & \dots & [\alpha^{n+1}_{n,n}]E^{p+1}(1)\end{array}\right|.$$

Звідси видно, що існує $s>0$ таке, що для $\operatorname{Re}\lambda>s$ детермінант $K(\lambda)$ не має коренів, і розгортаючи його за мінорами останніх $n-p$ рядків, отримаємо

$$K(\lambda)=e^{\lambda\sum\limits_{k=p+1}^{n}\Gamma_k+\sum\limits_{k=p+1}^{n}B_k}\left[\ \|\alpha^0_{ij}\|_{i,j\leqslant p}\ \|\alpha^{n+1}_{ij}\|_{i,j>p}+\varepsilon\ \right],$$

де $\varepsilon$ — функція, що спадає до нуля при $\operatorname{Re}\lambda\to\infty$. Припустимо, що

$$\det|\alpha^0_{ij}|_{i,j\leqslant p}\neq0\,,\quad \det|\alpha^{n+1}_{ij}|_{i,j>p}\neq0\,.$$

Якщо враховувати вигляд елементів матриць $I_0$ і $I_{n+1}$, легко перевірити, що ці умови еквівалентні умовам

$$\nu^i_{l_i}\neq0\,,\quad i=\overline{1,p},\quad \mu^i_{l_i}\neq0\,,\quad i=\overline{p+1,n},$$

$$\left|\begin{array}{ccc}\gamma_1^{l_1}(0) & \dots & \gamma_p^{l_1}(0)\\ \dots & \dots & \dots\\ \gamma_1^{l_p}(0) & \dots & \gamma_p^{l_p}(0)\end{array}\right|\neq0\,,\quad \left|\begin{array}{ccc}\gamma_{p+1}^{l_{p+1}}(1) & \dots & \gamma_n^{l_{p+1}}(1)\\ \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{p+1}^{l_n}(1) & \dots & \gamma_n^{l_n}(1)\end{array}\right|\neq0\,.$$

Останні два визначники не дорівнюють нулю, оскільки ми припустили, що $l_i \neq l_j$ для $i \neq j$. Алгебраїчні доповнення $K_{ij}$ елементів $F_{ij}$ матриці $F(\lambda)$ будуть такі:

$$K_{ij}(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda \sum\limits_{k=p+1}^{n} \Gamma_k}[V_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda\left(\Gamma_{p+1}(c_n) + \sum\limits_{k=p+2}^{n} \Gamma_k\right)}[V_{ij}] & \text{для } i > p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda\left(\Gamma_p(c_1) + \sum\limits_{k=p+1, k\neq j}^{n} \Gamma_k\right)}[V_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j > p\,, \\ e^{\lambda \sum\limits_{k=p+1, k\neq j}^{n} \Gamma_k}[V_{ij}] & \text{для } i > p, j > p \end{cases}$$

(будемо позначати через $V_{ij}$ числа чи функції від $x, \xi$ значення яких, нас не цікавлять).

Тепер можна обчислити елементи матриці $F^{-1}(\lambda) = (\Phi_{ij}(\lambda))$:

$$\Phi_{ij}(\lambda) = \begin{cases} [V_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda(\Gamma_p(c_1) - \Gamma_i)}[V_{ij}] & \text{для } i > p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda(\Gamma_{p+1}(c_n) - \Gamma_{p+1})}[V_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j > p\,, \\ e^{-\lambda\Gamma_i}[V_{ij}] & \text{для } i > p, j > p\,. \end{cases}$$

Обчисливши

$$\sum_{j=1}^{l} I_j Y(c_j) I^{**} - \sum_{j=l+1}^{n+1} I_j Y(c_j) I^{*} =$$

$$= \begin{pmatrix} [\alpha_{1,1}^1]E^1(c_{l+1}) & \ldots & [\alpha_{1,p+1}^l]E^{p+1}(c_l) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & [\alpha_{n,p}^1]E^p(c_{l+1}) & \ldots & [\alpha_{n,n}^l]E^n(c_l) \end{pmatrix},$$

знаходимо

$$U(\lambda) = F^{-1}(\lambda)\left[\sum_{j=1}^{l} I_j Y(c_j) I^{**} - \sum_{j=l+1}^{n+1} I_j Y(c_j) I^{*}\right] =$$

$$\begin{pmatrix} [v]e^{\lambda\Gamma_1(c_{l+1})} & \ldots & [v]e^{\lambda\Gamma_{p+1}(c_l)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & [v]e^{\lambda(\Gamma_p(c_{l+1}) - \Gamma_n)} & \ldots & [v]e^{\lambda(\Gamma_n(c_l) - \Gamma_n)} \end{pmatrix}.$$

Отже, другий доданок функції Гріна можна записати у вигляді

$$g_{ij}^{(2)}(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda(\Gamma_j(c_{l+1}) - \Gamma_j(\xi) + \Gamma_i(x)}[v_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda(\Gamma_j(c_l) - \Gamma_j(\xi) + \Gamma_i(x)}[v_{ij}] & \text{для } i > p, j \leqslant p\,, \\ e^{\lambda(\Gamma_j(c_{l+1}) - \Gamma_i + \Gamma_i(x) - \Gamma_j(\xi))}[v_{ij}] & \text{для } i \leqslant p, j > p\,, \\ e^{\lambda(\Gamma_j(c_l) - \Gamma_i + -\Gamma_j(\xi) + \Gamma_i(x)}[v_{ij}] & \text{для } i > p, j > p\,. \end{cases}$$

Звідси видно, що всі показники від'ємні для всіх $(x,\xi) \in P_l$ за можливим винятком точок $x=0, \xi=c_l$ , $x=0, \xi=c_{l+1}$ , $x=1, \xi=c_l$ і $x=1, \xi=c_{l+1}$.

Розглянемо перший доданок функції Гріна в зображенні (20)

$$G_1(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} -Y(x,\lambda)I^{**}(\lambda)Z(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi) & \text{для } x<\xi\,, \\ \phantom{-}Y(x,\lambda)I^{*}(\lambda)Z(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi) & \text{для } x>\xi\,. \end{cases}$$

Тут всі елементи $g_{ij}^1$ містять множники $e^{\lambda(\Gamma_i(x)-\Gamma_i(\xi))}$, причому якщо $x<\xi$, то $i>p$, а якщо $x>\xi$, то $i \leqslant p$, тобто вони всі від'ємні. Отже, теорему доведено.

На основі теореми 1 методом, описаним у [4], можна довести таку теорему.

**Теорема 2.** *Нехай $A(x) \in C^2\big([0,1]\big)$, $\varkappa_B < -\gamma(\gamma>0)$ і $R_j(x) \in C^2\big([0,1]\big)$, $j=\overline{0,n-1}$. Тоді нульовий розв'язок задачі (9),(10),(11) експоненціально стійкий з показником $\gamma-\varepsilon$ ($\varepsilon$ — довільне число таке, що $\gamma-\varepsilon>0$) в просторі $C^1\big([0,1]\big)$, тобто існує $\delta>0$ для довільної функції $U_0(x) \in C^1\big([0,1]\big)$, яка задовольняє умови узгодженості нульового і першого порядку, а також оцінку $\|U_0(x)\|_{C^1[0,1]} \leqslant \delta$, для всіх $t$ існує єдиний класичний розв'язок $U(x,t)$, причому*

$$\|U(x,t)\|_{C^1\left([0,1]\right)} \leqslant K e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\|U_0(x)\|_{C^1\left([0,1]\right)}\,,$$

*де $K$ не залежить від $t, U_0(x)$.*

Прийнявши $k=0$ в (9), отримаємо розв'язок рівняння у вигляді

$$y(x,t) = \sum_{i=0}^{n-2}\frac{t^i}{i!}\varphi_i(x) + \frac{1}{(n-2)!}\sum_{j=0}^{n}C_{n-1,j}(x)\int_0^t(t-\tau)\,u_j(x,\tau)\,d\tau\,,$$

зростання якого буде визначатися першим доданком. Тобто розв'язок зростає як многочлен.

Якщо ж виконуються умови

$$\varphi_i(x)=0 \qquad \text{для} \quad i=0,1,\ldots,n-2\,, \tag{21}$$

то розв'язок задачі (1),(3),(4) експоненціально стійкий, тобто справедливий

**Наслідок.** *Якщо $A(x), R_j(x) \in C^2\big([0,1]\big)\,, (j=\overline{0,n-1})$ і $\varkappa_B<-\gamma$, то при виконанні умов (21) розв'язок задачі (1),(3),(4) експоненціально стійкий з показником $\gamma-\varepsilon$ в просторі $C^1\big([0,1]\big)$, тобто*

$$\|y(x,t)\|_{C^1\left([0,1]\right)} \leqslant K\, e^{-(\gamma-\varepsilon)t}\|A(x)\|_{C^1\left([0,1]\right)}\,\|\varphi_{n-1}(x)\|_{C^1\left([0,1]\right)}\,,$$

*де $K$ не залежить від $t, \varphi_{n-1}(x)$.*

1. Кирилич В. М. *Про одну нелокальну задачу типу Дарбу для строго гіперболічного рівняння довільного порядку.* //Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.–мат. — 1987. — Вип.28. — С. 27–31.

2. Birkhoff G.D., Lander R.E. *The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order.* // Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.— 1923.— V.58, N2.— P.51–128.

3. Кравчук М. О. *Стійкість за Ляпуновим однієї гіперболічної системи.* // Деп. в ДНТБ України — N 2044 — Ук 95 від 04.09.95 р.

4. Елтышева Н.А. *О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости.* // Матем. сб.— 1988.— Т.135 (177),N2.— С.186–209.

5. Брушлинский К.В. *О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций.* // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1956.— Т.23.—С.893–912.

*Стаття надійшла до редколегії 11.06.96*

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, сеія механіко–математична Вип.45, 1996

УДК 517.95

# ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВІДНОСТІ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

С. М. Ковальчук

**S. M. Koval'chuk. Determination of temperature conductivity coefficient of rectangular plate.** Inverse prblems in rectangle with the integral overspesified conditions are considered. The unknown temperature conductivity coefficient is only time dependent. Existence and unique conditions for the solutions of this problems are established.

У праці розглянуто обернені задачі визначення залежного лише від часу коефіцієнта температуропровідності прямокутної пластини з класичними крайовими умовами першого та другого роду. Умови перевизначення задані в інтегральній формі. Одновимірні задачі з інтегральними умовами перевизначення досліджуються в [1].

1. В області $D = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : x \in (0,l),\ y \in (0,h), t \in (0,T)\}$ розглянемо задачу знаходження функцій $(u(x,y,t), a(t)) \in C^{2,2,1}(D) \cap C^{1,1,0}(\overline{D}) \times C[0,T]$ [2], $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, які задовольняють рівняння

$$u_t = a(t)\,\Delta u, \qquad (x,y,t) \in D, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \qquad x \in [0,l],\ y \in [0,h], \tag{2}$$

крайові умови

$$u_x(0,y,t) = \mu_1(y,t), \quad u_x(l,y,t) = \mu_2(y,t), \quad y \in [0,h],\ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u_y(x,0,t) = \nu_1(x,t), \quad u_y(x,h,t) = \nu_2(x,t), \quad x \in [0,l],\ t \in [0,T] \tag{4}$$

та умову перевизначення

$$\int_0^l u(x,0,t)\,dx + \int_0^h u(l,y,t)\,dy - \int_0^l u(x,h,t)\,dx - \int_0^h u(0,y,t)\,dy = \varkappa(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35R30; Secondary 35K20.

Припустимо, що виконуються такі умови

**Умова (A).** $\mu_1(y,0) = \varphi_x(0,y), \quad \mu_2(y,0) = \varphi_x(l,y), \qquad y \in [0,h],$
$\nu_1(x,0) = \varphi_y(x,0), \quad \nu_2(x,0) = \varphi_y(x,h), \qquad x \in [0,l].$

**Умова (B).** $\varphi(x,y) \in C^2([0,l]\times[0,h]), \quad \nu_i(x,t) \in C^{0,1}([0,l]\times[0,T]),$
$\mu_i(y,t) \in C^{0,1}([0,h]\times[0,T]),\ i=1,2; \quad \varkappa(t) \in C^1[0,T].$

Зведемо задачу (1)–(5) до еквівалентного операторного рівняння. Для цього за допомогою функції Гріна знаходимо розв'язок $u(x,y,t)$ задачі (1)–(4)

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = &\int_0^l d\xi \int_0^h \varphi(\xi,\eta) G(a,x,y,t,\xi,\eta,0)\, d\eta + \\ + &\int_0^t a(\tau)\, d\tau \int_0^h (\mu_2(\eta,\tau) G(a,x,y,t,l,\eta,\tau) - \mu_1(\eta,\tau) G(a,x,y,t,0,\eta,\tau))\, d\eta + \\ + &\int_0^t a(\tau)\, d\tau \int_0^l (\nu_2(\xi,\tau) G(a,x,y,t,\xi,h,\tau) - \nu_1(\xi,\tau) G(a,x,y,t,\xi,0,\tau))\, d\xi, \end{aligned} \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned} &G(a,x,y,t,\xi,\eta,\tau) = \\ &= \frac{1}{4\pi(\Theta(t)-\Theta(\tau))} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left( \exp\left(-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right)\right) \times \\ &\times \left( \exp\left(-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) + \exp\left(-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right)\right), \qquad \Theta(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau, \end{aligned}$$

та підставляємо його в умову (5). Отримуємо рівняння стосовно $a(t)$, яке після диференціювання за $t$ та нескладних перетворень зведемо до вигляду

$$a(t) = Pa(t), \tag{7}$$

де оператор $P$ визначається формулою

$$\begin{aligned} Pa(t) = \sqrt{\pi}\varkappa'(t) \Bigg( &\frac{1}{\sqrt{\Theta(t)}} \int_0^{h/2} \psi_1(\eta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\eta+nh)^2}{4\Theta(t)}\right) d\eta - \\ - &\frac{1}{\sqrt{\Theta(t)}} \int_0^{l/2} \psi_2(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+nl)^2}{4\Theta(t)}\right) d\xi + \\ + &\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\Theta(t)-\Theta(\tau)}} \int_0^{h/2} M_1(\eta,\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\eta+nh)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) d\eta - \end{aligned}$$

$$-\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\Theta(t)-\Theta(\tau)}} \int_0^{l/2} M_2(\xi,\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+nl)^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) d\xi +$$
$$+\int_0^t \frac{s_1(\tau)}{\sqrt{\Theta(t)-\Theta(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 l^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) d\tau -$$
$$\left.-\int_0^t \frac{s_2(\tau)}{\sqrt{\Theta(t)-\Theta(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) d\tau \right)^{-1}.$$

У попередній формулі використані позначення

$$\psi_1(y) = \int_0^l (\varphi_{yy}(x,y) - \varphi_{yy}(x,h-y))\,dx + \varphi_x(l,y) - \varphi_x(0,y) - \varphi_x(l,h-y) + \varphi_x(0,h-y),$$
$$\psi_2(x) = \int_0^h (\varphi_{xx}(x,y) - \varphi_{xx}(l-x,y))\,dy + \varphi_y(x,h) - \varphi_y(x,0) - \varphi_y(l-x,h) + \varphi_y(l-x,0),$$
$$M_1(y,t) = \mu_{2_t}(y,t) - \mu_{1_t}(y,t) - \mu_{2_t}(h-y,t) + \mu_{1_t}(h-y,t),$$
$$M_2(x,t) = \nu_{2_t}(x,t) - \nu_{1_t}(x,t) - \nu_{2_t}(l-x,t) + \nu_{1_t}(l-x,t),$$
$$s_1(t) = \int_0^h (\mu_{1_t}(y,t) + \mu_{2_t}(y,t))\,dy, \qquad s_2(t) = \int_0^l (\nu_{1_t}(x,t) + \nu_{2_t}(x,t))\,dx.$$

У цьому випадку було враховано, що для $p \geqslant 0$

$$\int_0^l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4p}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4p}\right)\right) dx = 2\sqrt{\pi p}, \quad \xi \in [0,l],$$

$$\int_0^l \psi(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+nl)^2}{p}\right) d\xi =$$
$$= \int_0^{l/2} (\psi(\xi) - \psi(l-\xi)) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+nl)^2}{p}\right) d\xi.$$

Якщо пара функцій $u(x,y,t)$ та $a(t)$ є розв'язком задачі (1)–(5), то $a(t)$ є розв'язком рівняння (7) і, навпаки, якщо $a(t)$ – неперервний і додатний на [0,T] розв'язок рівняння (7), то знайшовши $u(x,y,t)$ з (6), отримуємо розв'язок $(u(x,y,t), a(t))$ задачі (1)–(5).

Нехай виконується

**Умова(С).** $\psi_1(y) \geqslant 0,\ \psi_2(x) \leqslant 0,\ (\psi_1(y))^2 + (\psi_2(x))^2 > 0,\ x \in [0,l/2],\ y \in [0,h/2];$
$M_1(y,t) \geqslant 0,\ M_2(x,t) \leqslant 0,\ x \in [0,l/2],\ y \in [0,h/2],\ t \in [0,T];$
$\varkappa'(t) > 0,\ \ t \in [0,T];\ \ s_1(t) \geqslant 0,\ s_2(t) \leqslant 0,\ t \in [0,T].$

Використовуючи теорему Шаудера про нерухому точку [3], покажемо, що існує неперервний додатний на $[0,T]$ розв'язок рівняння (7). Спочатку встановимо оцінки розв'язків цього рівняння. Будемо вважати, що $\psi_1(y) > 0$, якщо $y \in [0, h/2]$. Тоді з рівняння (7) отримуємо нерівність

$$\min_{[0,T]} a(t) \geqslant \frac{C_0}{C_1 + C_2 \min\limits_{[0,T]} a(t)^{-1/2}} \tag{8}$$

з константами

$$C_0 = \min_{[0,T]} \varkappa'(t), \quad C_2 = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \left( \max_{[0,T]} s_1(t) - \min_{[0,T]} s_2(t) \right),$$
$$C_1 = \max_{[0,h/2]} \psi_1(y) - \min_{[0,l/2]} \psi_2(x) + T \left( \max_{[0,h/2]\times[0,T]} M_1(y,t) - \min_{[0,l/2]\times[0,T]} M_2(x,t) \right).$$

З нерівності (8) отримуємо оцінку для $a(t)$ знизу:

$$0 < A_0 \leqslant a(t), \quad \text{де } A_0 = \frac{1}{4C_1^2} \left( \sqrt{C_2^2 + 4C_0C_1} - C_2 \right)^2.$$

Оцінюючи $a(t)$ зверху, з рівняння (7) маємо

$$a(t) \leqslant \frac{C_3}{I(\Theta(t))}, \tag{9}$$

де $C_3 = \max\limits_{[0,T]} \varkappa'(t) / \min\limits_{[0,h/2]} \psi_1(y)$ та

$$I(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int_0^{h/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp\left( -\frac{(\eta + nh)^2}{4s} \right) d\eta.$$

Покажемо, що $I(\Theta(t)) > 0$. Для цього спочатку оцінимо величину $\Theta(t)$ зверху. Замінивши в нерівності (9) змінну $t$ на $\tau$ і проінтегрувавши за $\tau$ в межах від 0 до $t$, одержимо нерівність

$$\int_0^t I(\Theta(\tau)) a(\tau)\, d\tau \leqslant C_3\, t,$$

яку після заміни $s = \Theta(\tau)$ під знаком інтеграла запишемо так:

$$\int_0^{\Theta(t)} I(s)\, ds \leqslant C_3\, t. \tag{10}$$

Функція $r(\sigma) = \int_0^\sigma I(s)\, ds$ є неперервною монотонно зростаючою, тому існує обернена до неї неперервна монотонно зростаюча функція $r^{-1}(\sigma)$, визначена на деякому відрізку $[0, b]$.

Знайдемо число $b$. Для цього розглянемо допоміжну задачу

$$v_\sigma = v_{yy} + 1, \qquad y \in (0, h/2),\ \sigma > 0,$$
$$v(y,0) = 0, \quad y \in [0, h/2], \qquad v_y(0,\sigma) = v(h/2,\sigma) = 0, \quad \sigma \geqslant 0,$$

розв'язок якої визначимо за допомогою функції Гріна у вигляді

$$v(y,\sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_0^{h/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left( \exp\left(-\frac{(y-\eta+nh)^2}{4s}\right) + \exp\left(-\frac{(y+\eta+nh)^2}{4s}\right)\right) d\eta.$$

Оскільки $r(\sigma) = v(0,\sigma)$, то використовуючи метод Фур'є для знаходження $v(y,\sigma)$, отримуємо

$$r(\sigma) = \frac{4h^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \left(1 - \exp\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{h^2}\sigma\right)\right).$$

Звідси $b = \lim\limits_{\sigma\to\infty} r(\sigma) = h^2/8$.

Отже, з нерівності (10) маємо оцінку для $\Theta(t)$:

$$\Theta(t) \leqslant r^{-1}(C_3 t), \quad t \in [0, t_0],$$

де $t_0 = \min\{T, b/C_3\}$. Для того, щоб оцінити $I(\Theta(t))$ знизу, скористаємося задачею

$$w_t = w_{yy}, \qquad y \in (0, h/2), \quad t \in (0,T),$$
$$w(y,0) = 1, \quad y \in [0, h/2], \qquad w_y(0,t) = 0, \quad w(h/2,t) = 1, \quad t \in [0,T].$$

Єдиним розв'язком цієї задачі є функція $w(y,t) \equiv 1$. З іншого боку, записавши $w(y,t)$ за допомогою функції Гріна, отримуємо рівність

$$w(0,t) = I(\Theta(t)) + \frac{h}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a(\tau)}{(\Theta(t)-\Theta(\tau))^{3/2}} \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{(n+1/2)^2 h^2}{4(\Theta(t)-\Theta(\tau))}\right) d\tau = 1.$$

Звідси

$$I(\Theta(t)) = 1 - \frac{h}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\Theta(t)} \frac{1}{\sigma^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(n+\frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{(n+1/2)^2h^2}{4\sigma}\right) d\sigma \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \frac{h}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{r^{-1}(C_3 t)} \frac{1}{\sigma^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(n+\frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{(n+1/2)^2h^2}{4\sigma}\right) d\sigma \geqslant C_4 > 0.$$

Повертаючись до (9), отримуємо оцінку розв'язків рівняння (7) зверху:

$$a(t) \leqslant A_1 < \infty, \quad \text{де } A_1 = C_3/C_4.$$

Із встановлених оцінок та умов (B), (C) випливає, що оператор $P$ переводить опуклу замкнену множину $\mathcal{N} = \{a(t) \in C[0,t_0] : 0 < A_0 \leqslant a(t) \leqslant A_1 < \infty\}$ у себе. З того, що

$$\lim_{t\to 0} Pa(t) = \frac{\varkappa'(0)}{\psi_1(0) - \psi_2(0)}$$

і для всіх $t > 0$ є незалежна від $a(t) \in \mathcal{N}$ оцінка

$$|Pa(t+\delta) - Pa(t)| < C(\delta),$$

де $C(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, випливає, що множина $\{P\mathcal{N}\}$ є одностайно неперервною. Згідно з теоремою Шаудера рівняння (7) має хоча б один розв'язок $a(t) \in \mathcal{N}$. Підставляючи $a(t)$ в (6), отримуємо функцію $u(x,y,t)$ з потрібною гладкістю в області $D$ та на її межі.

Існування розв'язку $(u(x,y,t), a(t))$ задачі (1)–(5) встановлено, доведемо його єдиність.

Якщо $(u_i(x,y,t), a_i(t))$, $i = 1,2$ — два різні розв'язки задачі (1)–(5), то функції $u(x,y,t) = u_1(x,y,t) - u_2(x,y,t)$, $a(t) = a_1(t) - a_2(t)$ задовольняють такі умови:

$$u_t = a_1(t)\,\Delta u + a(t)\,\Delta u_2, \qquad (x,y,t) \in D, \tag{11}$$

$$u(x,y,0) = 0, \quad x \in [0,l], \quad y \in [0,h], \tag{12}$$

$$\begin{aligned} u_x(0,y,t) &= u_x(l,y,t) = \\ &= u_y(x,0,t) = u_y(x,h,t) = 0, \quad x \in [0,l],\, y \in [0,h],\, t \in [0,T], \end{aligned} \tag{13}$$

$$\int_0^l u(x,0,t)dx + \int_0^h u(l,y,t)dy - \int_0^l u(x,h,t)dx - \int_0^h u(0,y,t)dy = 0,\ t \in [0,T]. \tag{14}$$

За допомогою функції Гріна знаходимо розв'язок $u(x,y,t)$ задачі (11)–(13):

$$u(x,y,t) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau \int_0^l d\xi \int_0^h \Delta u_2(\xi,\eta,\tau) G(a_1,x,y,t,\xi,\eta,\tau)\,d\eta. \tag{15}$$

Підставивши (15) в (14) та продиференціювавши отриману рівність за $t$, одержуємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду стосовно $a(t)$:

$$a(t) = \int_0^t K(t,\tau) a(\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

де ядро інтегрального оператора має вигляд

$$K(t,\tau) = \frac{a_1(t)a_2(t)}{2\varkappa'(t)(\Theta_1(t) - \Theta_1(\tau))^{3/2}} \times$$

$$\times \left( \int_0^{l/2} (g_{1_\xi}(\xi,\tau) + (g_{1_\xi}(l-\xi,\tau)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\xi + nl) \exp\left( -\frac{(\xi+nl)^2}{4(\Theta_1(t) - \Theta_1(\tau))} \right) d\xi - \right.$$

$$\left. - \int_0^{h/2} (g_{2_\eta}(\eta,\tau) + (g_{2_\eta}(h-\eta,\tau)) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (\eta + nh) \exp\left( -\frac{(\eta+nh)^2}{4(\Theta_1(t) - \Theta_1(\tau))} \right) d\eta \right),$$

де $\Theta_1(t) = \int_0^t a_1(\tau)\, d\tau$, $g_1(x,t) = \int_0^h u_{2_{xx}}(x,y,t)dy + u_{2_y}(x,h,t) - u_{2_y}(x,0,t)$,

$g_2(y,t) = \int_0^l u_{2_{yy}}(x,y,t)dx + u_{2_x}(l,y,t) - u_{2_x}(0,y,t)$.

Ядро $K(t,\tau)$ оцінюють таким чином:

$$|K(t,\tau)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{t-\tau}}, \qquad \text{де} \quad M > 0,$$

тому воно є інтегровним на $[0,t]$. Отже, рівняння (16) має лише тривіальний розв'язок $a(t) \equiv 0$. З (15) знаходимо, що $u(x,y,t) \equiv 0$.

Отже, твердження доведене.

**Теорема 1.** *Якщо виконуються умови (A), (B), (C), то при досить малому $T > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(5).*

2. У попередній задачі додаткову умову (5) ми задавали у вигляді криволінійного інтеграла від температури по всій межі прямокутника $[0,l] \times [0,h]$. Розглянемо тепер задачу знаходження функцій $(u(x,y,t), a(t))$ з умов (1)–(4) та умови перевизначення

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,y_0,t)dx = \varkappa(t),\ 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant l,\ 0 \leqslant y_0 \leqslant h,\ t \in [0,T]. \tag{17}$$

Використовуючи (17), зведемо рівняння (1) до вигляду

$$a(t) = \frac{\varkappa'(t)}{\int_{x_1}^{x_2} \Delta u(x,y_0,t)\, dx}\ . \tag{18}$$

Функція $z(x,y,t) = \Delta u(x,y,t)$ є розв'язком задачі

$$\begin{gathered}
z_t = a(t)\Delta z, \qquad (x,y,t) \in D,\\
z(x,y,0) = \Delta\varphi(x,y),\\
a(t)z_x(0,y,t) = \mu_{1_t}(y,t), \qquad a(t)z_x(l,y,t) = \mu_{2_t}(y,t),\\
a(t)z_y(x,0,t) = \nu_{1_t}(x,t), \qquad a(t)z_y(x,h,t) = \nu_{2_t}(x,t),\\
x \in [0,l],\quad y \in [0,h],\quad t \in [0,T],
\end{gathered}$$

з якої за допомогою функції Гріна знаходимо

$$\begin{gathered}
z(x,y,t) = \int_0^l d\xi \int_0^h \Delta\varphi(\xi,\eta)G(a,x,y,t,\xi,\eta,0)\, d\eta +\\
+ \int_0^t d\tau \int_0^h (\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)G(a,x,y,t,l,\eta,\tau) - \mu_{1_\tau}(\eta,\tau)G(a,x,y,t,0,\eta,\tau))\, d\eta +\\
+ \int_0^t d\tau \int_0^l (\nu_{2_\tau}(\xi,\tau)G(a,x,y,t,\xi,h,\tau) - \nu_{1_\tau}(\xi,\tau)G(a,x,y,t,\xi,0,\tau))\, d\xi.
\end{gathered}$$

Справедлива така теорема.

**Теорема 2.** *Якщо виконуються умови* (A), (B) *та*
$\Delta\varphi(x,y) > 0,\ (x,y) \in [0,l] \times [0,h],$
$\varkappa'(t) > 0,\ t \in [0,T],$
$\mu_{1_t}(y,t) \leqslant 0,\ \mu_{2_t}(y,t) \geqslant 0, \qquad y \in [0,h],\ t \in [0,T],$
$\nu_{1_t}(x,t) \leqslant 0,\ \nu_{2_t}(x,t) \geqslant 0, \qquad x \in [0,l],\ t \in [0,T],$
*то існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(4),(17).

Умови теореми гарантують додатність розв'язків рівняння (18). Існування розв'язку встановлюють за допомогою принципу Шаудера про нерухому точку, єдиність доводять аналогічно до доведення єдиності в теоремі 1.

У випадку $x_1 = 0,\ x_2 = l$ достатньо взяти $\varphi(x,y)$ з класу $C^{1,2}([0,l] \times [0,h])$ і замінити умову $\Delta\varphi(x,y) > 0$ на $\int_0^l \varphi_{yy}(x,y)dx + \varphi_x(l,y) - \varphi_x(0,y) > 0$.

3. У випадку визначення функцій $u(x,y,t)$ та $a(t)$, які справджують рівняння (1), початкову умову (2), крайові умови

$$\begin{aligned} u(0,y,t) &= \mu_1(y,t), \qquad u(l,y,t) = \mu_2(y,t), \qquad y \in [0,h],\ t \in [0,T], \\ u(x,0,t) &= \nu_1(x,t), \qquad u(x,h,t) = \nu_2(x,t), \qquad x \in [0,l],\ t \in [0,T] \end{aligned}$$

та одну з умов перевизначення

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} u(x,y_0,t)\,dx &= \varkappa(t), \quad 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant l,\ \ 0 < y_0 < h,\ t \in [0,T], \\ a(t)\int_{x_1}^{x_2} u_y(x,y_0,t)\,dx &= \varkappa(t), \quad 0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant l,\ 0 \leqslant y_0 \leqslant h,\ t \in [0,T], \\ \int_0^l dx \int_0^h u(x,y,t)\,dy &= \varkappa(t), \quad t \in [0,T], \\ \int_0^l u_y(x,0,t)\,dx &= \varkappa(t), \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

теорему існування і єдиності розв'язку кожної із задач доводять методами, подібними до розглянутих.


1. Иванчов Н.И. *Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями* // Укр. мат. журн.— 1993.—Т.45, N 8.— С.1066–1071.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.— 736 с.
3. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969.— 448 с.


*Стаття надійшла до редколегії 05.06.96*

УДК 517.956

# ГІПЕРБОЛІЧНА ЗАДАЧА СТЕФАНА З НЕЛОКАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Г. І. Берегова

**G. I. Beregova. The hyperbolic Stefan problem with unlocal boundary conditions.** The problem with an unknown boundary for general hyperbolic system of equations of second order is considered. Unlocal boundary conditions are specified. The theorem of correct solvability of problem for local $t$ is proved.

**1. Формулювання задачі.** Нехай $G = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t \leqslant T, a_1(t) < x < a_2(t), a_i(0) = a_i$ – відомі константи, $i = 1,2, a_1 < a_2\}$, причому функції $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$ наперед невідомі. В $G$ розглянемо систему строго гіперболічних рівнянь другого порядку

$$\sum_{i=0}^{2} A_i^s \left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u^s = f^s(x,t), \tag{1}$$

де $A_i^s$ – лінійний однорідний диференціальний оператор порядку $i$ для кожного $s = 1, 2$

$$A_i^s \left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u^s \equiv \sum_{j=0}^{i} A_{ij}^s(x,t) \frac{\partial^i u^s}{\partial x^j \partial t^{i-j}},$$

коефіцієнти $A_{ij}^s$ якого є квадратними матрицями другого порядку, причому $A_{20}^s \equiv I$.

Нехай $\lambda_j^s(x,t) \quad (j, s = 1,2)$ — характеристичні числа оператора $A_2^s\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$. Припустимо, що при всіх $t \in [0,T]$ вирази $\lambda_j^s(a_1(t),t) - a_1'(t)$ та $\lambda_j^s(a_2(t),t) - a_2'(t)$ не мають нулів. Позначимо

$$I_1^{s+} = \{j : \lambda_j^s(a_1(t),t) - a_1'(t) > 0\}, \quad I_1^{s-} = \{j : \lambda_j^s(a_1(t),t) - a_1'(t) < 0\}.$$

Аналогічно вводимо множини $I_2^{s+}$ та $I_2^{s-}$. Причому $I_i^{\pm} = \bigcup\limits_{s=1}^{2} I_i^{s\pm}\ (i = 1,2)$.

Розглянемо таку задачу: для деякого $\varepsilon > 0$ потрібно знайти вектор–функцію $a(t)$ і у відповідній області $G_\varepsilon = \{(x,t) \in R^2 : 0 < t \leqslant \varepsilon, a_1(t) < x < a_2(t), a_i(0) = a_i, i = 1,2\}$ розв'язок $u^s(x,t)$ системи (1) так, щоб задовольнялись умови

$$\frac{\partial^i u^s}{\partial t}(x,0) = g_i^s(x), \quad x \in [a_1, a_2], \quad i = 0,1, \quad s = 1,2, \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 35R35; Secondary 35L99.

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}\left\{\sum_{q=1}^{2} B_{qik}^{sj}(t)\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j \partial t^{i-j}}\right|_{x=a_q(t)} + \\ + \int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)} C_{ik}^{sj}(\xi,t)\frac{\partial^i u^s(\xi,t)}{\partial \xi^j \partial t^{i-j}}\,d\xi\Bigg\} = h_k(t), \quad k=\overline{1,N_0}, \quad t\in[0,T], \tag{3}$$

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}\int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)} C_{ik}^{sj}(\xi,t)\frac{\partial^i u^s(\xi,t)}{\partial \xi^j \partial t^{i-j}}\,d\xi = h_k(t), \quad k=\overline{N_0+1,N}, \quad t\in[0,T], \tag{4}$$

де $g_i(x)$, $B_{qik}^{sj}$, $C_{ik}^{sj}$ та $h_k(t)$ — задані функції, $0 \leqslant N_0 \leqslant N$, $N$ — кількість елементів множини $I_1^+ \cup I_2^-$.

Додатково задаються умови на невідомі межі

$$\begin{gathered} a_i''(t) = F_i\left(t, a(t), a'(t), u(a(t),t)\right), \\ a_i(0)=a_i, \quad a_i'(0)=\alpha_i, \quad i=1,2, \quad \forall t\in[0,T], \end{gathered} \tag{5}$$

де $F_i$ — також задані функції, $u=\operatorname{col}(u^1,u^2)$.

**2. Розв'язність задачі.** Перед означенням узагальненого розв'язку задачі (1)–(5) попередньо її перетворимо, припустивши, що шуканий розв'язок є двічі неперервно диференційовний і всі рівності (1)–(4) задовольняються. При кожному $s=1,2$ розглянемо оператор [1]

$$M_i^s\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^s = \sum_{l=1}^{2} b_{il}^s(x,t)\frac{\partial u^s}{\partial x^{2-l}\partial t^{l-1}}, \quad i,s=1,2 \tag{6}$$

з характеристичною формою

$$\sum_{l=1}^{2} b_{il}^s(x,t)\lambda^{l-1}\xi^{2-l} = \lambda - \lambda_j^s(x,t)\xi, \quad i\neq j,\, i=1,2.$$

Для кожного $s=1,2$ оператори $M_i^s$ становлять базис у просторі лінійних однорідних диференціальних операторів першого порядку і в цьому випадку

$$\frac{\partial u^s}{\partial x^{2-i}\partial t^{i-1}} = \sum_{l=1}^{2} c_{il}^s(x,t)M_l^s\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^s, \quad i=1,2, \tag{7}$$

де

$$c_{il}^s(x,t) = \frac{\left(\lambda_l^s(x,t)\right)^{i-1}}{\lambda_l^s(x,t)-\lambda_j^s(x,t)}, \quad l\neq j,\, j=1,2.$$

Приймемо

$$v_j^s(x,t) = M_j^s\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)u^s(x,t), \quad j,s=1,2. \tag{8}$$

Тоді систему (1) можна переписати в такому вигляді:

$$\frac{\partial v_j^s}{\partial t} + \lambda_j^s(x,t)\frac{\partial v_j^s}{\partial x} = \sum_{l=1}^{2} a_{jl}^s(x,t)v_l^s(x,t) + S_j^s(x,t)u^s + f^s(x,t), \quad j,s=1,2, \tag{9}$$

де коефіцієнти $a_{jl}^s(x,t)$ та $S_j^s(x,t)$ визначаються через коефіцієнти системи (1).

Нехай $l : y = \psi(\tau;x,t)$ – довільна гладка крива, яка з'єднує точку $(x,t) \in \overline{G_\varepsilon}$ з відрізком $[a_1,a_2]$, повністю лежить в $\overline{G_\varepsilon}$ і $\psi(t;x,t) = x$.

Виразимо $u^s$ через $v_j^s$. Для цього в очевидній рівності

$$u^s(x,t) = u^s(\psi(0;x,t),0) + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\big(u^s(\psi(\tau,x,t),\tau)\big)\,d\tau$$

розпишемо підінтегральний доданок за формулою похідної від складної функції. В результаті отримаємо зображення

$$u^s(x,t) = g_0^s(\psi(0;x,t)) + \int_0^t \sum_{l=1}^{2} G_l^s(\tau,x,t)v_l^s\big(\psi(\tau;x,t),\tau\big)\,d\tau, \quad s=1,2. \tag{10}$$

Підставляючи (10) у рівняння (9), одержуємо систему інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v_j^s}{\partial t} + \lambda_j^s(x,t)\frac{\partial v_j^s}{\partial x} = \sum_{l=1}^{2} a_{jl}^s(x,t)v_l^s(x,t) + S_j^s(x,t)g_0^s(\psi(0;x,t)) + \\ + \int_0^t \sum_{l=1}^{2} Q_{jl}^s(\tau,x,t)v_l^s\big(\psi(\tau;x,t),\tau\big)\,d\tau + f^s(x,t), \quad j,s=1,2.\end{gathered} \tag{11}$$

Початкові умови (2) з врахуванням (8) дають рівності

$$v_j^s(x,0) = \sum_{i=1}^{2} b_{j,3-i}^s(x,0)\frac{d^{i-1}g_{2-i}^s(x)}{dx^{i-1}} = \psi_j^s(x), \quad j,s=1,2. \tag{12}$$

Умови (3),(4) з врахуванням (6), (8), (10) мають такий вигляд:

$$\sum_{l,s=1}^{2}\sum_{j=0}^{1}\left\{\sum_{q=1}^{2} B_{q1k}^{sj}(t)c_{2-j,l}^{s}(x,t)v_l^s(x,t)\bigg|_{x=a_q(t)} + \right. \tag{13}$$

$$\left. + \int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)} C_{1k}^{sj}(\xi,t)c_{2-j,l}^{s}(\xi,t)v_l^s(\xi,t)\,d\xi\right\} = H_k^1(t;v), \quad k=\overline{1,N_0},$$

$$\sum_{l,s=1}^{2}\sum_{j=0}^{1}\int\limits_{a_1(t)}^{a_2(t)} C_{1k}^{sj}(\xi,t)c_{2-j,l}^{s}(\xi,t)v_l^s(\xi,t)\,d\xi = H_k^2(t;v), \quad k=\overline{N_0+1,N}, \tag{14}$$

де $H_k^i$ – відомі величини, побудовані з коефіцієнтів та вільних членів задачі (1)–(4).

Для кожного $s=1,2$ введемо матриці

$$\alpha^{1s}(t) = \left\|\sum_{j=0}^{1} B_{11k}^{sj}(t)c_{2-j,l}^{s}(a_1(t),t)\right\|, \quad k=\overline{1,N_0}, \quad l\in I_1^{s+};$$

$$\alpha^{2s}(t) = \left\|\sum_{j=0}^{1} B_{21k}^{sj}(t)c_{2-j,l}^{s}(a_2(t),t)\right\|, \quad k=\overline{1,N_0}, \quad l\in I_2^{s-};$$

$$\alpha^{3s}(t) = \left\|\sum_{j=0}^{1} C_{1k}^{sj}(a_1(t),t)c_{2-j,l}^{s}(a_1(t),t)\big(\lambda_l^s(a_1(t),t)-a_1'(t)\big)\right\|, \ k=\overline{N_0+1,N},\ l\in I_1^{s+};$$

$$\alpha^{4s}(t) = \left\|-\sum_{j=0}^{1} C_{1k}^{sj}(a_2(t),t)c_{2-j,l}^{s}(a_2(t),t)\big(\lambda_l^s(a_2(t),t)-a_2'(t)\big)\right\|, \ k=\overline{N_0+1,N},\ l\in I_2^{s-}$$

(тут індекс $l$ відповідає номеру стовпця, $k$ – номеру рядка). Побудуємо квадратну матрицю $\beta(t)$ порядку $N$

$$\beta(t) = \left\|\begin{matrix} \alpha^{11}(t) & \alpha^{12}(t) & \alpha^{21}(t) & \alpha^{22}(t) \\ \alpha^{31}(t) & \alpha^{32}(t) & \alpha^{41}(t) & \alpha^{42}(t)\end{matrix}\right\|.$$

Припустимо, що виконується умова

$$\det\beta(t)\neq 0, \qquad \forall t\in[0,T], \tag{15}$$

яка є аналогом умови Лопатинського для задачі, яку розглядаємо.

Для кожного $s=1,2$ введемо додаткові невідомі функції

$$v_j^s(a_1(t),t)=\mu_j^s(t), \quad j\in I_1^{s+}, \qquad v_j^s(a_2(t),t)=\nu_j^s(t), \quad j\in I_2^{s-}. \tag{16}$$

Нехай $x = \varphi_j^s(t;\xi,\tau)$ – розв'язок характеристичного рівняння $dx\,/\,dt = \lambda_j^s(x,t)$ з початковими умовами $x(\tau)=\xi$, де $(\xi,\tau)\in\overline{G_\varepsilon}$. Через $L_j^s(\xi,\tau)$ позначимо відповідну характеристику, що проходить через $(\xi,\tau)$ і продовжена в бік спадання $t$ до перетину з межею $G_\varepsilon$. Нехай $t_j^s(\xi,\tau)$ – найменше значення $t$ для точок такої характеристики. Очевидно, що $0\leqslant t_j^s(\xi,\tau)\leqslant\tau$. Область $G_\varepsilon$ розіб'ємо на три частини:

$$
\begin{aligned}
G_j^{s0} &= \big\{(\xi,\tau): t_j^s(\xi,\tau)=0\big\},\\
G_j^{s1} &= \big\{(\xi,\tau): t_j^s(\xi,\tau)>0,\quad \varphi_j^s(t_j^s(\xi,\tau);\xi,\tau)=a_1(t_j^s(\xi,\tau))\big\},\\
G_j^{s2} &= \big\{(\xi,\tau): t_j^s(\xi,\tau)>0,\quad \varphi_j^s(t_j^s(\xi,\tau);\xi,\tau)=a_2(t_j^s(\xi,\tau))\big\}.
\end{aligned}
$$

Довільна з множин $G_j^{s1}$ або $G_j^{s2}$ може бути порожньою.

Враховуючи (12) та (16), проінтегруємо (11) уздовж характеристик. У результаті отримаємо

$$
\begin{aligned}
v_j^s(x,t) = \Omega_j^s(x,t) + \int\limits_{t_j^s(x,t)}^{t} \Bigg[ \sum_{l=1}^{2} a_{jl}^s(\varphi_j^s(\tau;x,t),\tau)\, v_l^s(\varphi_j^s(\tau;x,t),\tau) + \\
+ S_j^s(\varphi_j^s(\tau;x,t),\tau)\, g_0^s\big(\psi(0;\varphi_j^s(0;x,t),t)\big) + \int\limits_0^{\tau} \sum_{l=1}^{2} Q_{jl}^s(\eta,\varphi_j^s(\eta;x,t),t)\times \\
\times v_l^s\big(\psi(\eta;\varphi_j^s(\eta;x,t),t),\eta\big)\,d\eta + f^s(\varphi_j^s(\tau;x,t),\tau)\Bigg]\,d\tau,\quad j,s=1,2,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

де

$$
\Omega_j^s(x,t) = \begin{cases} \psi_j^s(\varphi_j^s(0;x,t)), & \text{при } (x,t)\in G_j^{s0},\\ \mu_j^s(t_j^s(x,t)), & \text{при } (x,t)\in G_j^{s1},\\ \nu_j^s(t_j^s(x,t)), & \text{при } (x,t)\in G_j^{s2}. \end{cases}
$$

Для того, щоб функції $v_j^s(x,t)$ під час переходу з $G_j^{s0}$ в $G_j^{s1}$ і $G_j^{s2}$ були неперервно диференційовні, необхідно, щоб для кожного $s=1,2$ виконувались умови узгодження нульового та першого порядків відповідно

$$
\begin{aligned}
\mu_j^s(0)=\psi_j^s(a_1),\quad j\in I_1^{s+},\qquad \nu_j^s(0)=\psi_j^s(a_2),\quad j\in I_2^{s-};\\
\mu_j^{s\prime}(0)=\psi_j^{s\prime}(a_1)\big(\alpha_1-\lambda_j^s(a_1,0)\big),\quad j\in I_1^{s+},\\
\nu_j^{s\prime}(0)=\psi_j^{s\prime}(a_2),\big(\alpha_2-\lambda_j^s(a_2,0)\big),\quad j\in I_2^{s-}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

**Означення 1.** *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) будемо називати неперервно диференційовну функцію $u=\operatorname{col}(u^1,u^2)$, для якої виконується (10), де вектор-функція $v$ є узагальненим розв'язком задачі (11), (12)–(14), тобто $v$ – це неперервно диференційовна функція, яка задовольняє при всіх $(x,t)$ інтегро-функціональне рівняння (17) і умови (12)–(14).*

**Означення 2.** *Узагальненим розв'язком задачі (1)–(5) будемо називати набір функцій $a_i(t) \in C^2([0,\varepsilon]), i = 1,2$ для деякого $\varepsilon > 0$ та узагальнений (у сенсі означення 1) розв'язок $u(x,t)$ в $\overline{G_\varepsilon}$ задачі (1)–(4), які задовольняють умову (5) для всіх $t \in [0,\varepsilon]$.*

**Теорема.** *Нехай*

*1) функції $A^s_{2j}(x,t) \in C^2(\overline{G_0})$, $A^s_{ij}(x,t), f^s(x,t) \in C^1(\overline{G_0})$, $g^s_i(x) \in C^{2-i}([a_1,a_2])$, де $\overline{G_0} = \{(x,t) : a_1 - \alpha_1\varepsilon_0 \leqslant x \leqslant a_2 + \alpha_2\varepsilon_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0\}$ для деякого $\varepsilon_0 > 0$, $i = 0,1$, $j = \overline{0,2}$, $s = 1,2$;*

*2) при $k = \overline{1, N_0}$ функції $B^{sj}_{qik}(t), h_k(t) \in C^1([0,\varepsilon_0])$, $C^{sj}_{ik}(x,t) \in C^1(\overline{G_0})$;*

*3) при $k = \overline{N_0+1, N}$ функції $C^{sj}_{1k}(x,t) \in C^2(\overline{G_0})$, $C^{sj}_{0k}(x,t)$ неперервно диференційовні за двома змінними та двічі неперервно диференційовні за $t$ в $\overline{G_0}$;*

*4) функції $F_i(t,x,y,z)$ визначені та неперервні за всіма аргументами в $P = [0,\varepsilon_0]\times [a - \alpha\varepsilon_0, a + \alpha\varepsilon_0] \times [-\alpha,\alpha] \times \mathbb{R}^4$ і задовольняють умову Ліпшиця за всіма змінними зі сталою $M$;*

*5) виконуються умови узгодження в точках $(a_1,0)$ та $(a_2,0)$*

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}\left\{\sum_{q=1}^{2} B^{sj}_{qik}(0) g^{s(j)}_{i-j}(a_q) + \int_{a_1}^{a_2} C^{sj}_{ik}(\xi,0) g^{s(j)}_{i-j}(\xi)\,d\xi\right\} = h_k(0), \quad k = \overline{1,N_0},$$

$$\sum_{s=1}^{2}\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}\int_{a_1}^{a_2} C^{sj}_{ik}(\xi,0) g^{s(j)}_{i-j}(\xi)\,d\xi = h_k(0), \quad k = \overline{N_0+1,N},$$

$$a_i^{''}(0) = F_i\left(0, a, \alpha, g_0(a)\right), \quad i = 1,2,$$

*де $a = (a_1,a_2)$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$;*

*6) виконується умова (15).*

*Тоді існує таке значення $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, що задача (1)–(5) має в $\overline{G_\varepsilon}$ єдиний узагальнений розв'язок, визначений для всіх $t \in [0,\varepsilon]$.*

*Доведення.* Позначимо через $Q^{h,d}_\varepsilon$ множину функцій $a(t) = (a_1(t), a_2(t)) \in \left[C^2[0,\varepsilon]\right]^2$, для яких

$$|a_i(t) - a_i| < \varepsilon(\alpha+1), \quad \left|a_i'(t) - \alpha_i\right| < h, \quad \left|a_i^{''}(t) - a_i^{''}(0)\right| < d, \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \quad i = 1,2.$$

Будемо вважати $\varepsilon, h$ і $d$ настільки малими, щоб для всіх таких функцій виконувалася умова (15). Для кожної фіксованої функції $a(t) \in Q^{h,d}_\varepsilon$ маємо задачу (1)–(4), розв'язок якої $u^s(x,t)$ є значенням деякого оператора на $a(t)$.

Використовуючи методику [2] для перетворення умов (13), (14), одержимо систему рівнянь, яку запишемо в операторній формі

$$\big(\beta\nu\big)(t) = \big(K\nu\big)(t) + \big(Lv\big)(t) + \big(\tilde{L}f\big)(t) + \tilde{h}(t), \tag{19}$$

де $\nu(t)$ – вектор-стовпець, який складається відповідно з $\mu^s_j(t)$ для $j \in I^{s+}_1$ та $\nu^s_j(t)$ для $j \in I^{s-}_2$; $K$ – матричний лінійний інтегральний оператор типу Вольтерра, елементами якого для кожного $s = 1, 2$ є лінійна комбінація інтегралів вигляду

$$\int_0^t R_{jk}^{s1}(\tau, t)\mu_j^s(\tau)\, d\tau, \qquad j \in I_1^{s+}, \quad k = \overline{1, N_0},$$

$$\int_0^t (R_{jk}^{s2}(\tau, t)\mu_j^s(\tau)\, d\tau, \qquad j \in I_1^{s+}, \quad k = \overline{N_0 + 1, N};$$

$$\int_0^t R_{jk}^{s2}(\tau, t)\nu_j^s(\tau)\, d\tau, \qquad j \in I_2^{s-}, \quad k = \overline{1, N_0},$$

$$\int_0^t R_{jk}^{s4}(\tau, t)\nu_j^s(\tau)\, d\tau, \qquad j \in I_2^{s-}, \quad k = \overline{N_0 + 1, N}$$

з неперервними відомими ядрами $R_{jk}^{sl}$ ; $L$ та $\tilde{L}$ – матричні лінійні інтегральні оператори типу Вольтерра, елементи яких мають неперервні ядра і які діють відповідно на вектор-функцію $v$ з компонентами $v_j^s(x, t)$ та вектор-функцію $f$ з компонентами $f^s$; $\tilde{h}(t)$ – стовпець висотою $N$ з елементами $\tilde{h}_k(t)$, які містять функції $h_k(t), h'_k(t)$ та ще деякі вирази з відомими функціями, залежними від $t$.

На підставі умови (15) рівняння (19) перепишемо у вигляді

$$\nu(t) = \beta^{-1}\big(K\nu + Lv + \tilde{L}f + \tilde{h}\big)(t)$$

або

$$\big(\big[I - \beta^{-1}K\big]\nu\big)(t) = \beta^{-1}\big(Lv + \tilde{L}f + \tilde{h}\big)(t). \tag{20}$$

Оскільки $K$ – інтегральний оператор типу Вольтерра, норма якого при достатньо малому $\varepsilon > 0$ як завгодно мала, то ми можемо перейти до рівняння

$$\nu(t) = \big[B\big(Lv + \tilde{L}f + \tilde{h}\big)\big](t), \tag{21}$$

де $B = (I - \beta^{-1}K)^{-1}\beta^{-1}$.

З іншого боку, рівняння (17) в операторній формі буде мати вигляд

$$v(x, t) = \big(Q\nu\big)(x, t) + \big(L_1 v\big)(x, t) + \big(\tilde{L}_1 f\big)(x, t) + \tilde{f}(x, t), \tag{22}$$

де $Q$ – оператор зсуву, який діє за формулами

$$\begin{aligned} \big(Q\mu_j^s\big)(t) &= \mu_j^s(t_j^s(a_2(t), t)), \quad j \in I_1^{s+}, \\ \big(Q\nu_j^s\big)(t) &= \nu_j^s(t_j^s(a_1(t), t)), \quad j \in I_2^{s-},\ s = 1, 2; \end{aligned}$$

$L_1$ та $\tilde{L}_1$ – матричні інтегральні оператори типу Вольтерра з неперервними ядрами. Для того, щоб оператор $Q$ був однозначно визначений і при неперервно диференційовній вектор-функції $\nu(t)$ давав неперервно диференційовну вектор-функцію $\big(Q\nu\big)(x, t)$

необхідно і достатньо, щоб виконувались умови узгодження (18). З умови *5* теореми випливає, що функції $\mu_j^s(t)$ та $\nu_j^s(t)$, виражені співвідношенням (21), задовольняють умови (18) для довільного $v$.

Підставивши (21) в (22), одержимо співвідношення

$$\big([I - QBL - L_1]v\big)(x,t) = \big[(QB\tilde{L} + \tilde{L}_1)f\big](x,t) + \big(QB\tilde{h} + \tilde{f}\big)(x,t). \tag{23}$$

Отже, система рівнянь (12)–(14), (17) еквівалентна системі рівнянь (23), в якій нема $\nu$.

Оскільки $L$ і $L_1$ – інтегральні оператори типу Вольтерра, то (23) можна переписати у вигляді

$$v(x,t) = \big(I - QBL - L_1\big)^{-1}\big[(QB\tilde{L} + \tilde{L}_1)f + \big(QB\tilde{h} + \tilde{f}\big)\big](x,t). \tag{24}$$

Отже, ми знайшли розв'язок задачі (11)–(14). Відповідно, враховуючи (10), маємо зображення розв'язку задачі (1)–(4) для кожної функції $a(t)$. Потрібно лише із всієї множини допустимих функцій $a(t)$ вибрати ту, для якої виконуються умови (5). Кожній функції $a \in Q_\varepsilon^{h,d}$ відповідає узагальнений розв'язок у $\overline{G}_\varepsilon = \overline{G}_{\varepsilon,a}$ відповідної задачі (1)–(4); цей розв'язок ми позначимо через $U(x,t;a)$ (його значення для фіксованих $x,t$ є функціоналом щодо $a$).

Для кожного $s = 1,2$ залежність $U^s(a(t),t;a)$ у метриці рівномірного відхилення від $a$ як елемента $C^2[0,\varepsilon] \times C^2[0,\varepsilon]$ задовольняє умову Ліпшиця: $\exists L \geqslant 0 \quad \forall a^1, a^2 \in Q_\varepsilon^{h,d}$ :

$$\begin{gathered}\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}\big|U^s(a^1(t),t;a^1) - U^s(a^2(t),t;a^2)\big| \leqslant \\ \leqslant L\big[\max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}\big|a^1(t) - a^2(t)\big| + \max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}\big|a^{1\prime}(t) - a^{2\prime}(t)\big| + \max_{0\leqslant t\leqslant\varepsilon}\big|a^{1''}(t) - a^{2''}(t)\big|\big].\end{gathered} \tag{25}$$

Щоб перевірити співвідношення (25), зауважимо, що з (10), (24) можна вивести апріорні оцінки для розв'язку та його похідних $\dfrac{\partial u^s}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u^s}{\partial t}$ через задані функції, з яких зокрема випливає, що

$$\begin{gathered}\big|U^s(x,t;a)\big| \leqslant U_0 = \text{const}, \quad \big|U_x^{s\prime}(x,t;a)\big| \leqslant U_1 = \text{const}, \quad \big|U_t^{s\prime}(x,t;a)\big| \leqslant U_2 = \text{const} \\ (s = 1,2, \quad (x,t) \in \overline{G_\varepsilon}, \quad a \in Q_\varepsilon^{h,d}).\end{gathered}$$

Тому і на лініях $x = a_i(t) (i = 1,2)$ залежність розв'язку задачі (1)–(4) від функціонального параметра $a$ задовольняє умову Ліпшиця, звідки і випливає (25).

Розглянемо на $Q_\varepsilon^{h,d}$ оператор $A$, який задається системою рівнянь

$$\begin{cases} a(t) = a + \alpha t + \int_0^t d\tau \int_0^\tau F\big(\eta, a(\eta), a'(\eta), U(a(\eta), \eta; a(\eta))\big)\, d\eta, \\ a'(t) = \alpha + \int_0^t F\big(\tau, a(\tau), a'(\tau), U(a(\tau), \tau; a(\tau))\big)\, d\tau, \quad t \in [0,\varepsilon], \end{cases}$$

де $F = (F_1, F_2)$. З умов *4, 5* теореми та того, що $U_j^s(a(t),t;a)$ задовольняє умову Ліпшиця по $a$, випливає, що при достатньо малому $\varepsilon$ оператор $A$ відображає $Q_\varepsilon^{h,d}$ в себе і в метриці $C^2[0,\varepsilon] \times C^2[0,\varepsilon]$ є стиском. Тому з принципу стисних відображень випливає існування та єдиність нерухомої точки оператора, тобто шуканого розв'язку, який можна отримати методом ітерацій. Теорему доведено.

1. Мельник З.О., Кирилич В.М. *Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой* // Укр. мат. журн.— 1983.— Т.35, N6.— С. 722–727.

2. Кирилич В.М. *Нелокальная задача типа Стефана для гиперболической системы первого порядка* // Укр. мат. журн.— 1988.— Т.40, N1.— С. 121–123.

3. Мельник З.О. *Змішана задача з невідомою границею для загального двовимірного гіперболічного рівняння другого порядку* // Доп. АН УРСР.— 1982.— N8.— С. 13–15.

*Стаття надійшла до редколегії 12.06.96*

УДК 517.927.25+512.928.5

# ПРО ПОМІРНО СИНГУЛЯРНІ СІМ'Ї КОМПАКТНИХ ОПЕРАТОРІВ У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ СИЛЬНО НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ

Ю. Д. Головатий

**Yu.D. Holovatyĭ. Moderately singular families of compact operators in problems of non-homogeneous medium theory.** Singular perturbed eigenvalue problems which deal with the non-homogeneous vibrating systems are considerated. The classification of families of compact operators $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ which apear in such problems is proposed. Some results for so-called moderately singular families are obtained and illustrated by examples.

Ми вивчали один клас сингулярно збурених задач на власні значення, які виникають в теорії сильно неоднорідних середовищ. Нові моделі, запропоновані для композитних матеріалів, дали змогу математично описати специфічні ефекти, властиві лише сильно неоднорідним коливним ситемам [1–10]. Наприклад, математично описано *ефект локальних коливань*, отриманий раніше тільки експериментально: для системи з локальними збуреннями густини характерні власні коливання, які зосереджуються в околі області збурення і загасають поза цим околом.

Під час дослідження таких задач з'являються сім'ї компактних операторів $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ із сингулярною залежністю від малого параметра $\varepsilon$, а основною проблемою є побудова асимптотики їхнього спектра при $\varepsilon \to 0$. Ми запропонували певну класифікацію таких сімей та загальну схему побуви й обгрунтування асимптотики у випадку помірно сингулярних збурень. Отримані результати проілюстровані прикладами конкрентних коливних систем, які ми дослідили в попередніх працях.

Нехай $\Omega$ — обмежена область в $\mathbb{R}^N$ з гладкою границею $\partial\Omega$, а $\gamma$ — гладкий замкнений многовид вимірності $k < N$, який лежить в $\Omega$. Через $\omega_\varepsilon$ позначимо $\varepsilon$-окіл $\gamma$. Введемо в області $\Omega$ додатну функцію $p(x)$ та послідовність невід'ємних функцій $q_\varepsilon(x)$, для яких $\operatorname{supp} q_\varepsilon = \bar{\omega}_\varepsilon$.

Розглянемо задачу на власні значення

$$\mathcal{P}(x,\partial_x)u_\varepsilon - \lambda^\varepsilon(p(x) + \varepsilon^{-m} q_\varepsilon(x))u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\mathcal{B}_j(x,\partial_x)u_\varepsilon = 0, \qquad j = 1,\dots,S \qquad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

де $\mathcal{P}$ — еліптичний оператор порядку $2S$, $\mathcal{B}_j$ — оператори граничних умов, $\lambda^\varepsilon$ — спектральний параметр, $m \in \mathbb{R}$. За деяких додаткових умов на оператори $\mathcal{P}$ і $\mathcal{B}_j$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A75; Secondary 35B25.

знаходження асимптотики власних значень та власних функцій задачі (1),(2) зводиться до вивчення сім'ї компактних операторів $A(\varepsilon, m)$, породжених у відповідних просторах С.Л.Соболєва білінійними формами

$$a_{\varepsilon,m}(u,v) = (pu,v)_{L_2(\Omega)} + \varepsilon^{-m}(q_\varepsilon v, v)_{L_2(\omega_\varepsilon)}.$$

Зауважимо, що хоча параметр $m$ набуває довільних дійсних значень, кількість випадків різної асимптотичної поведінки при $\varepsilon \to 0$ власних елементів операторів $A(\varepsilon, m)$ скінченна.

**1. Регулярні, помірно та сильно сингулярні сім'ї операторів.** Нехай $H$ — сепарабельний гільбертовий простір з скалярним добутком $(u, v)$ та нормою $\|u\|$. Розглянемо в $H$ сім'ю самоспряжених, додатно визначених, компактних операторів $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, які неперервно залежать від малого параметра $\varepsilon$. Нас буде цікавити асимптотична поведінка спектра $\sigma(B_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Оскільки у загальному випадку біфуркаційна картина власних значень $\mu(\varepsilon)$ операторів $B_\varepsilon$ досить складна, то недоцільно впорядковувати їх за зростанням. Ми будемо вивчати асимптотику пар власних елементів $(\mu(\varepsilon), u_{\mu(\varepsilon)})$, які неперервно залежать від $\varepsilon$. Виберемо пари так, щоб власні вектори всіх пар при фіксованому $\varepsilon$ утворювали ортонормовану базу в $H$. Така множина пар існує, хоча її вибір неоднозначний. Уведемо позначення: $S_0 = \{\mu(\varepsilon) : \mu(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0\}, S_\infty = \{\mu(\varepsilon) : \mu(\varepsilon) \to \infty, \varepsilon \to 0\}$, а через $S_b$ позначимо множину решти власних значень $\mu(\varepsilon)$.

Розглянемо лінійний многовид

$$V = \{v \in H : \varlimsup_{\varepsilon\to 0}(B_\varepsilon v, v) < +\infty\},$$

за властивостями якого класифікуємо сім'ї $B_\varepsilon$. Можливі три ситуації: $V = H$, $V$ — замкнений підпростір в $H$ або $V$ — незамкнений $H$.

У першому випадку оператори $B_\varepsilon$ рівномірно обмежені, тобто $\|B_\varepsilon\| \leqslant M$ для деякої сталої $M > 0$ і всіх $\varepsilon > 0$, а множина $S_\infty$ порожня. Таку сім'ю операторів будемо називати *регулярною*. Якщо оператори $B_\varepsilon$ збігаються до деякого оператора $B_0$ в $H$, то, як відомо, відстань між спектрами цих операторів визначається величиною $\|B_\varepsilon - B_0\|$. Нижче ми сформулюємо строгий результат.

Нехай $V$ — гільбертів підпростір, який не збігається з $H$. Тоді сім'ю $B_\varepsilon$ будемо називати *помірно сингулярною*. Для такої сім'ї ми запропонуємо загальну схему побудови та обгрунтування асимптотики власних значень $\mu(\varepsilon) \in S_b$ та відповідних власних підпросторів.

**Зауваження 1.** *Оскільки під час дослідження конкретної задачі кожне її власне значення $\mu(\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,1)$, відповідною заміною спектрального параметра можна перевести у множину $S_b$, то лише ця серія власних значень буде об'єктом нашого дослідження.*

У випадку, коли $V$ – незамкнений лінійний многовид у $H$, будемо говорити про *сильно сингулярну* сім'ю операторів $B_\varepsilon$. Це, як звичайно, найскладніший для дослідження, але одночасно найцікавіший клас сингулярно збурених спектральних задач.

Позначимо через $\sigma(B)$ спектр оператора $B$, через $N(\mu, B)$ – власний підпростір, який відповідає власному значенню $\mu \in \sigma(B)$. *Розхилом* між підпросторами $U$ та $V$ простору $H$ назвемо величину

$$\Theta_H(U, V) = \|P_U - P_V\|,$$

де $P_U$ та $P_V$ — відповідні ортопроектори.

Нехай $\{\mu_s\}_{s=1}^{\infty}$ — послідовність власних значень оператора $B_0$, перерахованих з урахуванням кратності.

**Теорема 1.** *Якщо сім'я операторів $B_\varepsilon$ регулярна і $B_\varepsilon \to B_0$, то множину $S_b$ можна записати у вигляді такої послідовності неперервних власних значень $\{\mu_s(\varepsilon)\}_{s=1}^{\infty}$, що*

$$|\mu_s(\varepsilon) - \mu_s| \leqslant \|B_\varepsilon - B_0\|.$$

*Нехай $\mu \in \sigma(B_0) \setminus \{0\}$, а $N_\varepsilon(\mu) = \bigoplus N(\mu_k(\varepsilon), B_\varepsilon)$, де сумування проводиться для всіх $k$, для яких $\mu_k(\varepsilon) \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді*

$$\Theta_H(N(\mu, B_0), N_\varepsilon(\mu)) \leqslant d^{-1}\|B_\varepsilon - B_0\|,$$

*де $d = \inf_{\mu_s \neq \mu} |\mu_s - \mu|$ [8,11].*

**2. Схема дослідження асимптотики спектра помірно сингулярної сім'ї операторів.** Нехай $B_\varepsilon$ — помірно сингулярна сім'я, а $P : H \to V$ — ортопроектор на відповідний підпростір $V$.

**Лема 1.** *Сім'я операторів $PB_\varepsilon P$ є рівномірно обмежена в просторі $H$.*

*Доведення.* Нехай $\|PB_\varepsilon P\| \to \infty, \varepsilon \to 0$. Згідно з принципом фіксації особливості [12] існує такий вектор $v \in H$, що $\|PB_\varepsilon Pv\| \to \infty, \varepsilon \to 0$. Але тоді

$$(PB_\varepsilon Pv, v) = (B_\varepsilon Pv, Pv) \to \infty,$$

а отже, вектор $Pv$ не належить простору $V$. Отримали суперечність. Лему доведено.

Оскільки власні вектори $u_{\mu(\varepsilon)}$ нормовані, то існує така підпослідовність $\varepsilon' \to 0$, що $u_{\mu(\varepsilon')} \to v$ слабко в $H$ для деякого вектора $v \in H$. Однак для класу задач, які ми вивчаємо, завжди вдається показати, що тоді $\|u_{\mu(\varepsilon')}\| \to \|v\|$, тобто є сильна збіжність підпослідовності $u_{\mu(\varepsilon')}$ при $\varepsilon' \to 0$. Тому зробимо таке припущення: *слабко збіжна підпослідовність послідовності $\{u_{\mu(\varepsilon)}\}_{\varepsilon>0}$ є сильно збіжна в $H$.*

Також нехай виконуються умови.

**Умова (A).** *Для кожного власного значення $\mu(\varepsilon) \in S_b$ маємо*

$$\|(I - P)u_{\mu(\varepsilon)}\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

**Умова (B).** *Для всіх власних векторів $u_{\mu(\varepsilon)}$, де $\mu(\varepsilon) \in S_b$, справедливо*

$$\|PB_\varepsilon(I-P)u_{\mu(\varepsilon)}\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

**Умова (C).** *У просторі $V$ існує такий оператор $A_0$, що $PB_\varepsilon|_V \to A_0$. Крім того, для кожного власного вектора $v_\mu$, який відповідає власному значенню $\mu$ оператора $A_0$, існує такий вектор $w_\varepsilon$, що $\|w_\varepsilon\| \to 0$ і*

$$\|B_\varepsilon(v_\mu + w_\varepsilon) - \mu v_\mu\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

**Зауваження 2.** *Для обгрунтування асимптотики власних значень часто використовують таке твердження:*

*Нехай $B$ — самоспряжений компактний оператор у гільбертовому просторі $H$. Якщо існує число $\mu > 0$ і вектор $u \in H, ||u|| = 1$, такі що $||Bu - \mu u|| \leqslant \alpha, \quad \alpha > 0$, то знайдеться таке власне значення $\mu_k$ оператора $B$, що $|\mu_k - \mu| \leqslant \alpha$. Крім того, для будь-якого $d > \alpha$ існує вектор $U$, що $||u - U|| \leqslant 2\alpha d^{-1}, \quad ||U|| = 1$, і $U$ є лінійна комбінація власних векторів оператора $B$, які відповідають власним значенням $B$ з інтервалу $[\mu - d, \mu + d]$ [13].*

*Пару $(\mu, u)$ будемо називати майже-власними елементами оператора $B$. У конкретних задачах теорії сильно неоднорідних середовищ не завжди власне значення $\mu$ оператора $A_0$ та відповідний власний вектор $v_\mu$ забезпечують прямування величини $\|B_\varepsilon v_\mu - \mu v_\mu\|$ до нуля. Однак можна побудувати такий нескінченно малий коректор $w_\varepsilon$, що*

$$\|B_\varepsilon(v_\mu + w_\varepsilon) - \mu(v_\mu + w_\varepsilon)\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

*Умова (C) гарантує існування такого коректора.*

Як і в теоремі 1 позначимо через $N_\varepsilon(\mu)$ підпростір, породжений тими власними векторами $u_{\mu(\varepsilon)}$, для яких $\mu(\varepsilon) \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$.

**Теорема 2.** *Нехай $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — помірно сингулярна сім'я операторів, яка справджує умови (A),(B),(C). Тоді кожне власне значення $\mu(\varepsilon) \in S_b$ має скінченну границю $\mu_0$ при $\varepsilon \to 0$, причому $\mu_0 \in \sigma(A_0)$. Якщо $\mu_0$ — $r$-кратне власне значення оператора $A_0$, то в кожному достатньо малому околі $\mu_0$ лежать рівно $r$ (з урахуванням кратності) власних значень $\mu_k(\varepsilon) \in S_b, k = 1, \dots, r$, і*

$$\Theta_H(N(\mu_0, A_0), N_\varepsilon(\mu_0)) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Доведення теореми міститься в лемах 2–5.

**Лема 2.** *Нехай $\mu(\varepsilon) \in S_b$ та $u_{\mu(\varepsilon)} \to u_0$ в $H$ по деякій підпослідовності $\varepsilon' \to 0$. Тоді власне значення $\mu(\varepsilon)$ має скінченну границю $\mu_0$, коли $\varepsilon \to 0$, причому $\mu_0 \in \sigma(A_0)$, а $u_0$ є відповідним власним вектором.*

*Доведення.* Покажемо спочатку, що вектор $u_0$ належить простору $V$ та $B_\varepsilon u_{\mu(\varepsilon)} \to A_0 u_0$ в $H$ при $\varepsilon' \to 0$. Те, що $u_0 \in V$, є безпосереднім наслідком умови (A). Далі, справедлива тотожність

$$B_\varepsilon u_{\mu(\varepsilon)} - A_0 u_0 = B_\varepsilon(I-P)u_{\mu(\varepsilon)} + \mu(\varepsilon)(I-P)u_{\mu(\varepsilon)} + (R_\varepsilon - A_0)u_0 + R_\varepsilon(u_{\mu(\varepsilon)} - u_0),$$

де $R_\varepsilon = PB_\varepsilon P$. Згідно з умовами *(A)*,*(B)* та означенням оператора $A_0$ перші три доданки правої частини тотожності прямують до нуля при $\varepsilon' \to 0$. Останній доданок нескінченно малий згідно з лемою 1.

Припустимо, що власне значення $\mu(\varepsilon)$ має скінченну границю $\mu_0$ при $\varepsilon \to 0$. Перейшовши до границі в рівності $B_\varepsilon u_{\mu(\varepsilon)} - \mu(\varepsilon)u_{\mu(\varepsilon)} = 0$, отримаємо $A_0u_0 - \mu_0u_0 = 0$. Оскільки $u_0 \neq 0$, то $\mu_0 \in \sigma(A_0)$.

Нехай $\mu_* = \underline{\lim}\mu(\varepsilon) < \overline{\lim}\mu(\varepsilon) = \mu^*$, тоді для будь-якого $\mu \in [\mu_*, \mu^*]$ існувала б така послідовність $\varepsilon'' \to 0$, що $\mu(\varepsilon'') \to \mu$ і відповідно $u_{\mu(\varepsilon'')} \to u_1$. Повторивши міркування попереднього абзацу, ми б отримали, що $[\mu_*, \mu^*] \subset \sigma(A_0)$. Лему доведено.

**Лема 3.** *Для всіх $\mu \in \sigma(A_0) \setminus \{0\}$ простір $N_\varepsilon(\mu)$ скінченновимірний.*

*Доведення.* Припустимо, що в просторі $N_\varepsilon(\mu)$ існує зліченна ортонормована система $\{f_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$ власних векторів оператора $B_\varepsilon$. Оскільки за деякою підпослідовністю $B_\varepsilon f_k(\varepsilon) \to A_0 f_k$ і $f_l(\varepsilon) \to f_l$, то

$$\delta_{kl} = (f_k(\varepsilon), f_l(\varepsilon)) = (\mu_k(\varepsilon))^{-1}(B_\varepsilon f_k(\varepsilon), f_l(\varepsilon)) \to \mu^{-1}(A_0 f_k, f_l) = \delta_{kl}, \tag{3}$$

де $\delta_{kl}$ – символ Кронекера. Отже, власний підпростір $N(\mu, A_0)$ оператора $A_0$ містить зліченну ортонормовану систему $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, що неможливо для компактного оператора. Лему доведено.

Наступна лема — основна для обгрунтування асимптотики власних значень множини $S_b$.

**Лема 4.** *Нехай $\mu$ – ненульове власне значення оператора $A_0$, якому відповідає власна функція $v$, $\|v\| = 1$. Тоді існує таке власне значення $\mu(\varepsilon) \in S_b$ оператора $B_\varepsilon$, а також вектор $v_\varepsilon \in N_\varepsilon(\mu)$, що*

$$\mu(\varepsilon) \to \mu \quad \text{та} \quad \|v_\varepsilon - v\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

*Доведення.* Згідно з умовою *(C)* для $v$ існує такий коректор $w_\varepsilon \in H$, що величина

$$\alpha(\varepsilon) = \|B_\varepsilon(v + w_\varepsilon) - \mu(v + w_\varepsilon)\|$$

є нескінченно мала при $\varepsilon \to 0$. На площині $R^2_{\varepsilon\lambda}$ введемо конус $K_\mu(h) = \{(\varepsilon, \lambda) : 0 < \varepsilon < h, |\lambda - \mu| < \alpha(\varepsilon)\}$. Згідно з твердженням, сформульованим у зауваженні 2, для кожного $\varepsilon$ з інтервалу $(0, h)$, існує таке власне значення $\lambda(\varepsilon) \in \sigma(B_\varepsilon)$, що точка $(\varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ належить конусу $K_\mu(h)$, тобто

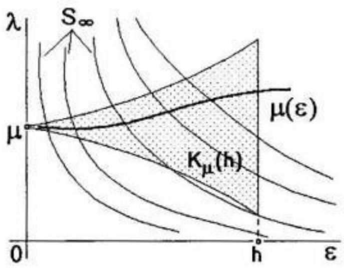
$$|\mu - \lambda(\varepsilon)| \leqslant \alpha(\varepsilon). \tag{4}$$

Виберемо число $d$ таким, щоб інтервал $I = [\mu - d, \mu + d]$ не містив відмінних від $\mu$ точок спектра оператора $A_0$. Тоді існує така нормована лінійна комбінація $v_\varepsilon$ власних векторів, які відповідають власним значенням оператора $B_\varepsilon$ з визначеного відрізка, що

$$\|v - v_\varepsilon\| \leqslant \|(v + w_\varepsilon) - v_\varepsilon\| + \|w_\varepsilon\| \leqslant 2d^{-1}\alpha(\varepsilon) + \|w_\varepsilon\| = \alpha_1(\varepsilon). \tag{5}$$

Однак нерівність (4) ще не гарантує існування власного значення $\mu(\varepsilon)$ з множини $S_b$, яке збігається до $\mu$. В тому разі, коли множина $S_\infty$ нескінченна, ця умова може справджуватися лише за рахунок власних значень серії $S_\infty$, які потрапляють у конус $K_\mu(h)$ при як завгодно малих $\varepsilon$, хоча кожне з них покидає цей конус при $\varepsilon \to 0$ (див. рисунок).

Припустимо, що множина $S_\infty$ для даної сім'ї операторів $B_\varepsilon$ є нескінченна. У випадку, коли $S_\infty$ порожня або скінченна, обгрунтувати асимптотику власних значень можна методами, запропонованими в працях [1,3,5].




Доведемо це від супротивного. Нехай конус $K_\mu(h)$ не містить власного значення $\mu(\varepsilon) \in S_b$. Покажемо, що тоді всупереч (4) власний вектор $v$ не вдається апроксимувати лише лінійними комбінаціями власних векторів $u_{\lambda(\varepsilon)}$, де $\lambda(\varepsilon) \in S_\infty$. Довільним чином перелічимо власні значення множини $S_\infty$, позначивши через $\{e_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$ ортонормовану систему відповідних власних векторів.

Існує така підпослідовність $\varepsilon' \to 0$, що $e_k(\varepsilon') \to e_k$ в $H$. Нехай $\mathcal{L}$ – лінійний підпростір, породжений векторами $\{e_k\}_{k=1}^\infty$. Розглянемо два випадки, коли $v \perp \mathcal{L}$ або $v \in \mathcal{L}$. Загальна ситуація зводиться до них. Позначимо через $J(\varepsilon)$ множину тих індексів $j$, для яких власне значення вектора $e_j(\varepsilon)$ є в інтервалі $I$. Тоді

$$v_\varepsilon = \sum_{j \in J(\varepsilon)} \gamma_j(\varepsilon) e_j(\varepsilon).$$

У першому випадку очевидно, що величина $(v, v_\varepsilon)$ прямує до нуля. З іншого боку, згідно з (5) маємо

$$(v, v_\varepsilon) = (v, v) + (v, v_\varepsilon - v) = 1 + O(\alpha_1(\varepsilon)), \quad \varepsilon \to 0.$$

Тепер нехай $v$ належить підпростру $\mathcal{L}$, а, отже, $v = \sum_{k=1}^\infty \beta_k e_k$, де $\sum_{k=1}^\infty \beta_k^2 = 1$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\beta_1 \neq 0$. Справедлива така оцінка

$$\alpha_1(\varepsilon) \geqslant \|v - v_\varepsilon\| \geqslant \left\| \sum_{k=1}^\infty \beta_k e_k - \sum_{j \in J(\varepsilon)} \gamma_j(\varepsilon) e_j(\varepsilon) \right\| \geqslant$$

$$\geqslant \left\| \sum_{k=1}^N \beta_k e_k(\varepsilon) - \sum_{j \in J(\varepsilon)} \gamma_j(\varepsilon) e_j(\varepsilon) \right\| - \left\| \sum_{k=1}^N \beta_k (e_k(\varepsilon) - e_k) \right\| - \left\| \sum_{k=N+1}^\infty \beta_k e_k \right\|.$$

Числа $N$ та $\varepsilon'$ можна вибрати такими, що

$$\alpha_1(\varepsilon') < \frac{\beta_1}{3}, \quad N \max_{k=1,\dots N} \|e_k(\varepsilon') - e_k\| < \frac{\beta_1}{3}, \quad \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k e_k \right\| < \frac{\beta_1}{3},$$

а також, щоб множина $J(\varepsilon')$ не містила індексів від 1 до N. Тоді

$$\left\| \beta_1 e_1(\varepsilon') + \sum_{k=2}^{N} \beta_k e_k(\varepsilon') - \sum_{j \in J(\varepsilon')} \gamma_j(\varepsilon') e_j(\varepsilon') \right\| < \beta_1,$$

що не можливо, оскільки в лівій частині немає векторів $e_r(\varepsilon')$ з однаковими індексами. Лему доведено.

**Лема 5.** $\dim N(\mu, A_0) = \dim N_\varepsilon(\mu)$.

*Доведення.* Оскільки згідно з лемою 4 кожний вектор $v \in N(\mu, A_0)$ апроксимується векторами з простору $N_\varepsilon(\mu)$, то $\dim N(\mu, A_0) \leqslant \dim N_\varepsilon(\mu)$. Виконавши граничний перехід (3) в умовах ортогональності, отримаємо, що $\dim N(\mu, A_0) \geqslant \dim N_\varepsilon(\mu)$. Лему доведено.

У теорії сильно неоднорідних середовищ виникають помірно сингулярні сім'ї компактних операторів, для яких не виконується умова *(B)*. В таких задачах граничний оператор можна побудувати не лише з використанням сім'ї $B_\varepsilon$ та простору $V$, але й деяких апріорних результатів щодо поведінки власних векторів $u_{\mu(\varepsilon)}$. Оскільки для сім'ї абстрактних операторів таких апріорних властивостей власних векторів ми не маємо, то змушені неконструктивним шляхом увести оператор, спектр якого буде граничним для серії власних значень $S_b$.

**Умова (D).** *Існує такий самоспряжений компактний оператор $A_0 : V \to V$, що для всіх $\mu(\varepsilon) \in S_b$*

$$P_V B_\varepsilon u_{\mu(\varepsilon)} \to A_0 u_0 \text{ в } H, \quad \varepsilon \to 0,$$

*де $u_{\mu(\varepsilon)} \to u_0$.*

**Зауваження 3.** Умови *(B)* та *(D)* зручніше перевіряти для квадратичних форм $b_\varepsilon(u, u) = (B_\varepsilon u, u)$. У теоремі 2 оператор $A_0$ відповідає формі $b_0$, яку отримують у результаті граничного переходу

$$b_\varepsilon(v, v) \to b_0(v, v), \quad \varepsilon \to 0 \text{ для } v \in V.$$

Умова ж *(D)* стверджує, що оператор $A_0$ повинна породжувати така форма $b_1$, що

$$b_\varepsilon(u_{\mu(\varepsilon)}, v) \to b_1(u_0, v), \quad \varepsilon \to 0 \text{ для } v \in V.$$

У разі виконання умови *(B)* форми $b_0$ та $b_1$ рівні.

**Теорема 3.** *Нехай $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — помірно сингулярна сім'я операторів, яка справджує умови (A),(D),(C). Тоді всі власні значення $\mu(\varepsilon) \in S_b$ збігаються при $\varepsilon \to 0$ до власних значень оператора $A_0$ з урахуванням їхньої алгебраїчної кратності. Крім того, для кожного $\mu \in \sigma(A_0)$ маємо*

$$\Theta_H(N(\mu_0, A_0), N_\varepsilon(\mu_0)) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Доведення аналогічне до доведення теореми 2, за винятком того, що у лемі 2 не треба обгрунтовувати справедливість граничного переходу $B_\varepsilon u_{\mu(\varepsilon)} \to A_0 u_0$, оскільки він постулюється умовою *(D)*.

**3. Приклади регулярних, помірно та сильно сингулярних сімей операторів.** 1°. Розглянемо задачу про власні коливання закріпленої пластини із приєднаною масою. В задачі (1),(2) приймемо $N = 2$, $\mathcal{P} = \Delta^2$, $\mathcal{B}_1 = I$, $\mathcal{B}_2 = \partial_\nu$, де $\nu$ – зовнішня нормаль на $\partial\Omega$. У цьому випадку многовид $\gamma$ є точкою $x_0 \in \Omega$ і $m = 2$. Відповідна сім'я операторів $\{A(\varepsilon, 2)\}_{\varepsilon>0}$ буде регулярною і збігатиметься до оператора $A_0$, породженого в просторі $H_0^2(\Omega)$ білінійною формою

$$a(u,v) = (pu, v)_{L_2(\Omega)} + q_* u(x_0) v(x_0),$$

де сталу $q_*$ визначають з фукнції $q_\varepsilon(x) = q(\varepsilon^{-1}(x - x_0))$. Як показано в [5], власні значення $\lambda_k^\varepsilon$ збуреної задачі справджують оцінку

$$|\lambda_k^\varepsilon - \lambda_k| \leqslant C(k)\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/2},$$

а також

$$\Theta_{H_0^2(\Omega)}(N(\lambda^{-1}, A_0), N_\varepsilon(\lambda^{-1})) \leqslant C\varepsilon |\ln\varepsilon|^{1/2},$$

де $\lambda_k$ та $\lambda$ – власні значення задачі

$$\Delta^2 v - \lambda(p(x) + q_*\delta(x - x_0))v = 0, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$v(x) = \partial v/\partial\nu(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{7}$$

Тут $\delta(x)$ – функція Дірака.

2°. Розглянемо цю ж задачу для випадку $m > 2$. Сім'я $A(\varepsilon, m)$ вже не є рівномірно обмеженою при $\varepsilon \to 0$, однак оператори $\varepsilon^{m-2} A(\varepsilon, m)$ утворюють регулярну сім'ю, множина $S_b$ якої містить лише одне власне значення. Справді, граничний оператор $A_0$ породжує в просторі $H_0^2(\Omega)$ форма

$$a_0(u,v) = q_* u(x_0) v(x_0),$$

а його спектр складається лише з двох точок $\{0, \mu\}$, де $\mu > 0$. Отже, при $m > 2$ перше власне значення такої задачі має асимптотику $\lambda_1^\varepsilon = (\mu)^{-1}\varepsilon^{m-2} + o(\varepsilon^{m-2})$, $\varepsilon \to 0$.

3°. Нехай модель (1),(2) описує власні частоти та власні коливання закріпленого на кінцях стержня із сингулярно збуреною в околі точки густиною [5], тобто $N = 1$, $\Omega = (\alpha, \beta)$, $\mathcal{P} = d^4/dx^4$, $\gamma = \{x_0\}$, $q_\varepsilon(x) = q((x - x_0)/\varepsilon)$. У випадку $1 < m < 3$ сім'я операторів $A(\varepsilon, m)$ є помірно сингулярною, а простір $V = \{v \in H_0^2(\alpha, \beta) : v(x_0) = 0\}$. Оператор $A_0$ породжується в просторі $V$ білінійною формою $a(u,v) = (pu, v)_{L_2(\Omega)}$. Умова *(A)* виконується, оскільки справедлива апріорна оцінка

$$|u_{\mu(\varepsilon)}(x_0)| \leqslant C\varepsilon^{d(m)}, \quad d(m) > 0. \tag{8}$$

Умова ж *(B)* в цьому випадку рівносильна прямуванню до нуля інтеграла

$$\varepsilon^{-m} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} q_\varepsilon(x) u_{\mu(\varepsilon)} \psi \, dx, \quad \psi \in V.$$

Але цей інтеграл нескінченно малий при $\varepsilon \to 0$ і $m \in (1,3)$, оскільки $\psi(x_0) = 0$ та виконується (8). Отже, головними членами асимптотики розв'язку задачі (1),(2) є власні значення та власні функції такої задачі

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - \lambda p(x) v = 0, \quad x \in \Omega \quad v(\alpha) = v'(\alpha) = v(\beta) = v'(\beta) = 0, \tag{9}$$

$$v(x_0) = 0, \quad [v']_{x_0} = [v'']_{x_0} = 0. \tag{10}$$

4°. Наведемо приклад помірно сингулярної сім'ї, для якої не виконується умова *(B)*. Приймемо в попередній задачі $m = 3$. Можна показати, що тоді

$$\varepsilon^{-3} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} q_\varepsilon(x) u_{\mu(\varepsilon)} \psi \, dx \to h u_0'(x_0) \psi'(x_0),$$

де h – деяка додатня стала, $\mu(\varepsilon) \in S_b$ та $\psi \in V$. У цьому випадку власні значення множини $S_b$ прямують до спектра оператора, породженого формою

$$a_1(u,v) = (pu, v)_{L_2(\Omega)} + h u'(x_0) v'(x_0)$$

в просторі $V = \{v \in H_0^2(\alpha, \beta) : v(x_0) = 0\}$. Форму $a_1$ можна побудувати, лише врахувавши специфічну поведінку функції $u_{\mu(\varepsilon)}$ в околі точки $x_0$. Отже, для $m = 3$ в граничній задачі (9),(10) треба замінити умови (10) на такі:

$$v(x_0) = 0, \quad [v']_{x_0} = 0, \quad [v'']_{x_0} + \lambda h v'(x_0) = 0.$$

5°. Деколи для сильно сингулярної сім'ї вдається побудувати граничний оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ в деякому просторі $\mathcal{H}$, який ніяк не пов'язаний з вихідним простором $H$ [4,8]. Але це не завжди так. Розглянемо задачу про власні коливання закріпленої пластини з густиною, збуреною в околі одновимірного многовиду. Нехай оператори $\mathcal{P}$ та $\mathcal{B}_j$ такі, як у прикладі 1, а $\gamma$ – гладка замкнена крива. Сім'я $\varepsilon^{m-4} A(\varepsilon, m)$ при $m > 4$ є сильно сингулярною. Введемо локальні координати $(s, n)$, де $s$ – довжина дуги на $\gamma$, а $n$ – відстань до $\gamma$ вздовж нормалі. Нехай $q_\varepsilon(x) = q(\frac{n}{\varepsilon})$, $\kappa(s)$ – кривина кривої $\gamma$. Наступна двопараметрична спектральна задача

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4}(s,\xi) - \mu_1 q(\xi) w(s,\xi) = 0, \quad \xi \in (-1,1),\ s \in \gamma,$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(s,\pm 1) = \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3}(s,\pm 1) = 0,$$
$$\Delta^2 v(x) = 0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad v = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$
$$v|_\gamma = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{\gamma \pm 0} = \frac{\partial w}{\partial \xi}(s,\pm 1),$$
$$\Big[\frac{\partial \overline{v}}{\partial n}\Delta v\Big]_\gamma + 2\kappa(s) Re \int_{-1}^{1} \overline{w}\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} d\xi + \mu_2 \int_{-1}^{1} q(\xi)|w|^2 d\xi = 0,$$

де $\xi = n/\varepsilon$ відіграє роль граничної. Точки $(\mu_1, \mu_2)$ дискретного спектра відповідного матричного оператора дають одночасно два члени асимптотичного розкладу власних значень збуреної задачі

$$\lambda(\varepsilon) = \varepsilon^{m-4}(\mu_1 + \varepsilon\mu_2 + o(\varepsilon)), \quad \varepsilon \to 0.$$


1. Olejnik O.A. *Homogenization problems in elasticity.Spectrum of singularily perturbed operators.* Non-classical continuum mechanics. 1987. Lecture Notes series,122.— Cambridge University Press.— P.188-205.

2. Олейник О.А. *О собственных колебаниях тел с концентрированными массами*// В сб. Совр. проблемы прикладной математики и математической физики.— М.: Наука, 1988.— С.101-128.

3. Sanchez-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses*// Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Berlin: Springer-Verlag,1984.— P.346-368.

4. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. *Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями* // Тр. Матем. ин–та им. В.А.Стеклова.— 1990.— Т.192.— С.42–60

5. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами: эффект локальних колебаний* // Тр. Москов. мат. об–ва.— 1992.— Т.54.— С.29–72.

6. Nazarov S.A. *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions*// Math. Model. Numer. Anal.— 1993.— Vol.27, N.6.— P.777-799.

7. Sanchez-Palensia E., Tchatat H. *Vibration de systems elastiques avec des masses concentrees* // Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino.— 1984.— V.42, N3.— P.43-63.

8. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред.— М.: Изд-во МГУ, 1990.— 311 с.

9. Lobo M., Perez E. *On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary.* // Math.Models Methods Appl. Sci.– 1995. – Vol.3,No.2. – P. 249–273.

10. Lobo M., Perez E. *Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary* // Math.Models Methods Appl. Sci.– 1995. – Vol.5,No.5. – P.565–585.

11. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.— 740 с.

12. Садовничий А.С. Теория операторов.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.— 368 с.

13. Вишик М.И., Люстерник А.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром* // Успехи матем. наук. – 1957.— Т.12, N5.— С.3–122.

*Стаття надійшла до редколегії 29.06.96*

УДК 517.927.25+512.928.5

# СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ІЗ СИНГУЛЯРНИМ ЗБУРЕННЯМ ГУСТИНИ

Г. Є. Грабчак

**H. Ye. Hrabchak. The spectral Neumann problem for a linear elasticity system with the singular perturbed density.** In a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^3$ the eigenvalue problem for the elasticity system with constant coefficients, Neumann boundary conditions and a singular perturbed density is considered. The density of a vibration system is perturbed in an $\varepsilon$-neighbourhood of a point. The behaviour as $\varepsilon \to 0$ of the eigenelements of the problem is studied. The first terms of the asymptotic expansion in $\varepsilon$ for the eigenvalues and eigenvectors are obtained. Estimates for remainder terms of the corresponding asymptotic expansions are established.

З виникненням нових технологій, зокрема пов'язаних зі створенням перфорованих та композитних матеріалів, за останнє десятиріччя значно підвищився інтерес до задач теорії сильно неоднорідних середовищ. Ця проблематика знайшла своє втілення у виникненні та розвитку теорії усереднення диференціальних операторів та в асимптотичному аналізі задач про власні коливання пружних систем з концентрованими масами. З відповідною бібліографією можна ознайомитись в монографіях [1,2].

Ми дослідили асимптотичну поведінку при $\varepsilon \to 0$ власних частот та форми власних коливань пружного однорідного анізотропного тіла з вільною границею та сингулярно збуреною густиною $\rho_\varepsilon(m, x) = p(x) + \varepsilon^{-m} q(x/\varepsilon)$, $(m \in \mathbb{R})$ в околі деякої його внутрішньої точки. Функція $q$ має носій в області збурення густини, $\varepsilon$ — характерний розмір цієї області. Причому, розглядаємо, на нашу думку, найбільш цікавий з фізичного і математичного погляду випадок, коли при достатньо великій приєднаній масі виникає відомий з експериментів *ефект локальних коливань:* власні коливання системи зосереджені поблизу області збурення густини і швидко загасають поза околом цієї області. Мабуть, уперше цей ефект математично описано в [3,4], де досліджено поведінку при $\varepsilon \to 0$ спектра аналогічної задачі для оператора Лапласа [3] та системи рівнянь теорії пружності [4] з крайовими умовами Діріхле і $m = n \geqslant 3$, де $n$ — розмірність простору. У новій моделі коливних систем [5] з концентрованими масами (введення дійсного параметра $m$) сформульовано задачу вивчення поведінки при $\varepsilon \to 0$ власних значень та власних функцій системи для різних значень параметра $m$. У рамках цієї моделі вдалося дослідити спектральні властивості багатьох

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A75; Secondary 49R05, 35B25.

класичних коливних систем [1,6 – 13]. У праці [6] сформульовано та доведено теореми збіжності і побудовано повні асимптотичні розвинення власних елементів задачі для оператора Лапласа з крайовою умовою Діріхле. У [7,8] доведені теореми збіжності у випадку спектральних задач Неймана для оператора Лапласа з однією та, відповідно, кількома приєднаними масами, а в [10,11] побудовано повні асимптотичні розвинення власних значень та власних функцій цих задач.

Виникнення локальних коливань у системі, яка описується рівняннями теорії пружності, відповідає випадку $m > 2$. Його ми і будемо розглядати.

**1. Позначення та деякі попередні відомості.** В евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$ будемо позначати точки через $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $\overline{G}$ — замикання в $\mathbb{R}^3$ множини $G$.

Нехай $\Omega$ — обмежена область в $\mathbb{R}^3$. Через $H^1(\Omega)$ позначимо гільбертів простір, отриманий поповненням простору $C^1(\overline{\Omega})$ за нормою

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Якщо $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор-стовпці, то через $(u, v)$ позначимо суму $u_i v_i$, і, як звичайно, $|u| = (u, u)^{1/2}$. Тут і надалі, якщо не обумовлено протилежне, припускаємо сумування за індексами, які повторюються, від 1 до 3. Для матриць $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ приймемо $(A, B) = a_{ij} b_{ij}$, $|A| = (A, A)^{1/2}$. Нехай усі компоненти векторів $u, v$, чи елементи матриць $A, B$ належать гільбертовому простору $H$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_H$. Позначимо

$$(u, v)_H = (u_i, v_i)_H, \quad \|u\|_H = (u, u)_H^{1/2}; \qquad (A, B)_H = (a_{ij}, b_{ij})_H, \quad \|A\|_H = (A, A)_H^{1/2}$$

і будемо писати $u, v \in H$, $A, B \in H$ замість $u, v \in H^3$, $A, B \in H^9$. Через $\nabla u$ та $e(u)$ позначимо матриці з елементами $(\nabla u)_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ та $e_{ij} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)$. У теорії пружності вектор $u$ називають вектором переміщень, а матрицю $e(u)$ — тензором деформацій.

Надалі нам будуть потрібні такі твердження та теореми.

**Лема 1.1 (Нерівність Пуанкаре)** [1]. *Нехай $\Omega$ — обмежена в $\mathbb{R}^3$ область з ліпшицевою межею. Тоді для функцій $u \in H^1(\Omega)$, таких що $\int\limits_\Omega \rho u \, dx = 0$, справджується нерівність*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.1}$$

*де $C$ — стала, яка залежить лише від $\Omega$; $\rho(x)$ — додатна обмежена вимірна функція на $\Omega$.*

**Лема 1.2 (Нерівність Харді)** [1,14]. *Для функцій $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ виконується нерівність*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |x|^{-2} |u(x)|^2 \, dx \leqslant C \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{1.2}$$

*де стала $C$ не залежить від $u$.*

Нехай $H$ та $V$ — гільбертові простори з нормами $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_V$ та скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_H$, $(\cdot,\cdot)_V$ відповідно.

**Лема 1.3** [15,с.186]. *Нехай простір $H$ неперервно та компактно вкладається в $V$. Тоді оператор $A : H \to H$, який визначається співвідношенням*

$$(Au, v)_H = (u, v)_V, \quad u, v \in H,$$

*є обмежений, додатний, самоспряжений та компактний.*

**Лема 1.4** [16]. *Нехай $A : H \to H$ — самоспряжений додатний компактний оператор, а вектор $(\mu, u) \in \mathbb{R} \times H$ такий, що $\|Au - \mu u\|_H \leqslant \beta$, $\|u\|_H = 1$, $\beta = \mathrm{const} > 0$. Тоді для довільного $d > \beta$ існує пара $(\mu_i, \widetilde{u}) \in \mathbb{R} \times H$, де $\mu_i$ — власне значення оператора $A$, $\|\widetilde{u}\|_H = 1$, така, що*

$$|\mu_i - \mu| \leqslant \beta, \qquad \|u - \widetilde{u}\|_H \leqslant 2d^{-1}\beta$$

*і $\widetilde{u}$ є лінійною комбінацією власних векторів оператора $A$, які відповідають власним значенням $A$ з інтервалу $[\mu - d, \mu + d]$.*

**Означення 1.1.** *Нехай $M$ і $N$ — підпростори гільбертового простору $H$, а $P_M$ і $P_N$ — відповідні ортопроектори. Розхилом між підпросторами $M$ і $N$ назвемо величину*

$$\Theta_H(M, N) = \|P_M - P_N\| = \sup_{\|u\|_H = 1} \|(P_M - P_N)u\|_H.$$

**Лема 1.5** [9]. *Нехай $\dim M = \dim N = r < \infty$ і для довільного вектора $u \in M$, $\|u\|_H = 1$, існує вектор $v \in M$, $\|v\|_H = 1$ такий, що $\|u - v\|_H \leqslant \beta$, де $0 < \beta < r^{-1}$. Тоді $\Theta_H(M, N) \leqslant C\beta$, де стала $C$ залежить лише від $r$.*

Наведемо тепер деякі властивості коефіцієнтів системи рівнянь теорії пружності [1]. В області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ розглянемо оператор лінійної теорії пружності

$$\mathcal{L}(\partial_x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A^{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\right), \tag{1.3}$$

де $A^{jl}$ — сталі матриці, елементи $a_{ik}^{jl}$ яких задовольняють умови

$$a_{ik}^{jl} = a_{jk}^{il} = a_{ki}^{lj}; \quad \varkappa_1 \eta_{ij}\eta_{ij} \leqslant a_{ik}^{jl}\eta_{ij}\eta_{kl} \leqslant \varkappa_2 \eta_{ij}\eta_{ij}, \quad \varkappa_1, \varkappa_2 = \mathrm{const} > 0 \tag{1.4}$$

для довільної симетричної матриці $\{\eta_{ij}\}$ з дійсними елементами.

Набору матриць $A^{jl}$ поставимо у відповідність лінійне перетворення $\mathfrak{A}$ в просторі матриць, яке переводить матрицю $\xi=\{\xi_{ij}\}$ в матрицю $\mathfrak{A}\xi=\{a_{ik}^{jl}\xi_{ij}\}$.

**Лема 1.6** [1]. *Для довільних дійсних матриць $\xi = \{\xi_{ij}\}$ та $\eta = \{\eta_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ справедливі співвідношення:*

$$(\mathfrak{A}\xi, \eta) = (\xi, \mathfrak{A}\eta),$$
$$(\mathfrak{A}\xi, \eta) \leqslant \frac{\varkappa_2}{4}|\xi + \xi^{\top}||\eta + \eta^{\top}|,$$
$$|\xi + \xi^{\top}|^2 \leqslant \frac{4}{\varkappa_1}(\mathfrak{A}\xi, \xi),$$

*де $\top$ позначає символ транспонування, сталі $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ті ж, що і в (1.4).*

Нехай $\widetilde{\Psi}(x)$ — $(3 \times 3)$–матриця, стовпцями якої є векторні добутки вектора $x$ на орти осей координат. Розглянемо матрицю $\Psi(x) = (E, \widetilde{\Psi}(x))$ розміром $(3 \times 6)$, перші три стовпці якої утворюють одиничну матрицю $E$, а останні — матрицю $\widetilde{\Psi}(x)$.

**Означення 1.2.** *Жорстким переміщенням називається вектор-функція вигляду* $\Psi(x)\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^6$. *Лінеал* $G_0 = \{\Psi(x)\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^6\}$ *будемо називати простором жорстких переміщень.*

У випадку доведення розв'язності основних крайових задач теорії пружності й отримання оцінок розв'язків фундаментальну роль відіграють нерівності Корна [1,14]. Сформулюємо теореми про нерівності Корна в потрібній нам формі.

**Теорема 1.1 (Нерівність Корна)** [1,14]. *Нехай* $\Omega$ *— обмежена область в* $\mathbb{R}^3$ *з ліпшицевою межею і* $U$ *— замкнений підпростір вектор-функцій із* $H^1(\Omega)$ *такий, що* $U \cap G_0 = \{0\}$, *де* $G_0$ *— простір жорстких переміщень. Тоді для довільної* $u \in U$ *виконується нерівність*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C\|e(u)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.5}$$

*де стала* $C$ *залежить лише від* $\Omega$.

**Теорема 1.2 (Нерівність Корна в просторі)** [14]. *Для довільної вектор-функції* $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, *такої що* $\|e(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3))} < \infty$ *і* $|u(x)| = o\,(1)$ *при* $|x| \to \infty$, *справедлива нерівність*

$$\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|e(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \tag{1.6}$$

*де стала* $C$ *не залежить від* $u$.

**2. Формулювання задачі.** Нехай $\Omega$ і $\omega$ — області в $\mathbb{R}^3$ з компактними замиканнями та гладкими межами. Вважаємо, що обидві області містять початок координат. Через $\omega_\varepsilon$ будемо позначати множину $\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$. Дійсний параметр $\varepsilon > 0$ виберемо настільки малим, щоб $\overline{\omega}_\varepsilon \subset \Omega$. Розглянемо спектральну задачу Неймана для системи рівнянь лінійної теорії пружності

$$\mathcal{L}(\partial_x)u_\varepsilon + \lambda(\varepsilon)\rho_\varepsilon(x,m)u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega; \tag{2.1}$$

$$\sigma_\nu(\partial_x)u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.2}$$

де $\mathcal{L}$ — оператор лінійної теорії пружності (1.3), коефіцієнти якого задовольняють умови (1.4); $\sigma_\nu(\partial_x) = \nu_j(x)A^{jl}\dfrac{\partial}{\partial x_l}$ — оператор напружень; $\nu(x)$ — орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$ в точці $x$; $u_\varepsilon(x) = (u_1(\varepsilon,x), u_2(\varepsilon,x), u_3(\varepsilon,x))$, $\lambda(\varepsilon)$ — спектральний параметр; $\rho_\varepsilon(x,m) = p(x) + \varepsilon^{-m}q(x/\varepsilon)$, $m \in \mathbb{R}$. Функції $p(x)$ і $q(x)$ — додатні, вимірні, обмежені на множинах $\overline{\Omega}$ та $\omega$ відповідно, і $q(x)$ продовжена нулем поза область $\omega$.

На межі $\partial\omega_\varepsilon$ поділу двох середовищ необхідно задавати умови неперервності переміщень та напружень

$$[u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = [\sigma_\nu u_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = 0,$$

де $[f]_{\partial G}$ — стрибок функції $f$ під час переходу через межу $\partial G$ області $G \subset \mathbb{R}^3$ вздовж нормалі.

**Означення 2.1.** *Число* $\lambda(\varepsilon)\in\mathbb{C}$ *і вектор-функцію* $u_\varepsilon(x)\in H^1(\Omega)$, $u_\varepsilon\not\equiv 0$, *будемо називати власним значенням та відповідним йому власним вектором задачі (2.1),(2.2), якщо вони задовольняють інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{\Omega}(\mathfrak{A}\nabla u_\varepsilon,\nabla\varphi)\;dx=\lambda(\varepsilon)\Big(\int\limits_{\Omega}p(x)u_\varepsilon\varphi\,dx+\varepsilon^{-m}\int\limits_{\omega_\varepsilon}q(x/\varepsilon)u_\varepsilon\varphi\,dx\Big) \tag{2.3}$$

*для довільної вектор-функції* $\varphi\in H^1(\Omega)$.

Як відомо, задача (2.1),(2.2) має послідовність $\{\lambda_s(\varepsilon)\}_{s=1}^{\infty}$ невід'ємних дійсних власних значень з точкою нагромадження в нескінченності. Всі вони мають скінченну кратність, причому нуль є шестикратним власним значенням, якому відповідає власний підпростір $G_0$ жорстких переміщень. Відповідні власні вектори $\{u_\varepsilon^{(s)}(x)\}_{s=1}^{\infty}$ утворюють ортонормований базис у $H^1(\Omega)$.

Наша мета — *дослідити поведінку при* $\varepsilon\to 0$ *власних значень* $\lambda(\varepsilon)$ *та власних векторів* $u_\varepsilon$ *задачі (2.1),(2.2) для різних значень* $m>2$. Виявилося, що є п'ять різних випадків такої поведінки, а саме: $2<m<3$; $m=3$; $3<m<5$; $m=5$; $m>5$. Розглянемо їх.

**3. Зведення задачі до операторного рівняння.** Задачу (2.1),(2.2) розглянемо в змінних $\xi=\varepsilon^{-1}x$, увівши новий спектральний масштаб $\mu(\varepsilon)=\varepsilon^{2-m}\lambda(\varepsilon)$ :

$$\mathcal{L}(\partial_\xi)w_\varepsilon+\mu(\varepsilon)\left(\varepsilon^m p(\varepsilon\xi)+q(\xi)\right)w_\varepsilon=0,\quad \xi\in\Omega^\varepsilon; \tag{3.1}$$

$$\sigma_\nu(\partial_\xi)w_\varepsilon(\xi)=0,\quad \xi\in\partial\Omega^\varepsilon, \tag{3.2}$$

де $\Omega^\varepsilon=\{\xi\in\mathbb{R}^3_\xi\mid\varepsilon\xi=x\in\Omega\}$, $\nu(\xi)$ — орт зовнішньої нормалі до $\partial\Omega^\varepsilon$ у точці $\xi$. Функції $u_\varepsilon(x)$ та $w_\varepsilon(\xi)$ пов'язані співвідношенням

$$w_\varepsilon(\xi)=\varepsilon^{1/2}u_\varepsilon(\varepsilon\xi). \tag{3.3}$$

Нормувальний множник $\varepsilon^{1/2}$ вибрано так, що $\|\nabla_\xi w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}=\|\nabla_x u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$. Відповідна інтегральна тотожность (2.3) набуває вигляду

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\mathfrak{A}\nabla w,\nabla\varphi)\;d\xi-\mu(\varepsilon)\Big(\varepsilon^m\int\limits_{\Omega^\varepsilon}p(\varepsilon\xi)w\varphi\,d\xi+\int\limits_{\omega}q(\xi)w\varphi\,d\xi\Big)=0, \tag{3.4}$$
$$w,\ \varphi\in H^1(\Omega^\varepsilon).$$

Розглянемо білінійну форму $\mathfrak{a}_\varepsilon(u,v)=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\mathfrak{A}\nabla u,\nabla v)\;d\xi$, $u,v\in H^1(\Omega^\varepsilon)$. Зазначимо, що простір жорстких переміщень $G_0$ збігається з підпростором $\{u\in H^1(\Omega^\varepsilon)|\;\mathfrak{a}_\varepsilon(u,v)=0,\ v\in H^1(\Omega^\varepsilon)\}$. Позначимо через $\mathcal{H}_\varepsilon$ підпростір у $H^1(\Omega^\varepsilon)$

$$\mathcal{H}_\varepsilon=\{v\in H^1(\Omega^\varepsilon)\mid\ (p(\varepsilon\xi)v,g)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}=0,\ g\in G_0\}.$$

**Зауваження 3.1.** *$\mathcal{H}_\varepsilon$ — замкнений підпростір у $H^1(\Omega^\varepsilon)$; довільну вектор-функцію $u \in H^1(\Omega^\varepsilon)$ можна однозначно записати у вигляді*

$$u = v + \Psi(\xi)\alpha, \quad v \in \mathcal{H}_\varepsilon, \ \alpha \in \mathbb{R}^6. \tag{3.5}$$

Крім того, в нерівностях Харді (1.2) і Корна (1.5) після заміни $\xi = \varepsilon^{-1}x$ стала $C$ не змінюється, а нерівність Пуанкаре (1.1) для функцій $w(\xi) \in H^1(\Omega^\varepsilon)$, таких що $\int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)w(\xi)\,d\xi = 0$, набуває вигляду

$$\|w\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|\nabla_\xi w\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{3.6}$$

де стала $C$ не залежить від $\varepsilon$ та $w$. Надалі під нерівністю Пуанкаре будемо розуміти нерівність (3.6).

Використовуючи лему 1.6, нерівності Пуанкаре та Корна, можна легко показати, що форма $\mathfrak{a}_\varepsilon$ є симетрична обмежена і коерцитивна на $\mathcal{H}_\varepsilon$. Тоді вона визначає на $\mathcal{H}_\varepsilon$ скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \mathfrak{a}_\varepsilon(\cdot,\cdot)$, еквівалентний скалярним добуткам $(\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$ та $(\nabla\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$.

Власний вектор $w_\varepsilon$ задачі (3.1),(3.2), який відповідає власному значенню $\mu(\varepsilon)$, запишемо у вигляді (3.5)

$$w_\varepsilon(\xi) = v_\varepsilon(\xi) + \Psi(\xi)\alpha(\varepsilon), \quad v_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon, \ \alpha_\varepsilon \in \mathbb{R}^6. \tag{3.7}$$

Тоді $\mu(\varepsilon)$ та вектор-функція $v_\varepsilon$ є розв'язком задачі на власні значення

$$\mathcal{L}v_\varepsilon + \mu(\varepsilon)\left((\varepsilon^m p(\varepsilon\xi) + q(\xi))v_\varepsilon - (\varepsilon^m p(\varepsilon\xi) + q(\xi))\,\Psi(\xi)J^{-1}(\varepsilon)\tau(v_\varepsilon)\right) = 0, \quad \xi \in \Omega^\varepsilon; \tag{3.8}$$

$$\sigma_\nu v_\varepsilon(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Omega^\varepsilon; \qquad \left(p(\varepsilon\xi)v_\varepsilon, g\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = 0, \quad g \in G_0, \tag{3.9}$$

де для вектор-функції $f \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ через $\tau(f)$ позначаємо шестикомпонентний вектор $\tau(f) = \int\limits_\omega q(\xi)\Psi^\top(\xi)f(\xi)\,d\xi$; $J(\varepsilon) = \varepsilon^m \int\limits_{\Omega^\varepsilon} \rho_\varepsilon(\varepsilon\xi, m)\Psi^\top\Psi\,d\xi$ — симетрична додатно визначена матриця. В цьому можна переконатися, підставивши вирази (3.5) для вектор-функцій $w$, і $\varphi$ в тотожність (3.4). Тоді в $\mathcal{H}_\varepsilon$ отримаємо інтегральну тотожність

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}(\mathfrak{A}\nabla v, \nabla\psi)\,d\xi - \mu(\varepsilon)\Big(\varepsilon^m\int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)v\psi\,d\xi + \int\limits_\omega q(\xi)v\psi\,d\xi -{}\\ - (J^{-1}(\varepsilon)\tau(v), \tau(\psi))_{\mathbb{R}^6}\Big) = 0,\end{aligned} \tag{3.10}$$

яка відповідає задачі (3.8),(3.9). Якщо в тотожність (3.4) замість $w$ підставити вираз (3.5), а за функцію $\varphi$ почергово взяти шість базисних функцій простору $G_0$ вигляду $\Psi e^{(k)}$, де $\{e^{(k)}\}_{k=1}^6$ — канонічний базис в $\mathbb{R}^6$, то отримаємо лінійну алгебраїчну систему шести рівнянь

$$J(\varepsilon)\alpha(\varepsilon) = -\tau(v). \tag{3.11}$$

Матриця $J(\varepsilon)$ є матрицею Грама системи функцій $\{\Psi(\xi)e^{(k)}\}_{k=1}^{6}$ стосовно вагового скалярного добутку $(\varepsilon^m \rho_\varepsilon(\varepsilon\xi, m)\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$.

Отже, задачу (3.1),(3.2) ми звели до задачі (3.8),(3.9), власні значення якої збігаються з додатними власними значеннями задачі (3.1),(3.2). Власний вектор $w_\varepsilon$ останньоі реконструюється за відповідним власним вектором $v_\varepsilon$ задачі (3.8),(3.9) формулою (3.7), де $\alpha(\varepsilon)$ — розв'язок системи (3.11).

Задача (3.8),(3.9) еквівалентна спектральному рівнянню

$$B_\varepsilon v_\varepsilon = \mu^{-1}(\varepsilon) v_\varepsilon, \quad v_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$$

для обмеженого додатного самоспряженого компактного оператора $B_\varepsilon$ в $\mathcal{H}_\varepsilon$, який визначається рівністю

$$\begin{aligned}(B_\varepsilon u, v)_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \varepsilon^m \left(p(\varepsilon\xi)u, v\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \left(q(\xi)u, v\right)_{L^2(\omega)} - \\ - \left(J^{-1}(\varepsilon)\tau(u), \tau(v)\right)_{\mathbb{R}^6}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Те, що рівність (3.12) визначає оператор зі згаданими властивостями, випливає з леми 1.3, оскільки простір $H^1(\Omega^\varepsilon)$ компактно вкладається в $L^2(\Omega^\varepsilon)$, а білінійну форму, яка є в правій частині (3.12), можна взяти як скалярний добуток у просторі $L^2(\Omega^\varepsilon)$, еквівалентний стандартному скалярному добутку. Пояснення потребує лише додатність цієї форми. Її ми покажемо трохи пізніше.

**4. Гранична (при $\varepsilon \to 0$) задача та її спектральні властивості.** Щоб перейти в тотожності (3.10) до границі при $\varepsilon \to 0$, встановимо асимптотику розв'язку $\alpha(\varepsilon)$ системи (3.11). Для цього детальніше розглянемо структуру матриці $J(\varepsilon)$. Враховуючи вигляд матриці $\Psi$ та густини $\rho_\varepsilon(m, x)$, маємо

$$J(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{m-3} J_p^0 & \varepsilon^{m-4} J_p^1 \\ -\varepsilon^{m-4} J_p^1 & \varepsilon^{m-5} J_p^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_q^0 & J_p^q \\ -J_q^1 & J_q^2 \end{pmatrix} \equiv J_p(\varepsilon) + J_q, \tag{4.1}$$

де для обмеженої вимірної функції $f(x)$ на $\Omega$ через $J_f^k$, $k = 0, 1, 2$, позначаємо $(3 \times 3)$-матриці

$$J_f^0 = \int\limits_\Omega f(x) E\, dx, \quad J_f^1 = \int\limits_\Omega f(x) \widetilde{\Psi}(x)\, dx, \quad J_f^2 = \int\limits_\Omega f(x) \widetilde{\Psi}(x) \widetilde{\Psi}^\top(x)\, dx.$$

Матриці $J_p(\varepsilon)$ та $J_q$ в зобаженні (4.1) симетричні і додатно визначені. Використовуючи асимптотичні методи та враховуючи структуру матриці $J(\varepsilon)$, можна довести таку лему.

**Лема 4.1.** *Для розв'язку $\alpha(\varepsilon)$ системи (3.11) справедлива асимптотика*

$$\alpha(\varepsilon) = -K(m)\tau(v) + O(\varepsilon^{\gamma(m)}), \quad \varepsilon \to 0, \tag{4.2}$$

*де*

$$K(m) = \begin{cases} \mathbb{O}, & 2 < m < 3; \\ \operatorname{diag}\left((J_q^0 + F_p)^{-1},\ \mathbb{O}\right), & m = 3; \\ \operatorname{diag}\left((J_q^0)^{-1},\ \mathbb{O}\right), & 3 < m < 5; \\ \left(J_q + \operatorname{diag}(\mathbb{O}, J_p^2)\right)^{-1}, & m = 5; \\ J_q^{-1}, & m > 5; \end{cases} \tag{4.3}$$

*матриця*

$$F_p = J_q^0 + J_p^1 \left(J_p^2\right)^{-1} J_p^1 \tag{4.4}$$

*симетрична і додатно визначена;*

$$\gamma(m) = \begin{cases} 1, & m = 3, 4, 5; \\ 3 - m, & 2 < m < 3; \\ \min\{m-3,\ 4-m\}, & 3 < m < 4; \\ \min\{m-4,\ 5-m\}, & 4 < m < 5; \\ m - 5, & m > 5. \end{cases} \tag{4.5}$$

Позначимо через $\mathcal{H}$ гільбертів простір, отриманий поповненням множини $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ за нормою

$$\|u\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(|\xi|^{-2}|u(\xi)|^2 + |\nabla u(\xi)|^2\right) d\xi.$$

**Зауваження 4.1.** *Для вектор-функцій з $\mathcal{H}$ виконуються нерівність Корна в просторі та нерівність Харді, а тому рівність $\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\mathfrak{A}\nabla u, \nabla v\right) d\xi$ визначає на $\mathcal{H}$ норму, еквівалентну нормам $\|\cdot\|$ та $\|\nabla\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.*

Розглянемо в $\mathbb{R}^3$ спектральну задачу

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(\partial_\xi)v + \mu q(\xi)\left(v - \Psi(\xi)K(m)\tau(v)\right) d\xi = 0, \\ |v(\xi)| = O(|\xi|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty, \end{gathered} \tag{4.6}$$

де матриця $K(m)$ визначена в (4.3).

Під власним вектором задачі (4.6) розуміємо вектор-функцію $v \in \mathcal{H}$, $v \not\equiv 0$, яка при деякому $\mu \in \mathbb{C}$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\mathfrak{A}\nabla v, \nabla\psi\right) d\xi - \mu\Big(\int\limits_{\omega} q(\xi) v\psi\, d\xi - \left(K(m)\tau(v), \tau(\psi)\right)_{\mathbb{R}^6}\Big) = 0 \tag{4.7}$$

для довільної вектор-функції $\psi \in \mathcal{H}$.

**Лема 4.2.** *Для вектор-функцій $u \in \mathcal{H}$ справджується нерівність*

$$\|u(\xi)\|_{L^2(\omega)} \leqslant C\|u(\xi)\|_{\mathcal{H}}, \tag{4.8}$$

*де стала $C$ не залежить від $u$.*

*Доведення.* Використовуючи нерівність Харді, маємо

$$\int\limits_{\omega} |\xi|^2|\xi|^{-2}|u|^2\,d\xi \leqslant C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-2}|u|^2\,d\xi \leqslant C_2\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3\|u\|^2_{\mathcal{H}},$$

що й треба було довести.

Розглянемо білінійну форму

$$\mathcal{D}(u,v) = (q(\xi)u,v)_{L^2(\omega)} - (K(m)\tau(u),\tau(v)) \quad u,v \in \mathcal{H}. \tag{4.9}$$

**Лема 4.3.** *Білінійна форма (4.9) симетрична, обмежена і невід'ємна на $\mathcal{H}$.*

*Доведення.* Симетричність форми (4.9) очевидна, обмеженість випливає з нерівностей Коші–Буняковського, Гельдера та леми 4.2. Доведемо її невід'ємність. Для $2<m<3$ цей факт тривіальний. Нехай $3\leqslant m<5$. Оскільки матриця $F_p \geqslant 0$ (див. (4.4)), то $\left(J_q^0 + F_p\right)^{-1} \leqslant \left(J_q^0\right)^{-1} = q_0^{-1}E$, де $q_0 = \int\limits_{\omega} q(\xi)\,d\xi$. Тоді

$$\mathcal{D}(v,v) \geqslant (q(\xi)v,v)_{L^2(\omega)} - q_0^{-1}\Big(\int\limits_{\omega} qv\,d\xi\Big)^2 \geqslant 0$$

для довільної функції $v\in\mathcal{H}$. Нехай $m\geqslant 5$. Оскільки $K(m)\equiv J_q^{-1}\geqslant K(5)$ при $m>5$, то досить довести нерівність

$$\mathcal{D}(v,v) \equiv (q(\xi)v,v)_{L^2(\omega)} - \left(J_q^{-1}\tau(v),\tau(v)\right) \geqslant 0 \quad v \in \mathcal{H}. \tag{4.10}$$

Нехай

$$\mathcal{H}_0 = \{v \in \mathcal{H} \mid v_{|\omega} \in G_0\},$$
$$\mathcal{H}_1 = \{v \in \mathcal{H} \mid (q(\xi)v,w)_{L^2(\omega)} = 0,\ w \in \mathcal{H}_0\}.$$

Тоді довільну вектор-функцію $v \in \mathcal{H}$ можна однозначно з точністю до функції, що дорівнює нулю на множині $\omega$, записати у вигляді $v = v^{(0)} + v^{(1)}$, $v^{(0)} \in \mathcal{H}_0$, $v^{(1)} \in \mathcal{H}_1$. Підставляючи цей вираз у нерівність (4.10), безпосередньо переконуємось в її справедливості. Лему доведено.

**Зауваження 4.2.** *Білінійна форма в правій частині (3.12) додатна, оскільки відповідна квадратична форма оцінюється знизу через форму (4.10).*

**Лема 4.4.** *Співвідношення* $(Bv, w)_{\mathcal{H}} = \mathcal{D}(v, w)$, $v, w \in \mathcal{H}$, *визначає в* $\mathcal{H}$ *лінійний обмежений самоспряжений невід'ємний компактний оператор* $B$.

*Доведення.* Всі властивості оператора $B$, крім компактності, є наслідком леми 4.3. Доведемо компактність оператора $B$. Нехай послідовність $\{v_s\}$ — слабко збіжна в $\mathcal{H}$ до нуля при $s \to \infty$. Тоді вона обмежена в $\mathcal{H}$, звідки $\{v_{s|\omega}\}$ обмежена в $H^1(\omega)$. Справді, використовуючи лему 4.2, маємо

$$\|v_s\|^2_{L^2(\omega)} + \|\nabla v_s\|^2_{L^2(\omega)} \leqslant C_1\|v_s\|^2_{\mathcal{H}} + \|\nabla v_s\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2\|v_s\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant C_3.$$

Згідно з компактністю вкладення простору $H^1(\omega)$ в $L^2(\omega)$ існує підпослідовність $\{v_{s'|\omega}\}$, сильно збіжна в $L^2(\omega)$ до нуля. Покажемо, знову використовуючи лему 4.2 (для функції $Bv_{s'}$), що $Bv_{s'} \to 0$ при $s \to \infty$. Це випливає з оцінки

$$\|Bv_{s'}\|^2_{\mathcal{H}} = (qv_{s'}, Bv_{s'})_{L^2(\omega)} - (K(m)\tau(v_{s'}), \tau(Bv_{s'}))_{\mathbb{R}^6} \leqslant C_1\|v_{s'}\|_{L^2(\omega)}\|Bv_{s'}\|_{\mathcal{H}}.$$

Лему доведено.

Отже, оператор $B$ має дискретний невід'ємний дійсний спектр і відповідну ортонормовану в $\mathcal{H}$ систему власних векторів. Оператор $B$ має нескінченновимірне ядро, а власні підпростори, які відповідають ненульовим власним значенням, скінченновимірні. Причому величини, обернені до ненульових власних значень оператора $B$ (характеристичні числа), є власними значеннями задачі (4.6), яка еквівалентна спектральному рівнянню

$$Bv = \mu^{-1}v \tag{4.11}$$

в просторі $\mathcal{H}$.

**Лема 4.5.** *Будь-який розв'язок* $v(\xi) \in \mathcal{H}$ *рівняння (4.6) допускає асимптотичне зображення*

$$|v(\xi)| = O(|\xi^{-1}|), \quad |\nabla v(\xi)| = O(|\xi^{-2}|), \qquad |\xi| \to \infty. \tag{4.12}$$

*Доведення.* Нехай $K \subset \mathbb{R}^3$ — куля з центром у початку координат така, що $\omega \subset K$. Поза кулею $K$ рівняння (4.6) має вигляд $\mathcal{L}(\partial_\xi)v = 0$, а отже, його розв'язки в $\mathbb{R}^3 \backslash K$ гладкі (внутрішня гладкість розв'язків еліптичних задач) і, крім того, мають обмежений інтеграл Діріхле. Тоді, згідно з [17], такі розв'язки допускають в околі нескінченності зображення $v(\xi) = c + v^0(\xi)$, де $c \in \mathbb{R}^3$ — сталий вектор-стовпець, а для $v^0(\xi)$ справедливі асимптотики (4.12) при $|\xi| \to \infty$. Для нашого випадку, оскільки $v \in \mathcal{H}$, константа $c = 0$. Лему доведено.

**5. Основні результати.** Визначимо, як співвідносяться задачі (3.8),(3.9) та (4.6). Зв'язок між ними описують такі дві леми.

**Лема 5.1.** *Нехай* $\mu(\varepsilon)$ *та* $v_\varepsilon(\xi)$ *— власне значення та відповідний йому власний вектор задачі (3.8),(3.9), нормований умовою* $\|v_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = 1$. *Нехай* $\mu(\varepsilon) \to \mu^* \neq 0$ *при* $\varepsilon \to 0$

*і для деякої підпослідовності $\varepsilon' \to 0$ справджується умова: для будь–якого компакта $K \subset \mathbb{R}^3$ підпослідовність $v_{\varepsilon'}(\xi)$ слабко збіжна при $\varepsilon' \to 0$ в $H^1(K)$ до $v_*(\xi)$. Тоді $\mu_*$ та $v_*(\xi)$ — власне значення та відповідний йому власний вектор задачі (4.6).*

*Доведення.* Штрих біля $\varepsilon$ будемо опускати. За умовою леми пара $(\mu(\varepsilon), v_\varepsilon)$ задовольняє інтегральну тотожність (3.10):

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\mathfrak{A}\nabla v_\varepsilon, \nabla\varphi)\, d\xi - \mu(\varepsilon)\Big(\varepsilon^m\,(p(\varepsilon\xi)v_\varepsilon, \varphi)_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + (q(\xi)v_\varepsilon, \varphi)_{L^2(\omega)} - \\ -(J^{-1}(\varepsilon)\tau(v_\varepsilon), \tau(\varphi))_{\mathbb{R}^6}\Big) = 0 \tag{5.1}$$

для будь–якої вектор-функції $\varphi \in \mathcal{H}_\varepsilon$. Візьмемо довільну функцію $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ і $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедливе включення $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega^\varepsilon$. Тоді згідно з умовою леми

$$\int\limits_{\Omega^\varepsilon} (\mathfrak{A}\nabla v_\varepsilon, \nabla\psi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\mathfrak{A}\nabla v_\varepsilon, \nabla\psi)\, d\xi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\mathfrak{A}\nabla v_*, \nabla\psi)\, d\xi. \tag{5.2}$$

Оскільки послідовність $\{v_\varepsilon(\xi)\}$ обмежена в $\mathcal{H}_\varepsilon$, то тоді послідовність $\{v_{\varepsilon|\omega}\}$ сильно збіжна в $L^2(\omega)$, (а отже, і в $L^1(\omega)$) до $v_{*|\omega}$. Звідси, враховуючи ще лему 4.1, маємо

$$\begin{aligned} (q(\xi)v_\varepsilon, \psi)_{L^2(\omega)} &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (q(\xi)v_*, \psi)_{L^2(\omega)}, \\ \tau(v_\varepsilon) &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \tau(v_*), \\ J^{-1}(\varepsilon)\tau(v_\varepsilon) &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} K(m)\tau(v_*). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Нарешті, згідно з нерівністю Пуанкаре

$$\varepsilon^m|(p(\varepsilon\xi)v_\varepsilon, \psi)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}| \leqslant C_1\varepsilon^{m-2}\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_2\varepsilon^{m-2}\|\psi\|_{\mathcal{H}}. \tag{5.4}$$

Перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$ в тотожності (5.1) (з урахуванням (5.2)–(5.4) і щільності $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ в $\mathcal{H}$) отримаємо твердження леми.

Залишилось довести, що $v_* \not\equiv 0$. Справді, взявши в тотожності (5.1) $\psi = v_\varepsilon$ та перейшовши в ній після цього до границі при $\varepsilon \to 0$, отримаємо

$$1 = \mu_*\Big( (q(\xi)v_*, v_*)_{L^2(\omega)} - (K(m)\tau(v_*), \tau(v_*))_{\mathbb{R}^6} \Big),$$

звідки випливає, що $v_* \not\equiv 0$ на $\omega$. Лему доведено.

Нехай число $\mu$ та функція $v(\xi)$ є розв'язком задачі (4.6). Розглянемо функцію $w_\varepsilon(\xi) = v(\xi) - h_\varepsilon(\xi)$, де вектор-функція $h_\varepsilon \in \mathcal{H}$ має асимптотику (4.12) в околі нескінченності, дорівнює нулю в околі області $\omega$, і така, що $w_{\varepsilon|\Omega^\varepsilon} \in \mathcal{H}_\varepsilon$. За таку поправку до функції $v$ візьмемо функцію

$$h_\varepsilon(\xi) = |\xi|^{-1}\phi(\varepsilon\xi)\Psi\left(\xi/|\xi|\right)\beta(\varepsilon),$$

де $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ — скалярна функція, що дорівнює нулю на $\overline{\omega}_\varepsilon$ та одиниці поза деяким фіксованим околом області $\omega_\varepsilon$, $|\phi| \leqslant 1$. Вектор $\beta(\varepsilon)$ є розв'язком лінійної алгебраїчної системи рівнянь $M(\varepsilon)\beta(\varepsilon) = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)\Psi^\top(\xi)v(\xi)\,d\xi$ з матрицею

$$M(\varepsilon) = \int\limits_{\Omega^\varepsilon} p(\varepsilon\xi)|\xi|^{-1}\phi(\xi/|\xi|)\Psi^\top(\xi)\Psi(\xi)\,d\xi.$$

Легко переконатись у тому, що справджуються нерівності $|\beta(\varepsilon)| \leqslant C$ та

$$\|h_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \tag{5.5}$$

Через $V_\mu$ позначимо власний підпростір, який відповідає $r$–кратному власному значенню $\mu$ задачі (4.6) і нехай $\{v^{(k)}\}_{k=1}^r$ — ортонормований базис у $V_\mu$. Через $V_\mu(\varepsilon)$ позначимо підпростір у $\mathcal{H}_\varepsilon$, породжений тими власними векторами задачі (3.8),(3.9), для яких відповідні власні значення $\mu_\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$, а через $W_\mu(\varepsilon)$ — підпростір у $\mathcal{H}$, натягнутий на вектори $w_\varepsilon^{(k)}(\xi) = v^{(k)}(\xi) + h_\varepsilon^{(k)}(\xi)$. Зауважимо, що звуження на область $\Omega^\varepsilon$ функцій із $W_\mu(\varepsilon)$ утворюють підпростір у $\mathcal{H}_\varepsilon$.

**Лема 5.2.** *Нехай $\mu$ і $v(\xi)$ — власне значення та відповідний йому власний вектор задачі (4.6). Тоді існують такі власне значення $\mu(\varepsilon)$ задачі (3.8),(3.9) та послідовність $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, $v_\varepsilon \in V_\mu(\varepsilon)$, що $\mu(\varepsilon) \to \mu$ і $v_\varepsilon \to v$ в $H^1(G)$ при $\varepsilon \to 0$ для довільного компакта $G \subset \mathbb{R}^3$. Крім того, виконуються оцінки*

$$|\mu(\varepsilon) - \mu| \leqslant C(\mu)\varepsilon^{\beta(m)}, \tag{5.6}$$

$$\Theta_{\mathcal{H}_\varepsilon}(W_\mu(\varepsilon), V_\mu(\varepsilon)) \leqslant C(r)\varepsilon^{\beta(m)}, \tag{5.7}$$

*де $r$ — кратність власного значення $\mu$,*

$$\beta(m) = \begin{cases} 1/2, & m = 3,4,5; \\ \min\{m-2, 3-m\}, & 2 < m < 3; \\ \min\{m-3, 4-m\}, & 3 < m < 4; \\ \min\{m-4, 5-m\}, & 4 < m < 5; \\ \min\{m-5, 1/2\}, & m > 5. \end{cases} \tag{5.8}$$

*Доведення.* Нехай число $\mu$ та функція $v(\xi)$ є розв'язком задачі (4.6), тобто $\mu^{-1}$ та $v$ — власне значення та власний вектор оператора $B$. Нехай $\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ — скалярна функція, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ в околі області $\omega_\varepsilon$ (який має діаметр порядку $\varepsilon$), $|\nabla\eta| \leqslant C$, $\operatorname{supp}\eta = K$. Їй у змінних $\xi$ відповідає функція $\zeta_\varepsilon(\xi) = \eta(\varepsilon\xi) \in C_0^\infty(\Omega^\varepsilon)$, що дорівнює одиниці в околі області $\omega$, $\operatorname{supp}\zeta_\varepsilon = K^\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \,|x = \varepsilon\xi \in K\}$, і для якої справджуються нерівності

$$|\nabla\zeta_\varepsilon(\xi)| \leqslant C\varepsilon, \qquad |\nabla(1 - \zeta_\varepsilon(\xi))| \leqslant C\varepsilon. \tag{5.9}$$

За майже–власний вектор (у сенсі леми 1.4) оператора $B_\varepsilon$ візьмемо вектор-функцію $w_{\varepsilon|\Omega^\varepsilon}$ (надалі писатимемо $w_\varepsilon$). Тоді для довільної функції $\varphi \in \mathcal{H}_\varepsilon$ маємо

$$\left|\left(B_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon, \varphi\right)_{\mathcal{H}_\varepsilon}\right| =$$

$$= \left|\Big(\int\limits_\omega q(\xi) v\varphi\, d\xi - (K(m)\tau(v), \tau(\varphi))_{\mathbb{R}^6} - \mu^{-1}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\big(\mathfrak{A}\nabla v, \nabla(\zeta_\varepsilon\varphi)\big)\, d\xi\Big) + \right.$$

$$+\varepsilon^m \left(p(\varepsilon\xi) w_\varepsilon, \varphi\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)} - \left(\Big(J^{-1}(\varepsilon) - K(m)\Big)\tau(v), \tau(\varphi)\right)_{\mathbb{R}^6} +$$

$$\left. +\mu^{-1}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\big(\mathfrak{A}\nabla h_\varepsilon, \nabla\varphi\big)\, d\xi + \mu^{-1}\int\limits_{(\Omega\setminus K)^\varepsilon}\big(\mathfrak{A}\nabla v, \nabla\left((1-\zeta_\varepsilon)\varphi\right)\big)\, d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^m \left|\left(p(\varepsilon\xi) w_\varepsilon, \varphi\right)_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\right| + \left|\left(\Big(J^{-1}(\varepsilon) - K(m)\Big)\tau(v), \tau(\varphi)\right)_{\mathbb{R}^6}\right| +$$

$$+\mu^{-1}\int\limits_{\Omega^\varepsilon}\left|\Big(\mathfrak{A}\nabla h_\varepsilon, \nabla\varphi\Big)\right| d\xi + \mu^{-1}\int\limits_{(\Omega\setminus K)^\varepsilon}\left|\Big(\mathfrak{A}\nabla v, \nabla\left((1-\zeta_\varepsilon)\varphi\right)\Big)\right| d\xi =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Оцінимо кожен з доданків $I_j,\ j = 1, 2, 3, 4$.

Використовуючи нерівність Пуанкаре, одержимо

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant C_1\varepsilon^m \|w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_2\varepsilon^{m-2}\|\nabla w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \\ &\leqslant C_3\varepsilon^{m-2}\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant C_3\varepsilon^{m-2}\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant C_4\varepsilon^{m-2}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Оскільки $J^{-1}(\varepsilon)\tau(v) = -\alpha(\varepsilon)$, то за лемою 4.1

$$I_2 \leqslant \varepsilon^{\gamma(m)}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}, \tag{5.11}$$

де $\gamma(m)$ визначена в (4.5).

Оскільки функція $h_\varepsilon$ має асимптотику (4.12), то

$$I_3 \leqslant C_1\Big(\int\limits_{(\Omega\setminus K)^\varepsilon} |\nabla h(\xi)|^2\, d\xi\Big)^{\frac12}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_2\Big(\int\limits_{(\Omega\setminus K)^\varepsilon}|\xi|^{-4}\, d\xi\Big)^{\frac12}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant C_3\varepsilon^{1/2}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}. \tag{5.12}$$

Нарешті, враховуючи нерівності (5.9), Пуанкаре (для $\varphi$) та асимптотику (4.12), маємо

$$I_4 \leqslant C_1\Big(\int\limits_{(\Omega\setminus K)^\varepsilon}|\nabla v|^2\, d\xi\Big)^{\frac12}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_2\varepsilon^{1/2}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon}. \tag{5.13}$$

Отже, враховуючи оцінки (5.10)–(5.13), отримуємо

$$\left|\left(B_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon, \varphi\right)_{\mathcal{H}_\varepsilon}\right| \leqslant C\varepsilon^{\beta(m)}\|\varphi\|_{\mathcal{H}_\varepsilon},$$

звідки

$$\|\big(B_\varepsilon w_\varepsilon - \mu^{-1} w_\varepsilon\big)\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{\beta(m)}, \tag{5.14}$$

де $\beta(m)$ визначена в (5.8).

За лемою 1.4 з оцінки (5.14) випливає, що існує таке власне значення $\lambda(\varepsilon)$ задачі (3.8),(3.9), що виконується оцінка (5.6). Число $d$, яке фігурує в лемі 1.4, вибираємо так, щоб інтервал $\left[\mu^{-1} - d,\ \mu^{-1} + d\right]$ не містив точок спектра оператора $B$, відмінних від $\mu^{-1}$. Тоді за цією лемою існує такий вектор $v_\varepsilon(\xi) \in V_\mu(\varepsilon)$, $\|v_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = 1$, що

$$\|v_\varepsilon - w_{\varepsilon|\Omega^\varepsilon}\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant 2Cd^{-1}\varepsilon^{\beta(m)}, \tag{5.15}$$

причому $v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} v$ в $H^1(G)$ для довільного компакта $G \subset \mathbb{R}^3$. Доведемо це. Враховуючи нерівності (5.15) та (5.5), маємо

$$\begin{aligned} &\|\nabla(v_\varepsilon - v)\|_{L^2(G)} \leqslant \|\nabla(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla(w_\varepsilon - v)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \\ &\leqslant C_1\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} + C_2\|w_\varepsilon - v\|_{\mathcal{H}} \leqslant C_3\varepsilon^{\beta(m)} + C_4\varepsilon^{1/2} \leqslant C_5\varepsilon^{\beta(m)}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Візьмемо функцію $\zeta_\varepsilon(\xi)$, введену на початку доведення леми, але яка дорівнює одиниці в околі компакта $G$. Тоді, використовуючи нерівності (5.5),(5.9),(5.15) та Пуанкаре, одержимо

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon - v\|_{L^2(G)} &\leqslant \|w_\varepsilon - v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\zeta_\varepsilon(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(G)} \leqslant \\ &\leqslant C_1\|w_\varepsilon - v\|_{\mathcal{H}} + C_2\|\nabla(\zeta_\varepsilon(v_\varepsilon - w_\varepsilon))\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \\ &\leqslant C_3\varepsilon^{1/2} + C_4\varepsilon\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + C_5\|\nabla(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \\ &\leqslant C_3\varepsilon^{1/2} + C_6\|\nabla(v_\varepsilon - w_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C_3\varepsilon^{1/2} + C_7\|v_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{\mathcal{H}_\varepsilon} \leqslant \\ &\leqslant C_3\varepsilon^{1/2} + C_8\varepsilon^{\beta(m)} \leqslant C_9\varepsilon^{\beta(m)}. \end{aligned}$$

Звідси та з нерівності (5.16) маємо

$$\|v_\varepsilon - v\|^2_{H^1(G)} = \|v_\varepsilon - v\|^2_{L^2(G)} + \|\nabla(v_\varepsilon - v)\|^2_{L^2(G)} \leqslant C\varepsilon^{2\beta(m)},$$

тобто $v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} v$ в $H^1(G)$.

З нерівності (5.5) випливає, що $\dim W_\mu(\varepsilon) = \dim V_\mu$ і

$$\Theta_{\mathcal{H}}(W_\mu(\varepsilon), V_\mu) \leqslant C(r)\varepsilon^{1/2}. \tag{5.17}$$

З оцінки (5.15) та нерівності (5.17) випливає, що $\dim V_\mu \leqslant \dim V_\mu(\varepsilon)$. Справджується і обернена нерівність, яка є наслідком леми 5.1 та справедливості граничного переходу

$$\delta_{ij} = (v_\varepsilon^{(i)}, v_\varepsilon^{(j)})_{\mathcal{H}_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (v_*^{(i)}, v_*^{(j)})_{\mathcal{H}} = \delta_{ij}.$$

Отже, $\dim V_\mu = \dim V_\mu(\varepsilon) = \dim W_\mu(\varepsilon)$. Тоді, враховуючи нерівність (5.17), згідно з лемою 1.5 виконується нерівність (5.7). Лему доведено.

Через $U_\mu(\varepsilon)$ позначимо підпростір у $H^1(\Omega)$, породжений звуженнями на область $\Omega$ функцій

$$\varepsilon^{-1/2}\Big(v^{(k)}(m, x/\varepsilon) + \Psi(x/\varepsilon)\alpha^k(m)\Big),$$

де, нагадаємо, $\{v^{(k)}(m,x)\}_{k=1}^r$ — ортонормований базис у $V_\mu$, а $\alpha^k(m) = -K(m)\tau(v^{(k)})$. Тоді леми 5.1 та 5.2 доводять таку теорему.

**Теорема.** *Нехай* $\{\lambda_s(\varepsilon)\}_{s=0}^{\infty}$ *— послідовність власних значень задачі (2.1),(2.2), а* $\{u_\varepsilon^{(s)}\}_{s=0}^{\infty}$ *— відповідна їй система ортонормованих у* $H^1(\Omega)$ *власних векторів. Тоді для* $s = 1, 2, \ldots$ *при* $\varepsilon \to 0$ *справджується оцінка*

$$\left|\varepsilon^{2-m}\lambda_s(\varepsilon) - \mu_s\right| \leqslant C(s)\varepsilon^{\beta(m)},$$

*де* $\{\mu_s\}_{s=0}^{\infty}$ *— послідовність власних значень задачі (4.6);* $\beta(m)$ *визначена в (5.8). Якщо* $\mu$ *— власне значення задачі (4.6) кратності* $r$, *то*

$$\Theta_{H^1(\Omega)}(V_\mu(\varepsilon), U_\mu(\varepsilon)) \leqslant C(r)\varepsilon^{\beta(m)}.$$

Ми довели, що власний вектор $u_\varepsilon(x)$ задачі (2.1),(2.2) має вигляд

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1/2}\Big(v(x/\varepsilon) + \Psi(x/\varepsilon)\alpha(m) + O(\varepsilon^{\beta(m)})\Big), \tag{5.18}$$

де $v$ — відповідний власний вектор задачі (4.6), $\alpha(m) = -K(m)\tau(v)$. Формула (5.18) дає математичний опис ефекту локальних коливань. Форму власних коливань системи складає жорстке переміщення $\varepsilon^{-1/2}\Psi(x/\varepsilon)\alpha(m)$, на яке накладається високочастотна в околі області $\omega_\varepsilon$ компонента $\varepsilon^{-1/2}v(x/\varepsilon)$, що стає малою поза цим околом. Там $|\varepsilon^{-1/2}v(x/\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^{1/2}$ (див. (4.12)).


1. Олейник О.А.,Иосифьян Г.А.,Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред.– М.: Изд-во МГУ,1990.— 312с.
2. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984.— 472с.
3. Sanches-Palensia E. *Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses* // Trends and Applications of Pure Mathematics to Mechanics.Lecture Notes in Phys.— 1984.— N155.— P.346–368.
4. Sanches-Palensia E.,Tchatat H. *Vibration de systems élastiques avec des masses concentrées*// Rend. Sem. Mat. Univers. Politech. Torino.— 1984.— Vol.42,N3.— P.43–63.
5. Olejnik O.A.*Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularly perturbed operators* // Non-classical Continuum Mechanics. 1987. Lecture Notes series,122. Cambridge University Press.– P.188–205.
6. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А.*Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями* // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1990.— Т.192.— С.42–60
7. Головатый Ю.Д. *О влиянии сильных локальных возмущений плотности на спектр колебательных систем* // Нелинейные граничные задачи.— 1993.— Вып.5.— С.26–31.
8. Головатый Ю.Д. *Спектральная задача Неймана для оператора Лапласа с сингулярно возмущённой плотностью*// Успехи матем. наук.— 1990.— Т.45, N4.— С.147–148.

9. Головатый Ю.Д. *Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами* // Тр. Московск. матем. об-ва.— 1992.— Т.54.— С.29–72.
10. Nazarov S.A. *Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions* // Mathematical Modelling and Numerical Analysis.— 1993.— V.7,N6.— P.777–799.
11. Назаров С.А. *Об одной задаче Санчес-Паленсия с краевыми условиями Неймана*// Изв. ВУЗов, Матем.— 1989.— N11.— С.60–66.
12. Олейник О.А. *О собственных колебаниях тел с концентрированными массами* // Совр.пробл.прикл.мат. и матем.физики. М.: 1988.— С.101–128.
13. Hrabchak H.Ye. *On asymptotic properties of eigenvalues and eigenfunctions of an elasticity medium with concentrated masses* // Intern.Conf. "Nonlinear differential Equations". Book of Abstracts. Kiev,Aug. 21–27,1995.— P.57.
14. Кондратьев В.А., Олейник О.А. *Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна.* // Успехи матем. наук.— 1988.— Т.43, Вып.5(263).— С.55–98.
15. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.– М.: Наука, 1983.— 421с.
16. Вишик М.И.,Люстерник А.А. *Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.* // Успехи матем. наук.— 1957.— Т.12,N 5.— С.3–122.
17. Бучукури Т.В., Гегелиа Т.Г. *О единственности решений основных задач теории упругости для бесконечных областей* // Дифференц. уравн.— 1989.— Т.25,N9.— С.1556–1565.

*Стаття надійшла до редколегії 08.07.96*

УДК 517.944.1

# ІНТЕГРОВНІ СИСТЕМИ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ТОЧОК НА ПРЯМІЙ

А. Я. Вус

**A. Ya. Vus. Integrable systems of interactive particles on the line.** The hamiltonian systems of interactive particles with polinomial by velocities additional integral are considered. The properties of the analytical potentials of interaction are odtained. The exact form of integrable potentials is deduced for the case of the integral with constant coefficients at the members leading by velocities. These results are generalised for the case of pairwise distinct potentials of interaction.

Динаміка руху $n$ однакових взаємодіючих частинок на прямій описується гамільтоновою системою з гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i<j} V(x_i - x_j), \tag{1}$$

де $x_i$ і $p_i$, $i = 1, ..., n$ — відповідно координати та імпульси частинок; $V(\cdot)$ — парна функція (потенціал парної взаємодії). Мозер [1] і Калоджеро [2] довели, що система з гамільтоніаном (1) інтегровна за Ліувіллем, якщо $V$ є $\mathcal{P}$-функцією Вейєрштрасса (або її виродженими випадками $z^{-2}, sin^{-2}z, sh^{-2}z$). В праці [3] доведено, що для трьох частинок це єдиний випадок, коли існує поліноміальний інтеграл третього степеня, незалежний від інтегралів $H$ і $P = \sum p_i$.

Наша робота присвячена питанню існування додаткового поліноміального за імпульсами інтеграла довільного степеня для системи (1) у випадку трьох частинок.

**Означення([3]).** *Поліноміальний за імпульсами інтеграл $F = F(x,p)$ $2N$-го степеня називається інтегралом загального положення (ІЗП), якщо*

*(i) $\{F, P\} = 0$;*

*(ii) старший однорідний за імпульсами доданок $F_{2N}$ інтеграла $F$ має сталі коефіцієнти;*

*(iii) $D_p^{2N-3} F_{2N}$ не є функцією елементарних симетричних поліномів $\sigma_1$ і $\sigma_2$.*

Тут диференціальний оператор $D_p = \sum \dfrac{\partial}{\partial p_i}$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 58F05.

Редукцією за відомим інтегралом $P = \sum p_i$ одержуємо систему на чотиривимірному фазовому просторі з гамільтоніаном, який знову позначатимемо через $H$:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(x) + V\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right), \tag{2}$$

Випишемо канонічні рівняння Гамільтона:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \dot{p}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial y}. \end{cases} \tag{3}$$

Нехай ця система має інтеграл $2N$-го степеня

$$F = F_{2N} + F_{2N-2} + \cdots + F_0, \tag{4}$$

де $F_k = \sum E^{(k-i,i)}(x,y) p_1^{k-i} p_2^i$. Тоді виводиться теорема.

**Теорема 1.** *Нехай система (2),(3) допускає інтеграл (4) і потенціал $V(\cdot) \in \mathcal{C}^\omega(0,\infty)$. Тоді нуль є або регулярною точкою для $V$, або полюсом другого порядку.*

Ця теорема посилює твердження з [3], де для відповідного висновку потрібне було існування нетривіального інтеграла третього степеня.

Із (4) і умови $\{F, H\} \equiv 0$ бачимо, що коефіцієнти $E^{(k-i,i)}(x,y)$ задовольняють співвідношення

$$\partial_x E^{(k-i-1,i-1)} + \partial_y E^{(k-i-2,i)} = (k-i) E^{(k-i,i)} \partial_x W + (i+1) E^{(k-i-1,i+1)} \partial_y W, \tag{5}$$

де $i = \overline{0, k-1}; k = \overline{2, 2N+2}$,

$$W(x,y) = V(x) + V\left(-\tfrac{x}{2} + \tfrac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V\left(-\tfrac{x}{2} - \tfrac{y\sqrt{3}}{2}\right).$$

**Лема 1.** *В умовах теореми нуль є або регулярною точкою для $V$ або існують натуральне $k$ і $\varphi(\cdot) \in \mathcal{C}^\omega(0,\infty)$ такі, що $\varphi(0) = 1$ і $V(x) = \varphi(x) x^{-2/(2k+1)}$.*

*Доведення.* 1. Нехай коефіцієнти $E^{(2N-i,i)}$ є константами. Тоді згідно з лемою 1 з [4] $E^{(2N-i,i)} = 0$ для непарних $i$. Позначимо

$$R = -V\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right), S = V\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right).$$

Тоді рівняння (5) для $\kappa = 2N$ можна проінтегрувати у вигляді

$$\begin{aligned} E^{(2N-2,0)} &= 2N E^{(2N,0)} V(x) + \lambda_0^{(2N-2)} \cdot S + \omega^{(2N-2,0)}, \\ E^{(2N-3,1)} &= \lambda_1^{(2N-2)} \cdot R + \omega^{(2N-3,1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E^{(0,2N-2)} &= 2E^{(2,2N-2)} V(x) + \lambda_{2N-2}^{(2N-2)} \cdot S + \omega^{(0,2N-2)}, \\ 0 &= \lambda_{2N-1}^{(2N-2)} \cdot R + \omega^{(-1,2N-1)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Тут $\lambda_{2N-j}^{(2N-2)}$ — лінійні комбінації коефіцієнтів $E^{(2N-i,i)}$, $i = \overline{j-1,2N}$, $\partial_x \omega^{(k+1,2N-k-1)} + \partial_y \omega^{(k,2N-k)} = 0$. Тоді з останнього рівняння випливає, що

$$\lambda_{2N-1}^{(2N-2)} = \omega^{(-1,2N-1)} = 0.$$

Тому всі $\omega^{(2N-i,i)}$ — поліноми не більш як $2N$-го степеня від $x, y$. Запишемо $W(x,y) = x^\alpha + r(x,y)$, де $r(x,y) = o(x^\alpha)$ при $x \to 0$. У нас комбінація $\lambda_{2N-1}^{(2N-2)}$ — це коефіцієнт при $x^{\alpha+1}$ в системі (6).

Інтегруючи аналогічним чином рівняння (5) для $k = 2N - 2l$ і прирівнюючи до нуля коефіцієнти $\lambda_{k-1}^{(k-2)}$ при $x^{l\alpha+1}$ аж до $l = N$, одержимо систему з $N$ рівнянь на $E^{(2N,0)}, \ldots, E^{(0,2N)}$

$$\lambda_{2N-1}^{(2N-2)} = \lambda_{2N-3}^{(2N-4)} = \cdots = \lambda_1^{(0)} = 0. \tag{7}$$

Оскільки $F$ є функціонально незалежним з $H$, то $F - E^{(2N,0)} H^N$ є знову першим інтегралом. Тоді можна вважати, що $E^{(2N,0)} = 0$ і (7) є однорідною системою $N$ лінійних рівнянь на $N$ невідомих з матрицею $L$, що має верхній трикутний вигляд. Індукцією можна показати, що її діагональні елементи

$$L_{kk} = (2N - 2k + 2) \prod_{j=1}^{k} \frac{2 + (2j-1)\alpha}{1 + j\alpha}.$$

Тоді з умови рівності нулю визначника $L$ маємо твердження леми.

2. Нехай коефіцієнти $E^{(2N-i,i)}$ залежні від координат. Проінтегрувавши рівняння (5) для $k = 2N + 2$, матимемо

$$\begin{gathered}
E^{(2N,0)} = \varphi^{(2N)}, \\
E^{(2N-1,1)} = \varphi^{(2N-1)} - x\partial_y \varphi^{(2N)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
E^{(0,2N)} = \varphi^{(0)} - x\partial_y \varphi^{(1)} + \cdots + \frac{x^{2N}}{(2N)!} \partial_y^{2N} \varphi^{(2N)},
\end{gathered} \tag{8}$$

де $\varphi^{(k)}$ — деякі поліноми $k$-го степеня від $y$. Однак $\varphi^{(k)} = 0$ для непарних $k$, що є наслідком леми 1 з [4]. Тоді методом, аналогічним до наведеного вище, одержимо систему з $N$ рівнянь

$$\partial_y \varphi^{(2)} \cdot L_{11} = 0, \quad \partial_y \varphi^{(4)} \cdot L_{22} = 0, \quad \ldots, \quad \partial_y \varphi^{(2N)} \cdot L_{NN} = 0,$$

звідки знову випливає твердження леми.

**Лема 2.** *Нехай потенціал $V(x)$ допускає інтеграл (4) і $V(x) = O(x^\alpha)$ при $x \to 0, \alpha < 0$. Тоді потеціал $x^\alpha$ також допускає нетривіальний інтеграл степеня $\leqslant 2N$.*

*Доведення.* Виконаємо заміну змінних $x = x_1\varepsilon, y = y_1\varepsilon, p_i = q_i/\varepsilon$ та розкладемо $F$ і $H$ в ряди за малим параметром $\varepsilon$. Тоді, позначивши через $H_0$ і $F_0$ доданки при $\varepsilon^0$, матимемо $\{H_0, F_0\} \equiv 0$, де $F_0$ функціонально незалежний з $H_0$.

**Лема 3.** *Якщо потенціал $x^\alpha$, де $\alpha = -2/(2k+1)$, допускає інтеграл (4), то $\alpha = -2$.*

*Доведення.* Припустимо, що $\alpha \neq -2$. Розкладемо $W(x,y)$ в ряд за степенями $x$:

$$W = x^\alpha + A(y) + B(y) \cdot x^2 + \dots, \tag{9}$$

де $A(y) = 2V(\frac{y\sqrt{3}}{2})$. Тепер, аналогічно до доведення леми 1, розглянемо два випадки, коли $E^{(2N-i,i)}$ є константами і коли $E^{(2N-i,i)}$ є поліномами $2N$-го степеня від $x, y$. Тепер, врахувавши (9) і прирівнявши до нуля коефіцієнти при $x^\alpha, x^{\alpha+1}, \dots, x^{\alpha+2N}$ в рівняннях (5) для $k = 2N-2$, одержимо, що $(\alpha+2)\prod_{i=1}^{N}(\alpha+i)^{-1} = 0$, що суперечить початковому припущенню леми.

Отже, теорему 1 доведено.

**Лема 4.** *Нехай система (2),(3) допускає інтеграл третього степеня зі сталими коефіцієнтами при старших за імпульсами доданках. Тоді потенціал $V$ задовольняє диференціально-функціональне рівняння*

$$\begin{aligned} R(V) = \left(V(x) - V\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(V'\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V'(x)\right) - \\ - \left(V(x) - V\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(V'\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V'(x)\right) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

**Лема 5([3]).** *Якщо $V(\cdot)$ – парна функція і є розв'язком рівняння (10), нуль для неї є полюсом другого порядку, то $V(z) = \mathcal{P}(z)$, де $\mathcal{P}(\cdot)$ - функція Вейєрштрасса.*

Ми пропонуємо результат, який дає змогу поширити результати лем 4 і 5 на випадок інтеграла довільного степеня.

**Теорема 2.** *Нехай система (2),(3) допускає інтеграл (4) зі сталими коефіцієнтами при старших за імпульсами доданках. Якщо $V(\cdot) \in \mathcal{C}^\omega(0,\infty)$ і $V(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то $V(z) \in \{z^{-2}, sh^{-2}z\}$.*

*Доведення.* Зауважимо, що згідно з [4] $F_{2N}$ є першим інтегралом більярду у відповідному (2) альков і Вейля. Тоді його можна записати у вигляді комбінації поліномів $T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$ і $J = 3p_1^2 p_2 - p_2^3$.

Тоді з системи (5), виписавши рівняння для $k = 2N+2, 2N$ і $2N-2$, одержимо рівняння для функції $V$: $\varrho(V) = 0$, причому для деяких натуральних $m_1, m_2$

$$\varrho(V) = \delta^{m_1}\gamma^{m_2}R(V), \tag{11}$$

де $\delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \gamma = 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3}{\partial y^3}$. Справді, записавши рівняння (5) для $k = 2N-2$, одержимо

$$\partial_x E^{(2N-4,0)} = (2N-2)E^{(2N-2,0)}\partial_x W + E^{(2N-3,1)}\partial_y W,$$

$$\partial_y E^{(2N-4,0)} + \partial_x E^{(2N-5,1)} = (2N-3)E^{(2N-3,1)}\partial_x W + 2E^{(2N-4,2)}\partial_y W,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\partial_y E^{(0,2N-4)} = E^{(1,2N-3)}\partial_x W + 2NE^{(0,2N-2)}\partial_y W.$$

Запишемо звідси диференціально-функціональне рівняння для функції $V$:

$$\begin{aligned}\varrho(V) = \partial_y^{2N-3}((2N-2)E^{(2N-2,0)}\partial_x W + E^{(2N-3,1)}\partial_y W) - \\ -\partial_x\partial_y^{2N-4}((2N-3)E^{(2N-3,1)}\partial_x W + 2E^{(2N-4,2)}\partial_y W) + \\ + \dots\dots\dots - \\ -\partial_x^{2N-3}(E^{(1,2N-3)}\partial_x W + 2NE^{(0,2N-2)}\partial_y W) = 0.\end{aligned}$$

Маємо $F_{2N} = F_{2N}(T, J)$. Тоді

$$F_{2N} = c_0 \cdot J^{m2+1}T^{m1} + c_1 \cdot J^{m2-1}T^{m1+3} + \dots + c_k \cdot T^N,$$

де $c_0 \neq 0$. Потрібно зауважити, що $\varrho(V)$ не залежить від константи при доданку $T^N$. Позначимо через $\varrho(F_K, V)$ відповідне рівняння для однорідного полінома $F_K$ степеня $K$ від імпульсів. Легко показати, що $\varrho(F_K, V) = \gamma\varrho(G_{K-3}, V)$ при $F_K = J \cdot G_{K-3}$ і $\varrho(F_K, V) = \delta\varrho(G_{K-2}, V)$ при $F_K = T \cdot G_{K-2}$. Звідси випливає зображення (11).

Зауважимо, що $R(V) \in \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^2)$ і з того, що (11) виконується тотожно, випливає (6). Для цього досить показати, що для оператора $\gamma$ виконується теорема єдиності, аналогічна до теореми єдиності для гармонійних функцій (для оператора $\delta$). Тоді з леми 5 випливає твердження теореми.

Окремо стоїть проблема інтегровності системи з попарно різними потенціалами, які не обов'язково задовольняють умову парності:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 + \sum_{i<j} V_{ij}(x_i - x_j). \tag{12}$$

У цьому випадку в лемі 4 рівняння (10) набуває вигляду

$$\begin{aligned}R(V) = \left(V_{12}(x) - V_{13}\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(V_{23}'\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V_{12}'(x)\right) - \\ - \left(V_{12}(x) - V_{23}\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(V_{13}'\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V_{12}'(x)\right) = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

**Теорема 3.** *Нехай функції $V_{ij} \in \mathcal{C}^\omega(0, \infty)$ є розв'язками (13). Тоді всі потенціали збігаться і рівні $V(x) \in \{\exp(x), \mathcal{P}(x)\}$ .*

Для доведення теореми застосуємо метод з [3]. Не вдаючись у деталі, зазначимо, що коли 0 є полюсом хоча б однієї з функцій $V_{ij}$ (наприклад, $V_{12}$), то в результаті розвинення рівняння (13) за степенями $x$ одержимо $V_{23} = V_{13}$. Аналогічно, якщо 0 є регулярною точкою для $V_{12}$, то інші дві функції знову однакові. Отже, всі $V_{ij}$ збігаються. Якщо 0 – регулярна точка $V_{12}$, то всі $V_{ij}(x) = \exp(x)$, а в іншому випадку одержимо умови леми 5.

**Лема 6.** *Нехай система (12),(3) допускає інтеграл (4) зі сталими коефіцієнтами в* $F_{2N}$. *Тоді потенціали* $V_{ij}$ *відрізняються на поліноми не більш ніж* $2N$*-го степеня.*

*Доведення.* Перепозначимо $r_j = \lambda_j^{(2N-2)}$ з рівнянь (6). Тоді

$$r_1 = 2E^{(2N-2,2)} - 2NE^{(2N,0)},$$
$$r_3 = 4E^{(2N-4,4)} - (2N-2)E^{(2N-2,2)} + 3r_1,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$r_{2N-1} = 2nE^{(0,2N)} - 2E^{(2,2N-2)} + 3r_{2N-3}.$$

Нехай

$$W(x,y) = V(x) + V_+\left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + V_-\left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$R = -V_+ + V_-, S = V_+ + V_-.$$

Тоді, враховуючи, що $\omega^{(-1,2N-1)}$ з рівнянь (6) є поліномом не більш ніж $2N$-го степеня від $x$, матимемо $r_{2N-1}\sqrt{3}\cdot\partial_x^{2N+1}R = 0$, звідки $r_{2N-1} = 0$, або $V_+(t) - V_-(t)$ є поліномом $2N$-го степеня. Виписавши рівняння (4) для $k = 2N-2, 2N-4, \dots, 2$ і прирівнюючи до нуля коефіцієнти при $x^{(N-k)\alpha}$, послідовно одержуватимемо $r_{k-1}\sqrt{3}\cdot\partial_x^{k+1}R = 0$. Отже, або $V_+(t) - V_-(t)$ є поліномом $2N$-го степеня від $t$, або всі $r_i = 0$. Але якщо викананується остання умова, то $F_{2N} = C\cdot(p_1^2+p_2^2)^N$, тобто інтеграл $F$ не є інтегралом найменшого можливого степеня, функціонально незалежним з $H$.

Лема 6 дає змогу поширити умови теореми 2 на клас систем з гамільтоніаном (12), оскільки умова $V_{ij}(x) \to 0$ при $x \to \infty$ відразу має своїм наслідком рівність потенціалів $V_{ij}$.


1. Moser J. *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations* // Adv.Math.— 1975.— 16.— P.197–220.
2. Calogero F. *Exactly solvable one-dimensional many body problems* // Letters al Nuovo Cimento.— 1975.— Vol. 13, N11.— P.411–416.
3. Пидкуйко С.И.,Степин А.М. *Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем* // Доклады АН СССР.— 1978.— Т. 239, N1.— С.50–51.
4. Вус А.Я. *Про перші інтеграли натуральних систем* // Тези доп.IV Міжнарод. конф. ім.ак.М.Кравчука. К. 1995. – С.64.


*Стаття надійшла до редколегії 21.06.96*

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ, механіко-математична серія Вип.45, 1996

УДК 539.3

# МЕТОД РОЗВИНЕННЯ ЗА ТЕНЗОРНИМИ ФУНКЦІЯМИ В НЕЛІНІЙНІЙ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН

Г. І. Благута, Я. Й. Бурак

**G. I. Blaguta, Ya. Yo. Burak Method of decomposition with respect to tensor functions in nonlinear theory of plates** An approach and methods of construction of dynamic mathematical models of nonlinear theory of elastic plates are proposed. By the way representation of transition vector by its decomposition with respect to the base of tensor functions of increasing valency is used. Coefficients of this decomposition are tensor functions of corresponding valency. A system of motion equations is deduced for them. Particular cases of obtained system for linearly elastic plates are considered.

Метод розкладу за тензорними функціями зростаючої валентності використано в [1,2] для побудови математичних моделей наближеного розв'язування крайових задач теорії пружності циліндричних тіл, а в [3] - для побудови рівнянь теорії пружних оболонок. Цей підхід ми застосували для побудови двовимірних систем рівнянь руху нелінійної теорії пружних пластин.

Розглянемо однорідну ізотропну пружну пластину $\mathcal{K}^*$, яка віднесена до декартової системи координат $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. Задамо деяку фіксовану (відлікову) її конфігурацію. В цій конфігурації пластина ненавантажена і займає область $X_0^*$ обмежену поверхнею $\partial X_0^* = \partial X_{0-}^* \bigcup \partial X_{120}^* \bigcup \partial X_{0+}^*$. Тут $\partial X_{0-}^*, \partial X_{0+}^*$ – основи пластини, $\partial X_{120}^*$– бокова гранична поверхня.

Положення довільної точки $k \in \mathcal{K}^*$ у відліковій конфігурації характеризуємо радіусом-вектором

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{120} + \vec{R}_0,$$

де $\vec{r}_{120} = \xi^1 \vec{\ni}_1^{\,0} + \xi^2 \vec{\ni}_2^{\,0}$ – радіус-вектор точок серединної поверхні $(\xi^3 = 0)$, $\vec{R}_0 = \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0}$, $-h \leqslant \xi^3 \leqslant h$ ($2h$ – товщина пластини).

З моменту часу $\tau = \tau_0$, який приймаємо за початковий, на пластину починають діяти поверхневі та об'ємні сили. Геометричну конфігурацію пластини для $\tau \geqslant \tau_0$ будемо називати актуальною. Положення точки $k \in \mathcal{K}^*$ в момент часу $\tau$ визначаємо радіусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, \tau) = \vec{r}_0 + \vec{u}$, де $\vec{u}(\vec{r}_0, \tau)$– вектор переміщення.

Під час побудови математичної моделі нелінійної теорії пружних пластин за базове приймаємо рівняння балансу енергії за підходом Лагранжа для підсистеми $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^*$.

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73C50.

Цій підсистемі у відліковій конфігурації відповідає циліндрична область $X_0$, побудована на основі довільно виділеної області $\partial X_0^c \subset \partial X_0^{c*}$ серединної поверхні. Маємо

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{X_0} E_0\, dV_0 = \int\limits_{\partial X_0} \vec{P}_{n_0}\cdot\vec{v}\, d\Sigma_0 + \int\limits_{X_0} \vec{f}_0\cdot\vec{v}\, dV_0, \tag{1}$$

де $E_0$ – густина повної енергії; $\vec{v} = \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}$ – вектор швидкості; $dV_0$ і $d\Sigma_0$ – об'єм фізично малої області $\delta X_0 \subset X_0$ і площа фізично малого елемента граничної поверхні $\delta\partial X_0 \subset \partial X_0$; вектори $\vec{P}_{n_0}$ і $\vec{f}_0$ є характеристиками поверхневої та об'ємної силової дії, які нормуються щодо метричних характеристик виділеної області у відліковій конфігурації.

Згідно з означенням тензора напружень Піоли-Кірхгофа $\hat{P}$

$$\vec{P}_{n_0} = \vec{n}_0\cdot\hat{P},$$

де $\vec{n}_0$– зовнішня нормаль у довільній точці $x_0 \in \partial X_0$. З урахуванням цієї умови після перетворення поверхневого інтеграла за формулою Гауса-Остроградського одержимо

$$\int\limits_{X_0^c}\left[\int\limits_{-h}^{h}(\vec{\nabla}_0\cdot(\hat{P}\cdot\vec{v}) + \vec{f}_0\cdot\vec{v} - \frac{\partial E_0}{\partial\tau})\, d\xi^3\right] d\Sigma_0^c = 0. \tag{2}$$

Тут $\vec{\nabla}_0 = \dfrac{\partial}{\partial\xi^i}\vec{\ni}_0^i$– диференціальний оператор Гамільтона у відліковій конфігурації; $\{\vec{\ni}_0^i\}$ $(i=\overline{1,3})$– векторний базис, біортогональний до базису $\{\vec{\ni}_i^0\}$ $(i=\overline{1,3})$ і для декартових координат збігається з ним.

Якщо врахувати довільність вибраної області $X_0^c$, то рівнянню (2) можна поставити у відповідність таке рівняння балансу енергії в локальній формі:

$$\frac{\partial\tilde{L}_0}{\partial\tau} = \int\limits_{-h}^{h}(\vec{\mathcal{P}}_0\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\tau} - \hat{P}\cdot\cdot\frac{\partial\hat{\mathcal{E}}}{\partial\tau})\, d\xi^3, \tag{3}$$

де $\qquad \tilde{L}_0 = \int\limits_{-h}^{h}(\vec{\mathcal{P}}_0\cdot\vec{v} - E_0)\, d\xi^3, \quad \vec{\mathcal{P}}_0 = \vec{\mathcal{P}}_{0(0)} + \int\limits_{\tau_0}^{\tau}(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{P} + \vec{f}_0)\, d\eta,$

$\vec{\mathcal{P}}_0$– вектор силового імпульсу, $\vec{\mathcal{P}}_{0(0)}$– його початкове значення, $\hat{\mathcal{E}} = = (\vec{\nabla}_0\otimes\vec{r})^T$– тензор деформації.

Для наближеного формулювання задачі вектор переміщення $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}_{120} + \vec{R}_0;\tau)$ задамо розвиненням за заданим базисом тензорних функцій $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N}\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\overset{i-1}{\cdot}\hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120};\tau). \tag{4}$$

У цьому зображенні індекси $(i-1)$ та $(i)$ задають валентність тензорних функцій; „ $\overset{i-1}{\cdot}$ " означає $(i-1)$ – кратний внутрішній добуток тензорів.

Підставимо це зображення вектора переміщення у рівняння (3). Як наслідок, отримаємо

$$\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \tau} = \hat{Q}_{10}^{(i)} \overset{i}{\cdot} \frac{\partial \hat{v}^{(i)}}{\partial \tau} - \hat{Q}_{21}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} \frac{\partial \hat{e}_1^{(i+1)}}{\partial \tau} - \hat{Q}_{22}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} \frac{\partial \hat{e}_2^{(i+1)}}{\partial \tau}, \tag{5}$$

де

$$\hat{Q}_{10}^{(i)} = \int\limits_{-h}^{h} \vec{\mathcal{P}}_0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\xi^3, \qquad \hat{v}^{(i)} = \frac{\partial \hat{u}^{(i)}}{\partial \tau}, \tag{6}$$

$$\hat{Q}_{21}^{(i+1)} = \int\limits_{-h}^{h} \hat{P} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\xi^3, \qquad \hat{e}_1^{(i+1)} = \hat{u}^{(i)} \otimes \vec{\nabla}_{012},$$

$$\hat{Q}_{22}^{(i+1)} = \int\limits_{-h}^{h} \hat{P} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^3} d\xi^3, \quad \hat{e}_2^{(i+1)} = \hat{u}^{(i)} \otimes \vec{\ni}_0^3, \tag{7}$$

$$\vec{\nabla}_{012} = \vec{\ni}_0^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} \quad (\alpha = \overline{1,2}).$$

Співвідношенню (5) можна поставити у відповідність таку диференціальну 1-форму

$$d\tilde{L}_0 = \hat{Q}_{10}^{(i)} \overset{i}{\cdot} d\hat{v}^{(i)} - \hat{Q}_{21}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} d\hat{e}_1^{(i+1)} - \hat{Q}_{22}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} d\hat{e}_2^{(i+1)}. \tag{8}$$

Приймаємо припущення про потенціальний характер опису механічної поведінки тіла. Тоді з наближення (4) і з (8) випливає, що потенціалом (функцією стану) є функція $\tilde{L}_0$, яка задана на $3N$-вимірному фазовому просторі тензорних параметрів

$$\{\hat{v}^{(i)^T}\}, \quad \{\hat{e}_\alpha^{(i+1)^T}\} \quad (\alpha = \overline{1,2};\ i = \overline{1,N}).$$

Ці параметри можна трактувати також як узагальнені координати, а параметри

$$\{\hat{Q}_{10}^{(i)}\}, \quad \{-\hat{Q}_{21}^{(i+1)}\}, \quad \{-\hat{Q}_{22}^{(i+1)}\}, \quad (i = \overline{1,N}),$$

які є спряженими до них, як узагальнені сили.

Будемо вважати, що узагальнені координати $\{\hat{v}^{(i)^T}\}$, $\{\hat{e}_\alpha^{(i+1)^T}\}$ $(\alpha = \overline{1,2})$ є незалежними параметрами локального стану. Тоді з (8) одержуємо такі визначальні рівняння стану:

$$\hat{Q}_{10}^{(i)} = \frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \hat{v}^{(i)^T}} \equiv \hat{Q}_{10}^{(i)}(\{\hat{v}^{(n)^T}\},\ \{\hat{e}_\alpha^{(n+1)^T}\}),$$

$$\hat{Q}_{2\alpha}^{(i+1)} = -\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial \hat{e}_\alpha^{(i+1)^T}} \equiv \hat{Q}_{2\alpha}^{(i+1)}(\{\hat{v}^{(n)^T}\},\ \{\hat{e}_m^{(n+1)^T}\}) \quad (\alpha = \overline{1,2},\ m = \overline{1,2},\ n = \overline{1,N}). \tag{9}$$

Якщо заданий базис розвинення $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$, то наближене зображення розв'язку характеризується тензорними функціями $\hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120};\tau)$ $(i == \overline{1,N})$. Виведемо рівняння для їх визначення. Для цього прирівняємо вирази для узагальнених сил $\hat{Q}_{10}^{(i)}$, які задаються формулами (6) і (9). У результаті одержуємо таку систему рівнянь:

$$\int_{-h}^{h}[\vec{\mathcal{P}}_{0(0)}+\int_{\tau_0}^{\tau}(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{P}+\vec{f}_0)d\eta]\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3=\hat{Q}_{10}^{(i)}(\{\hat{v}^{(n)^T}\},\ \{\hat{e}_{\alpha}^{(n+1)^T}\})\quad(i=\overline{1,N}).$$

Продиференціюємо ці рівняння за змінною $\tau$

$$\int_{-h}^{h}(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{P}+\vec{f}_0)\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3=\frac{\partial\hat{Q}_{10}^{(i)}}{\partial\tau},\quad(i=\overline{1,N}).\tag{10}$$

Зауважимо, що

$$(\vec{\nabla}_0\cdot\hat{P})\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}=(\vec{\nabla}_{012}\cdot\hat{P})\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}+(\vec{\nabla}_{03}\cdot\hat{P})\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}=$$

$$=\vec{\nabla}_{012}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})+\vec{\nabla}_{03}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})-\vec{\ni}_0^3\cdot\hat{P}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^3},$$

де

$$\vec{\nabla}_{03}=\vec{\ni}_0^3\frac{\partial}{\partial\xi^3}.$$

Тоді рівняння (10) набувають вигляду

$$\int_{-h}^{h}(\vec{\nabla}_{012}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})-\vec{\ni}_0^3\cdot\hat{P}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^3}+\vec{f}_0\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})d\xi^3+$$

$$+\int_{-h}^{h}\vec{\nabla}_{03}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})d\xi^3=\frac{\partial\hat{Q}_{10}^{(i)}}{\partial\tau},\quad(i=\overline{1,N}).\tag{11}$$

Другий інтеграл у лівій частині рівності (11) можна записати так:

$$\int_{-h}^{h}\vec{\nabla}_{03}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})d\xi^3=\vec{P}_3^{+}\otimes\hat{\Phi}_{+}^{(i-1)}-\vec{P}_3^{-}\otimes\hat{\Phi}_{-}^{(i-1)},\tag{12}$$

де $\vec{P}_3=\vec{\ni}_0^3\cdot\hat{P}$ – вектор напружень. Індексами " $\pm$ " позначено граничні значення відповідних величин при $\xi^3=\pm h$. Якщо на верхній і нижній основах пластини задається вектор напружень, то права частина (12) є відомою тензорною функцією валентності $i$.

Якщо використати одержані результати, то з (11) отримаємо таку систему тензорних диференціальних рівнянь:

$$\int\limits_{-h}^{h}\left[\vec{\nabla}_{012}\cdot(\hat{P}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)})-\vec{\ni}_0^{\,3}\cdot\hat{P}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^3}\right]d\xi^3+\hat{F}^{(i)}=\frac{\partial\hat{Q}_{10}^{(i)}}{\partial\tau}\quad(i=\overline{1,N}),\tag{13}$$

де $\hat{F}^{(i)}=\int\limits_{-h}^{h}\vec{f}_0\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3+\vec{P}_3^{+}\otimes\hat{\Phi}_{+}^{(i-1)}-\vec{P}_3^{-}\otimes\hat{\Phi}_{-}^{(i-1)}$.

Стосовно узагальнених сил цю систему можна записати таким чином:

$$\vec{\nabla}_{012}\cdot\hat{Q}_{21}^{(i+1)}-\vec{\ni}_0^{\,3}\cdot\hat{Q}_{22}^{(i+1)}+\hat{F}^{(i)}=\frac{\partial\hat{Q}_{10}^{(i)}}{\partial\tau}\quad(i=\overline{1,N}).$$

Одержану систему $N$ тензорних диференціальних рівнянь щодо $N$ тензорних функцій $\hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{120},\tau)$ будемо називати системою рівнянь руху пластини. Залежно від конкретизації функції стану $\tilde{L}_0$ вона може бути як лінійною, так і нелінійною. Запишемо рівняння руху пластини для випадку, коли за функцію $\tilde{L}_0$ приймаємо функцію

$$\tilde{L}_0=\int\limits_{-h}^{h}[K_0(\vec{v})-U_0(\hat{\mathcal{E}}^T)]d\xi^3,\tag{14}$$

де $K_0(\vec{v})=\dfrac{\rho_0\vec{v}^2}{2}$ – густина кінетичної енергії, $U_0(\hat{\mathcal{E}}^T)$ – густина потенціальної енергії деформації.

Формули (6) і (7) для такої функції

$$\hat{Q}_{10}^{(i)}=\int\limits_{-h}^{h}\rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3,\tag{15}$$

$$\hat{Q}_{21}^{(i+1)}=\int\limits_{-h}^{h}\frac{\partial U_0}{\partial\hat{\mathcal{E}}^T}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3,\quad\hat{Q}_{22}^{(i+1)}=\int\limits_{-h}^{h}\frac{\partial U_0}{\partial\hat{\mathcal{E}}^T}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^3}d\xi^3.\tag{16}$$

Якщо підставити вираз (15) для узагальнених сил $\hat{Q}_{10}^{(i)}$, а також зображення вектора переміщення у вигляді (4) в рівняння руху (13), то отримаємо

$$\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial\vec{P}_1}{\partial\xi^1}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}+\frac{\partial\vec{P}_2}{\partial\xi^2}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}-\vec{P}_3\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^3}\right]d\xi^3+\hat{F}^{(i)}=$$

$$=\rho_0\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial^2\hat{u}^{(n)\,T}}{\partial\tau^2}\overset{n-1}{\cdot}\int\limits_{-h}^{h}\hat{\Phi}^{(n-1)^T}\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}d\xi^3,\quad(i=\overline{1,N}),\tag{17}$$

де $\vec{P}_k = \vec{\ni}_k^0 \cdot \hat{P}$.

Для прикладу наведемо, як виглядають одержані результати в лінійній теорії пружності, для якої густину потенціальної енергії деформації $U_0$ задають квадратичною формою

$$U_0 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\mathcal{I}_1^2(\hat{\epsilon}_0) - 2\mu\mathcal{I}_2(\hat{\epsilon}_0),$$

де

$$\hat{\epsilon}_0 = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0)$$

– симетричний лінійний тензор деформації; $\lambda, \mu$ – сталі Ляме; $\mathcal{I}_1(\hat{\epsilon}_0)$, $\mathcal{I}_2(\hat{\epsilon}_0)$ – перший і другий алгебраїчні інваріанти тензора $\hat{\epsilon}_0$.

Тензор напружень Піоли-Кірхгофа в лінійній теорії пружності збігається з тензором напружень Коші і має вигляд

$$\hat{P} = \lambda\mathcal{I}_1(\hat{\epsilon}_0)\hat{I} + 2\mu\hat{\epsilon}_0.$$

За базис розвинення вектора переміщення $\vec{u}$ у формулі (4) виберемо базис $\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) = (\vec{R}_0)^{i-1}$.

Система рівнянь руху (17) тепер набуває вигляду

$$\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial\vec{P}_1}{\partial\xi^1} \otimes \vec{R}_0^{i-1} + \frac{\partial\vec{P}_2}{\partial\xi^2} \otimes \vec{R}_0^{i-1} - \vec{P}_3 \otimes \frac{\partial\vec{R}_0^{i-1}}{\partial\xi^3}\right]d\xi^3 + \hat{F}^{(i)} =$$

$$= \rho_0 \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial^2\hat{u}^{(n)}}{\partial\tau^2}^{T} \overset{n-1}{\cdot} \int\limits_{-h}^{h} \vec{R}_0^{n+i-2} d\xi^3, \quad (i = \overline{1, N}). \tag{18}$$

Розглянемо часткові випадки цієї системи. При $N = 1$ вона складається з одного векторного рівняння

$$\int\limits_{-h}^{h}\left[\frac{\partial\vec{P}_1}{\partial\xi^1} + \frac{\partial\vec{P}_2}{\partial\xi^2}\right]d\xi^3 + \vec{F}^{(1)} = \rho_0\frac{\partial^2\vec{u}^{(1)}}{\partial\tau^2}$$

або трьох скалярних рівнянь

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^1)^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^2)^2} + \frac{F_1}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2};$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^2)^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^1)^2} + \frac{F_2}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial\tau^2};$$

$$\mu\Delta u_3 + \frac{F_3}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2},$$

де

$$F_k = \int_{-h}^{h} f_k d\xi^3 + X_k^+ - X_k^-, \quad f_k = \vec{f}_0 \cdot \vec{\ni}_k^0, \quad X_k = \vec{P}_3 \cdot \vec{\ni}_k^0,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial\xi^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial\xi^2)^2}.$$

Для випадку $N = 2$ система рівнянь руху (18) складається з двох рівнянь: векторного і тензорного диференціального другої валентності

$$\int_{-h}^{h} \left[\frac{\partial\vec{P}_1}{\partial\xi^1} + \frac{\partial\vec{P}_2}{\partial\xi^2}\right] d\xi^3 + \vec{F}^{(1)} = \rho_0 \sum_{n=1}^{2} \frac{\partial^2 \hat{u}^{(n)}}{\partial\tau^2}^T \overset{n-1}{\cdot} \int_{-h}^{h} \vec{R}_0^{n-1} d\xi^3,$$

$$\int_{-h}^{h} \left[\frac{\partial\vec{P}_1}{\partial\xi^1} \otimes \vec{R}_0 + \frac{\partial\vec{P}_2}{\partial\xi^2} \otimes \vec{R}_0 - \vec{P}_3 \otimes \vec{\ni}_0^3\right] d\xi^3 + \hat{F}^{(2)} = \rho_0 \sum_{n=1}^{2} \frac{\partial^2 \hat{u}^{(n)}}{\partial\tau^2}^T \overset{n-1}{\cdot} \int_{-h}^{h} \vec{R}_0^{n} d\xi^3.$$

У компонентній формі така система виглядатиме так:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^1)^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^2)^2} + \lambda\frac{\partial u_{33}}{\partial\xi^1} + \frac{F_1}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2},$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^2)^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^1)^2} + \lambda\frac{\partial u_{33}}{\partial\xi^2} + \frac{F_2}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial\tau^2},$$

$$\mu[\frac{\partial u_{31}}{\partial\xi^1} + \frac{\partial u_{32}}{\partial\xi^2} + \Delta u_3] + \frac{F_3}{2h} = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2};$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_{31}}{(\partial\xi^1)^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_{32}}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_{31}}{(\partial\xi^2)^2} - \frac{3\mu}{h^2}(u_{31} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^1}) + F_{13} = \rho_0\frac{\partial^2 u_{31}}{\partial\tau^2},$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_{32}}{(\partial\xi^2)^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_{31}}{\partial\xi^1\partial\xi^2} + \mu\frac{\partial^2 u_{32}}{(\partial\xi^1)^2} - \frac{3\mu}{h^2}(u_{32} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^2}) + F_{23} = \rho_0\frac{\partial^2 u_{32}}{\partial\tau^2},$$

$$\mu\Delta u_{33} - \frac{3}{h^2}(\lambda+2\mu)u_{33} - \frac{3}{h^2}\lambda(\frac{\partial u_1}{\partial\xi^1} + \frac{\partial u_2}{\partial\xi^2}) + F_{33} = \rho_0\frac{\partial^2 u_{33}}{\partial\tau^2}.$$

Тут

$$F_{k3} = \frac{3}{2h^3}[\int_{-h}^{h} f_k \xi^3 d\xi^3 + X_k^+ h + X_k^- h].$$

Як частковий випадок, при

$$u_{33} = 0, \quad u_{31} = -\frac{\partial u_3}{\partial\xi^1}, \quad u_{32} = -\frac{\partial u_3}{\partial\xi^2},$$

отримуємо відому [4] класичну модель пластин (гіпотеза Кірхгофа-Лява), а при $u_{33} = 0$ уточнену модель, яка враховує деформації поперечного зсуву (гіпотеза Тимошенка). Тому зазначимо, що наближення $N = 2$ дає змогу точніше враховувати характеристики симетричної частини тензора напружень.

1. Бурак Я.Й., Доманський П.П. *Метод розкладу за тензорними функціями в теорії пружності циліндричних тіл* // Доп. НАН України. — 1995. — N8. — С.47–51.

2. Доманський П.П. *Математичні моделі нелінійної теорії пружності циліндричних тіл* // Препринт N16-95.— Львів, 1995.— 43 с.

3. Бурак Я.Й., Зозуляк Ю.Д. *Енергетичний підхід до побудови рівнянь пружних оболонок в узагальнених змінних* // Доп. НАН України. — 1995. — N6.— С.41–44.

4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – М.: Наука, 1992.— 336 с.

*Стаття надійшла до редколегії 14.06.96*

УДК 539.3

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВОГО РУХУ ПРУЖНИХ ТІЛ

І. Я. Вус , П. П. Доманський

**I. Ya. Vus, P. P. Domans'kyj. The mathematical model of a spatial motion of elastic bodies.** The approach and the method for a construction of mathematical models are proposed for solving space problems in the nonlinear dynamic elasticity theory of isotropic bodies. Establishing principal relationships is based on the energy balance equation for a whole elastic body. The transition vector is given by its decomposition with respect to the base of tensor functions of increasing valences which coefficients are tensor functions of the corresponding time-dependent valences. A system of motion equations and corresponding initial conditions for the decomposition coefficients are obtained. Partial cases of obtained systems of nonlinear equations concerning the bodies of Murnagan's material are considered.

Побудові математичних моделей, розробці та узагальненню методів розв'язування просторових крайових задач теорії пружності та термопружності для тіл скінченних розмірів присвячені монографії [1,2]. Тут наведено також достатньо повний бібліографічний матеріал досліджень у цій галузі.

Для багатьох питань нелінійної динамічної теорії пружності важливим моментом є знаходження наближеного розв'язку відповідних крайових задач. Зокрема, для побудови математичних моделей рівнянь стійкості руху (рівноваги) пружних тіл необхідно знати базовий (незбурений) розв'язок, стійкість якого досліджуємо. У літературі такий розв'язок, як звичайно, відшукують методами квазістатичної лінійної теорії пружності [3–5].

Ми пропонуємо математичну модель для розв'язування просторових задач нелінійної динамічної теорії пружності. Для наближеного формулювання задачі використовуємо розклад ключових функцій за базисом тензорів зростаючої валентності.

Розглянемо однорідне ізотропне пружне тіло $K$. Задамо деяку фіксовану $\gamma_0$–конфігурацію цього тіла, яку назвемо відліковою. Місце точки $k \in K$ у цій конфігурації будемо задавати радіус-вектором $\vec{r}_0$ — неперервною і достатну кількість разів диференційовною вектор–функцією $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, де $\{\xi^i\}$ — лагранжеві координати. Надалі за $\{\xi^i\}$ $(i = \overline{1,3})$ будемо приймати координати точки $k \in K$ у відліковій конфігурації в єдиній для всіх конфігурацій нерухомій у просторі прямокутній декартовій системі

$$\vec{r}_0 = \xi^1 \vec{\ni}_1^0 + \xi^2 \vec{\ni}_2^0 + \xi^3 \vec{\ni}_3^0 \equiv \xi^i \vec{\ni}_i^0.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73C50.

Область тіла і поверхню, що його обмежує, у відліковій конфігурації будемо позначати $X_0$ і $\partial X_0$ відповідно.

З моменту часу $\tau = \tau_0$, який приймаємо за початковий момент часу, на тіло починають діяти зовнішні поверхневі сили з вектором напружень $\vec{P}_{n_0}$ у розрахунку на одиницю площі поверхні $\partial X_0$ і об'ємні сили $\vec{f}_0$, які визначаються також в розрахунку на одиницю об'єму відлікової конфігурації $\gamma_0$. У результаті в деякий момент часу $\tau \geqslant \tau_0$ тіло займе в просторі конфігурацію $\gamma_\tau$, яку будемо називати актуальною. Положення точки $k \in K$ у момент часу $\tau$ визначаємо радіус–вектором $\vec{r} = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau) = \vec{r}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3) + \vec{u}(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau)$, де $\vec{u} = \vec{u}(\xi^1, \xi^2, \xi^3; \tau) \equiv \vec{u}(\vec{r}_0; \tau)$ — вектор переміщення з відлікової конфігурації в актуальну.

На основі рівняння балансу енергії, записаного для довільно вибраної підсистеми $K^* \subset K$ у момент часу $\tau$, у працях $[6, 7]$ виведено рівняння руху тіла в локальній формі, яке є узагальненням відомого в літературі $[8, 9]$ рівняння балансу імпульсу в нелінійній теорії пружності. Воно збігається з останнім у частковому випадку.

Для побудови математичної моделі просторового руху тіла використаємо з рівняння балансу енергії, записане для всього тіла $K$ у момент часу $\tau$

$$\frac{d}{d\tau} \int_{X_0} E_0 \, dV_0 = \int_{\partial X_0} \vec{P}_{n_0} \cdot \vec{v} \, d\Sigma_0 + \int_{X_0} \vec{f}_0 \cdot \vec{v} \, dV_0, \tag{1}$$

де $E_0$ — густина повної енергії; $\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}$ — вектор швидкості; $dV_0, d\Sigma_0$ — об'єм фізично малої області $\delta X_0 \subset X_0$ і площа елемента граничної поверхні $\delta\partial X_0 \subset \partial X_0$; "$\cdot$" — операція скалярного добутку.

Згідно з означенням тензора напружень Піоли–Кірхгофа $\widehat{P}$

$$\vec{P}_{n_0} = \vec{n}_0 \cdot \widehat{P},$$

де $\vec{n}_0$ — зовнішня нормаль у довільній точці $x_0 \in \partial X_0$. Якщо скористатися тепер формулою Гауса–Остроградського, то рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\int_{X_0} \left( \frac{\partial E_0}{\partial \tau} - \vec{\nabla}_0 \cdot (\widehat{P} \cdot \vec{v}) - \vec{f}_0 \cdot \vec{v} \right) dV_0 = 0. \tag{2}$$

Тут $\vec{\nabla}_0 = \vec{\ni}^{\,i}_0 \dfrac{\partial}{\partial \xi^i}$ — набла–оператор Гамільтона у відліковій конфігурації, $\{\vec{\ni}^{\,i}_0\}$ $(i = \overline{1,3})$ — векторний базис, який біортогональний до базису $\{\vec{\ni}^{\,0}_i\}$. Для декартових координат ці базиси збігаються, однак з метою збереження правила підсумовування за індексами, що повторюються зверху і знизу, зручно використовувати обидва.

Врахуємо, що

$$\vec{\nabla}_0 \cdot (\widehat{P} \cdot \vec{v}) = (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{P}) \cdot \vec{v} + \widehat{P} \cdot\cdot \frac{\partial (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{\,T})}{\partial \tau},$$

де "$\otimes$" — операція тензорного добутку, індексом "T" позначаємо транспонований тензор.

Тепер рівнянню (2) можна надати вигляду

$$\frac{\partial \widetilde{L}_0}{\partial \tau} = \int_{X_0} \left( \vec{\mathcal{P}}_0 \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} - \widehat{P} \cdot\cdot \frac{\partial (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^T)}{\partial \tau} \right) dV_0, \tag{3}$$

де

$$\widetilde{L}_0 = \int_{X_0} L_0 dV_0, \quad L_0 = \vec{\mathcal{P}}_0 \cdot \vec{v} - E_0, \quad \vec{\mathcal{P}}_0 = \vec{\mathcal{P}}_{0(0)} + \int_{\tau_0}^{\tau} (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{P} + f_0) d\eta$$

— вектор силового імпульсу; $\vec{\mathcal{P}}_{0(0)}$ — його початкове значення.

Подамо вектор переміщення $\vec{u}$ розкладом за заданим базисом тензорних функцій $\{\widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$ $\quad (i = \overline{1,N})$

$$\vec{u}(\vec{r}_0;\tau) = \sum_{i=1}^{N} \widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \widehat{u}^{(i)}(\tau). \tag{4}$$

Тут індекси $(i-1)$ та $(i)$ визначають валентність тензорних функцій, " $\overset{i}{\cdot}$ " означає $i$–кратний внутрішній добуток тензорів, $\vec{r}_0(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = \vec{r}_{30}(\xi_0^1,\xi_0^2,\xi_0^3) + \vec{R}_0(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = \xi_0^k \vec{\ni}_k^0 + (\xi^k - \xi_0^k)\vec{\ni}_k^0$, $(\xi_0^1,\xi_0^2,\xi_0^3)$ — координати фіксованої точки простору (зокрема, координати центра мас тіла $K$).

Якщо підставити (4) в рівняння (3), то отримаємо

$$\frac{\partial \widetilde{L}_0}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{N} \widehat{Q}_{10}^{(i)} \overset{i}{\cdot} \frac{\partial \widehat{v}^{(i)}}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^{N} \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} \frac{\partial \widehat{e}_k^{(i+1)}}{\partial \tau} \qquad (k = \overline{1,3}), \tag{5}$$

де

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{10}^{(i)} &= \int_{X_0} \vec{\mathcal{P}}_0 \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0, \qquad \widehat{v}^{(i)} = \frac{d\widehat{u}^{(i)}}{d\tau}, \\ \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} &= \int_{X_0} \widehat{P} \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k} dV_0, \qquad \widehat{e}_k^{(i+1)} = \widehat{u}^{(i)} \otimes \vec{\ni}_0^k. \end{aligned} \tag{6}$$

Співвідношенню (5) поставимо у відповідність диференціальну 1–форму

$$d\widetilde{L}_0 = \sum_{i=1}^{N} \widehat{Q}_{10}^{(i)} \overset{i}{\cdot} d\widehat{v}^{(i)} - \sum_{i=1}^{N} \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} \overset{i+1}{\cdot} d\widehat{e}_k^{(i+1)} \qquad (k = \overline{1,3}). \tag{7}$$

З потенціального опису механічної поведінки пружних систем можна зробити висновок, що для наближення (4) потенціалом (функцією стану) є функція $\widetilde{L}_0$, яка задана на $4N$–вимірному фазовому просторі тензорних параметрів

$$\{\widehat{v}^{(i)^T}\}, \quad \{\widehat{e}_k^{(i+1)^T}\} \qquad (k = \overline{1,3}; i = \overline{1,N}).$$

Будемо вважати, що параметри $\{\widehat{v}^{(i)^T}\}$, $\{\widehat{e}_k^{(i+1)^T}\}$ є незалежними параметрами стану. Тоді з (7) одержуємо такі визначальні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
\widehat{Q}_{10}^{(i)} &= \frac{\partial \widetilde{L}_0}{\partial \widehat{v}^{(i)^T}} \equiv \widehat{Q}_{10}^{(i)}(\{\widehat{v}^{(n)^T}\}, \{\widehat{e}_m^{(n+1)^T}\}), \\
\widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} &= -\frac{\partial \widetilde{L}_0}{\partial \widehat{e}_k^{(i+1)^T}} \equiv \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)}(\{\widehat{v}^{(n)^T}\}, \{\widehat{e}_m^{(n+1)^T}\}) \qquad (k, m = \overline{1,3}).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Наближений розв'язок (4) при заданому базисі розвинення (функції $\{\widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$) характеризується тензорними функціями $\widehat{u}^{(i)}(\tau)$. Для визначення рівнянь, з яких їх можна відшукати, прирівняємо вирази для узагальнених сил $\widehat{Q}_{10}^{(i)}$, що задаються формулами (6) і (8). У результаті одержимо

$$
\int_{X_0} \left[\vec{\mathcal{P}}_{0(0)} + \int_{\tau_0}^{\tau} (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{P} + \vec{f}_0) d\eta \right] \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0 = \widehat{Q}_{10}^{(i)}(\{\widehat{v}^{(n)^T}\}, \{\widehat{e}_m^{(n+1)^T}\}) \quad (i = \overline{1,N}). \tag{9}
$$

Продиференціюємо (9) за змінною $\tau$:

$$
\int_{X_0} (\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{P} + \vec{f}_0) \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0 = \frac{d\widehat{Q}_{10}^{(i)}}{d\tau}. \tag{10}
$$

Зауважимо, що

$$
(\vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{P}) \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} = \vec{\nabla}_0 \cdot (\widehat{P} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)}) - \vec{\ni}_0^k \cdot \widehat{P} \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k}. \tag{11}
$$

Якщо скористатися виразом (11) і формулою Гауса–Остроградського, то систему рівнянь (10) можна записати у вигляді

$$
\int_{\partial X_0} \vec{P}_{n_0} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} d\Sigma_0 + \int_{X_0} \vec{f}_0 \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0 - \int_{X_0} \vec{\ni}_0^k \cdot \widehat{P} \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k} dV_0 = \frac{d\widehat{Q}_{10}^{(i)}}{d\tau}.
$$

Оскільки базис $\{\vec{\ni}_0^k\}$ є декартовим, то, врахувавши позначення (6), отримаємо

$$
\frac{d\widehat{Q}_{10}^{(i)}}{d\tau} + \vec{\ni}_0^k \cdot \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} = \widehat{F}_0^{(i)} + \widehat{F}_1^{(i)}, \tag{12}
$$

де

$$
\widehat{F}_0^{(i)} = \int_{X_0} \vec{f}_0 \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0, \qquad \widehat{F}_1^{(i)} = \int_{\partial X_0} \vec{P}_{n_0} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} \, d\Sigma_0.
$$

Одержану систему $N$ тензорних звичайних диференціальних рівнянь (12) стосовно $N$ тензорних функцій $\widehat{u}^{(i)}(\tau)$ будемо називати системою рівнянь руху тіла. Залежно від конкретизації функції стану $L_0$, що відповідно диктується властивостями матеріалу тіла $K$ у заданому діапазоні зміни зовнішнього навантаження, вона може бути як лінійною, так і нелінійною.

Запишемо рівняння руху (12), якщо за $\widetilde{L}_0$ вибрати функцію

$$\widetilde{L}_0 = \int_{X_0} \left[ K_0(\vec{v}) - U_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) \right] dV_0,$$

де $U_0$ — густина потенціальної енергії деформації; $K_0 = \dfrac{\varrho_0 \vec{v}^2}{2}$ — густина кінетичної енергії; $\varrho_0$ — густина розподілу маси у відліковій конфігурації. Для такої функції стану визначальні рівняння (8) запишемо

$$\widehat{Q}_{10}^{(i)} = \int_{X_0} \varrho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} \, dV_0, \qquad \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} = \int_{X_0} \frac{dU_0}{d(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r})} \otimes \frac{\partial \widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^k} \, dV_0. \tag{13}$$

Якщо використати першу з формул (13), то систему (12) можна записати у вигляді

$$\int_{X_0} \varrho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0 + \vec{\ni}_0^k \cdot \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} = \widehat{F}_0^{(i)} + \widehat{F}_1^{(i)}. \tag{14}$$

Врахуємо, що

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} = \sum_{n=1}^{N} \widehat{\Phi}^{(n-1)} \overset{n-1}{\cdot} \frac{d^2 \widehat{u}^{(n)}}{d\tau^2} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{d^2 \widehat{u}^{(n)^T}}{d\tau^2} \overset{n-1}{\cdot} \widehat{\Phi}^{(n-1)^T} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)},$$

і введемо позначення

$$\widehat{M}^{(n+i-2)} = \int_{X_0} \widehat{\Phi}^{(n-1)^T} \otimes \widehat{\Phi}^{(i-1)} dV_0.$$

Тепер систему (14) можна записати ще так:

$$\varrho_0 \sum_{n=1}^{N} \frac{d^2 \widehat{u}^{(n)^T}}{d\tau^2} \overset{n-1}{\cdot} \widehat{M}^{(n+i-2)} + \vec{\ni}_0^k \cdot \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} = \widehat{F}_0^{(i)} + \widehat{F}_1^{(i)}. \tag{15}$$

Для розв'язування задачі про визначення пружно–деформованого стану тіла $K$ на основі отриманої системи рівнянь руху (15) стосовно тензорних функцій $\widehat{u}^{(n)}(\tau)$ $(n = \overline{1, N})$ її необхідно доповнити початковими умовами. Зауважимо, що граничні умови на поверхні $\partial X_0$ враховуються інтегрально доданками $\widehat{F}_1^{(i)}$ правої частини (15).

У механіці суцільного середовища за початкові умови в момент часу $\tau = \tau_0$ задають поле вектора переміщення $\vec{u}$ і поле вектора швидкості $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}$:

$$\vec{u}|_{\tau=\tau_0} = \vec{\varphi}(\vec{r}_0), \qquad \left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_0} = \vec{\psi}(\vec{r}_0).$$

Запишемо векторні функції векторного аргументу $\vec{\varphi}(\vec{r}_0)$ і $\vec{\psi}(\vec{r}_0)$ розвиненнями

$$\vec{\varphi}(\vec{r}_0) = \sum_{i=1}^{N} \widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \vec{\varphi}^{(i)}, \qquad \vec{\psi}(\vec{r}_0) = \sum_{i=1}^{N} \widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \vec{\psi}^{(i)}. \tag{16}$$

З (4) і (16) за умов єдиності цих розвинень одержуємо

$$\widehat{u}^{(i)}|_{\tau=\tau_0} = \widehat{\varphi}^{(i)}, \qquad \left.\frac{\partial \widehat{u}^{(i)}}{\partial \tau}\right|_{\tau=\tau_0} = \widehat{\psi}^{(i)} \qquad (i = \overline{1, N}).$$

Ці умови і будемо приймати за початкові для одержаної системи тензорних диференціальних рівнянь (15).

Для ілюстрації одержаних результатів побудуємо систему рівнянь руху тіла з матеріалу Мурнагана. Як відомо [8], густина потенціальної енергії деформації $U_0$ для нього задається у вигляді

$$U_0 = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\mathcal{I}_1^2(\widehat{C}) - 2\mu\mathcal{I}_2(\widehat{C}) + \frac{1}{3}(l + 2m)\mathcal{I}_1^3(\widehat{C}) - 2m\mathcal{I}_1(\widehat{C})\mathcal{I}_2(\widehat{C}) + n\mathcal{I}_3(\widehat{C}),$$

де $\widehat{C} = \widehat{\varepsilon}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0$ — тензор деформації Коші–Гріна; $\widehat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0)$ — тензор деформації лінійної теорії пружності; $\mathcal{I}_1(\widehat{C}), \mathcal{I}_2(\widehat{C}), \mathcal{I}_3(\widehat{C})$ — алгебричні інваріанти тензора $\widehat{C}$; $\lambda, \mu$ — сталі Ляме; $l, m, n$ — сталі Мурнагана.

Знайдемо тензор напружень Піоли–Кірхгофа:

$$\widehat{P} = \frac{dU_0}{d(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r})} = \left[(\lambda+2\mu)\mathcal{I}_1(\widehat{C}) + 2\mu + (l+2m)\mathcal{I}_1^2(\widehat{C}) - 2m(\mathcal{I}_2(\widehat{C}) - \mathcal{I}_1(\widehat{C})) + \frac{n}{4}\right]\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} -$$
$$- \left(\mu + \frac{n}{4} + m\mathcal{I}_1(\widehat{c})\right)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \cdot (\mathcal{I}_1(\widehat{G})\widehat{I} - \widehat{F}) + \frac{n}{4}\mathcal{I}_3(\widehat{G})\vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^{\,T}. \tag{17}$$

Тут $\widehat{G} = \widehat{I} + 2\widehat{C}$, $\quad \widehat{F} = \widehat{I} + 2(\widehat{\varepsilon}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\vec{u} \otimes \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u})$ — міри деформації Коші–Гріна і Фінгера відповідно; $\widehat{I}$ — одиничний тензор; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона в актуальній конфігурації.

У формулі (17) обмежимося збереженням доданків другого степеня стосовно похідних вектора переміщення. Одержимо

$$\widehat{P} = \widehat{T} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \widehat{T} + \mu\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + 2m\,\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\,\widehat{\varepsilon}(\vec{u}) + n(\,\widehat{\varepsilon}^2(\vec{u}) - \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\,\widehat{\varepsilon}(\vec{u})) +$$
$$+ \left[\frac{\lambda}{2}\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + l(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u})^2 + \left(\frac{n}{2} - m\right)((\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u})^2 - \widehat{\varepsilon}(\vec{u}) \cdot\cdot\, \widehat{\varepsilon}(\vec{u}))\right]\widehat{I}, \tag{18}$$

де $\widehat{T} = \lambda\mathcal{I}_1(\widehat{\varepsilon})\widehat{I} + 2\mu\widehat{\varepsilon}$ — тензор напружень Коші лінійної теорії пружності.

Якщо використати (4),(18) і другу формулу з (13), то отримаємо

$$\vec{\ni}_0^{\,k} \cdot \widehat{Q}_{2k}^{(i+1)} = \sum_{n=1}^{N} \widehat{u}^{(n)^T} \overset{n}{\cdot} \widehat{\mathcal{J}}^{(n+i)} + \sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \widehat{u}^{(j)^T} \otimes \widehat{u}^{(t)^T} \overset{j+t}{\cdot} \widehat{B}^{(t+j+i)}.$$

Тут

$$\mathcal{J}^{(n+i)}=\int_{X_0}\frac{\partial\widehat{\Phi}^{(n-1)^T}}{\partial\xi^m}\otimes\left[\lambda\vec{\exists}_0^m\otimes\vec{\exists}_0^k+\mu(\delta^{km}\widehat{I}+\vec{\exists}_0^k\otimes\vec{\exists}_0^m)\right]\otimes\frac{\partial\widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^k}\,dV_0,$$

$$\widehat{B}^{(t+j+i)}=\int_{X_0}\frac{\partial\widehat{\Phi}^{(t-1)^T}}{\partial\xi^s}\otimes\left\{\vec{\exists}_0^r\otimes\frac{\partial\widehat{\Phi}^{(j-1)^T}}{\partial\xi^p}\otimes\vec{\exists}_0^r\otimes\right.$$
$$\otimes\left[\frac{1}{2}\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\delta^{sp}\vec{\exists}_0^k+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta^{sk}\vec{\exists}_0^p\right]+$$
$$+\vec{\exists}_0^p\otimes\frac{\partial\widehat{\Phi}^{(j-1)^T}}{\partial\xi^p}\otimes\left[\frac{1}{2}\left(m-\frac{n}{2}\right)\vec{\exists}_0^s\otimes\vec{\exists}_0^k+\frac{n}{4}\vec{\exists}_0^k\otimes\vec{\exists}_0^s)\right]+$$
$$+\vec{\exists}_0^s\otimes\frac{\partial\widehat{\Phi}^{(j-1)^T}}{\partial\xi^p}\otimes\left[\left(l-m+\frac{n}{2}\right)\vec{\exists}_0^p\otimes\vec{\exists}_0^k+\left(m-\frac{n}{2}\right)\vec{\exists}_0^k\otimes\vec{\exists}_0^p)\right]+$$
$$\left.+\left[\left(\mu+\frac{n}{4}\right)(\delta^{sp}\vec{\exists}_0^k+\delta^{sk}\vec{\exists}_0^p)+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\delta^{pk}\vec{\exists}_0^s\right]\otimes\frac{\partial\widehat{\Phi}^{(j-1)^T}}{\partial\xi^p}\otimes\widehat{I}\right\}\otimes\frac{\partial\widehat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^k}\,dV_0;$$

$\delta^{km}$ — символи Кронекера.

Отже, для тіла з матеріалу Мурнагана система рівнянь руху (15) має вигляд

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\varrho_0\frac{d^2\widehat{u}^{(n)^T}}{d\tau^2}\overset{n-1}{\cdot}\widehat{M}^{(n+i-2)}+\widehat{u}^{(n)^T}\overset{n}{\cdot}\widehat{\mathcal{J}}^{(n+i)}\right)+$$
$$+\sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\widehat{u}^{(j)^T}\otimes\widehat{u}^{(t)^T}\overset{j+t}{\cdot}\widehat{B}^{(t+j+i)}=\widehat{F}_0^{(i)}+\widehat{F}_1^{(i)}\qquad(i=\overline{1,N}).\tag{19}$$

Розглянемо часткові випадки цієї системи. За базисом розвинення вектора переміщення $\vec{u}$ у формулі (4) виберемо запропонований у праці [7] базис $\widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)=\vec{R}_0^{i-1}$. При $N=1$ система (19) складається з одного диференціального рівняння

$$\varrho_0V_0\frac{d^2\widehat{u}^{(1)}}{d\tau^2}=\widehat{F}_0^{(1)}+\widehat{F}_1^{(1)}\tag{20}$$

для вектора $\widehat{u}^{(1)}(\tau)$. Тут $V_0$ — об'єм тіла у відліковій конфігурації.

При $N=2$ система (19) складається з двох диференціальних рівнянь

$$\varrho_0\left(V_0\frac{d^2\widehat{u}^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{d^2\widehat{u}^{(2)^T}}{d\tau^2}\cdot\widehat{S}^{(1)}\right)=\widehat{F}_0^{(1)}+\widehat{F}_1^{(1)},\tag{21}$$

$$\varrho_0\left(\frac{d^2\widehat{u}^{(1)}}{d\tau^2}\otimes\widehat{S}^{(1)}+\frac{d^2\widehat{u}^{(2)^T}}{d\tau^2}\cdot\widehat{S}^{(2)}\right)+V_0\widehat{u}^{(2)^T}\cdot\cdot\,{}^4\widehat{C}+V_0\widehat{u}^{(2)^T}\otimes\widehat{u}^{(2)^T}\overset{4}{\cdot}{}^6\widehat{C}=\widehat{F}_0^{(2)}+\widehat{F}_1^{(2)}$$

стосовно вектора $\widehat{u}^{(1)}(\tau)$ і тензора другого рангу $\widehat{u}^{(2)}(\tau)$. Тут

$$\widehat{S}^{(1)} = \int_{X_0} (\xi^k - \xi_0^k)\vec{\ni}_k^0 \, dV_0, \qquad \widehat{S}^{(2)} = \int_{X_0} (\xi^k - \xi_0^k)(\xi^n - \xi_0^n)\vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_n^0 \, dV_0$$

— вектор статичних моментів першого порядку і тензор моментів інерції відповідно;

$$^4\widehat{C} = \lambda^4\widehat{C}_1 + \mu(^4\widehat{C}_{11} + {}^4\widehat{C}_{111}), \qquad ^4\widehat{C}_1 = \widehat{I} \otimes \widehat{I},$$

$$^4\widehat{C}_{11} = \vec{\ni}_0^m \otimes \vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_m^0 \otimes \vec{\ni}_0^k, \qquad ^4\widehat{C}_{111} = \vec{\ni}_k^0 \otimes \widehat{I} \otimes \vec{\ni}_0^k$$

— ізотропні тензори четвертого рангу;

$$^6\widehat{C} = \frac{1}{2}(\lambda + m - \frac{n}{2})(^4\widehat{C}_{11} \otimes \widehat{I} + 2\widehat{I} \otimes {}^4\widehat{C}_{111}) + \frac{n}{4}\vec{\ni}_s^0 \otimes \widehat{I} \otimes \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^s \otimes \vec{\ni}_k^0 +$$
$$+\frac{1}{2}(m - \frac{n}{2})(^4\widehat{C}_{111} \otimes \widehat{I} + 2\widehat{I} \otimes {}^4\widehat{C}_{11}) + (l - m + \frac{n}{2})^4\widehat{C}_1 \otimes \widehat{I} +$$
$$+(\mu + \frac{n}{4})\left[\vec{\ni}_k^0 \otimes (^4\widehat{C}_{11} + {}^4\widehat{C}_1) \otimes \vec{\ni}_0^k + \vec{\ni}_s^0 \otimes \vec{\ni}_0^k \otimes \vec{\ni}_0^s \otimes \widehat{I} \otimes \vec{\ni}_k^0\right]$$

— ізотропний тензор шостого рангу.

Для наближення $N = 1$ напруження і деформації в тілі $K$ дорівнюють нулю. Усі його точки в цьому випадку будуть рухатися однаково. Закон такого руху є розв'язком рівняння (20) за відповідних початкових умов. Для наближення $N = 2$ напруження і деформації в кожній точці тіла є однаковими і залежать лише від часу. Закон руху в цьому випадку одержимо, коли розв'яжемо систему (21) за відповідних початкових умов і підставимо розв'язок у формулу (4) при $\widehat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) = \vec{R}_0^{i-1}$.

1. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечних размеров. — К.: Наукова думка, 1978. — 264 с.
2. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. — К.: Наукова думка, 1979. — 264 с.
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
4. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М.: Физматгиз, 1961. — 339 с.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
6. Бурак Я.Й.,Доманський П.П. *Метод розкладу за тензорними функціями в теорії пружності циліндричних тіл* // Доп. НАН України.— 1995. — N 8.—С.47–51.
7. Доманський П.П. *Математичні моделі нелінійної теорії пружності циліндричних тіл* // Препринт No. 16–95.— Львів, 1995.— 43 с.
8. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т.1. — М.: Наука, 1976. — 535 с.

*Стаття надійшла до редколегії 13.06.96*

УДК 539. 377

# ОПТИМІЗАЦІЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО НАПРУЖЕНО–ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

М. І. Бугрій

**M. I. BUGRIY. The optimization of force loading and heating processes of thick-walled thermoelastic shells.** The mathematical formulation and the method of solution of the spatial quasi-static problems of optimization of thermoelastic state of the thick-walled shells at their force loading is proposed. The energy functional of the shell elastic deformation is taken as the criterion of the optimization. An intensity of force loading and temperature are the governing functions in the optimization problem. This functions are subordinated to additional integral restrictions of the moment type. The problem of optimization is reduced to the solution of two boundary-value problems with respect to the displacement vector and the vector conjugate to it.

Ми розглянули математичне формулювання і пропонуємо методику розв'язування одного класу просторових задач оптимізації осьосиметричного напружено–деформованого стану вільних на краях товстостінних циліндричних оболонок сталої товщини, які перебувають під дією нормального осьосиметричного поверхневого силового навантаження на бокових поверхнях оболонки, підпорядкованого деяким додатковим інтегральним обмеженням моментного типу.

Розглянемо кругову ізотропну циліндричну оболонку сталої товщини $2h$, радіусом $R$, довжиною $2z_0$, віднесену до змішаної ортогональної криволінійної системи координат $(z, \varphi, \gamma)$, де координати $(z, \varphi)$ визначають положення точки серединної поверхні $(\Sigma_0)$ оболонки, причому $z$ — це відстань точки серединної поверхні вздовж твірної від центрального перерізу $z = 0$, $\varphi$ — кутова координата, $\gamma$ — нормальна координата по товщині оболонки, що відраховується від її серединної поверхні $\gamma = 0$.

Нехай вільна на краях $z = \pm z_0$ циліндрична оболонка перебуває під дією нормального осьосиметричного поверхневого силового навантаження

$$f(z,\gamma) = \begin{cases} f_{3\gamma}^{(+)}(z), \ (\gamma = h, \ -z_0 < z < z_0), \\ f_{3\gamma}^{(-)}(z), \ (\gamma = -h, \ -z_0 < z < z_0). \end{cases} \tag{1}$$

Тоді компоненти $u_z$, $u_\varphi$, $u_\gamma$ вектора переміщень $\vec{u}$ та відповідний напружено–деформований стан оболонки не залежать від кутової координати $\varphi$ і

$$u_\varphi(z,\gamma) \equiv 0. \tag{2}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73K40.

Врахувавши (2), запишемо вихідні співвідношення осесиметричної теорії пружності товстостінних циліндричних оболонок [1], у які входитимуть:
співвідношення Коші

$$e_{zz}(z,\gamma)=\frac{\partial u_z}{\partial z},\ e_{\varphi\varphi}(z,\gamma)=\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)},\ e_{\gamma\gamma}(z,\gamma)=\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma},$$
$$e_{z\gamma}(z,\gamma)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right),\ e_{z\varphi}(z,\gamma)\equiv 0,\ e_{\gamma\varphi}(z,\gamma)\equiv 0; \tag{3}$$

закон Гука в переміщеннях

$$\sigma^{(0)}_{zz}(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right],$$
$$\sigma^{(0)}_{\varphi\varphi}(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right],$$
$$\sigma^{(0)}_{\gamma\gamma}(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{u_\gamma}{(R+\gamma)}\right)\right],$$
$$\sigma^{(0)}_{\gamma z}(z,\gamma)=G\left(\frac{\partial u_z}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma}{\partial z}\right),\ \sigma^{(0)}_{\gamma\varphi}(z,\gamma)\equiv 0,\ \sigma^{(0)}_{z\varphi}(z,\gamma)\equiv 0; \tag{4}$$

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial\sigma^{(0)}_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial\sigma^{(0)}_{\gamma z}}{\partial\gamma}+\frac{\sigma^{(0)}_{\gamma z}}{(R+\gamma)}=0,\quad \frac{\partial\sigma^{(0)}_{\gamma z}}{\partial z}+\frac{\partial\sigma^{(0)}_{\gamma\gamma}}{\partial\gamma}+\frac{\sigma^{(0)}_{\gamma\gamma}-\sigma^{(0)}_{\varphi\varphi}}{(R+\gamma)}=0 \tag{5}$$

в області $(\Omega)=\{(z,\gamma):-z_0<z<z_0,\,-h<\gamma<h\}$, а також відповідні механічні граничні умови

$$\sigma^{(0)}_{zz}(\pm z_0,\gamma)=0,\quad \sigma^{(0)}_{\gamma z}(\pm z_0,\gamma)=0,\quad \sigma^{(0)}_{\gamma z}(z,\pm h)=0,\quad \sigma^{(0)}_{\gamma\gamma}(z,\pm h)=\pm f^{(\pm)}_{3\gamma}(z) \tag{6}$$

на межі $\gamma=\pm h$, $z=\pm z_0$ області $(\Omega)$.

Тут $G$ — модуль зсуву, $\nu$ — коефіцієнт Пуассона. Крім того, надалі будемо вважати, що гранична задача (5), (6) записана в переміщеннях з врахуванням умов (4).

Як відомо [1], розв'язок граничної задачі (5),(6) існує і він єдиний у класі гладких функцій, заданих в області $(\Omega)$. Про рівень напружено–деформованого стану оболонки, зумовленого зовнішнім силовим навантаженням (1), можна робити висновки за значеннями функціонала енергії пружної деформації [2]

$$W[u_z,u_\gamma]=\frac{\pi}{E}\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-z_0}^{z_0}\left[\sigma^2_{zz}+\sigma^2_{\varphi\varphi}+\sigma^2_{\gamma\gamma}-2\nu(\sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{\gamma\gamma}+\sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{zz})+\right.$$
$$\left.+2(1+\nu)\sigma^2_{\gamma z}\right](R+\gamma)\,dz\,d\gamma, \tag{7}$$

записаного в переміщеннях. Тут $E$ — модуль пружності, а напруження $\sigma_{zz}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\gamma\gamma}$, $\sigma_{z\gamma}$ виражені через переміщення за допомогою співвідношень (4).

Наведені вище співвідношення (3)–(6) є базовими для визначення напружено–деформованого стану оболонки при заданому зовнішньому поверхневому силовому навантаженні $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z)$. Надалі, формулюючи задачу оптимізації, вважатимемо, що ці функції є функціями керування напружено–деформованим станом оболонки.

За критерій оптимізації приймемо функціонал енергії пружної деформації оболонки (7), записаний у переміщеннях $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$.

Нехай функції керування напружено–деформованим станом оболонки задовольняють додаткові обмеження інтегрального типу

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(+)}(z) P_m\left(\frac{z}{z_0}\right)(R+h)\,dz = B_m^{(1)},\ (m=\overline{0,m_0}),$$

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} f_{3\gamma}^{(-)}(z) P_n\left(\frac{z}{z_0}\right)(R-h)\,dz = B_n^{(2)},\ (n=\overline{0,n_0}), \tag{8}$$

де $B_m^{(1)}$, $B_n^{(2)}$ — деякі задані параметри; $P_j(\cdot)$ — поліноми Лежандра.

Тепер задачу оптимізації напружено–деформованого стану оболонки сформулюємо так: серед функцій $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$, двічі неперервно диференційовних в області $(\Omega)$ і неперервно диференційовних на границі цієї області, знайти екстремалі функціонала (7), які задовольняють умови (5),(6),(8).

Сформульовану задачу на умовний екстремум розв'язуємо методом Лагранжа [3]. Ключові співвідношення задачі оптимізації щодо функцій шуканого розв'язку і множників Лагранжа у цьому випадку міститимуть рівняння (5) та рівняння

$$\frac{\partial\sigma_{zz}^*}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{\gamma z}^*}{\partial\gamma} + \frac{\sigma_{\gamma z}^*}{(R+\gamma)} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{\gamma z}^*}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_{\gamma\gamma}^*}{\partial\gamma} + \frac{\sigma_{\gamma\gamma}^* - \sigma_{\varphi\varphi}^*}{(R+\gamma)} = 0 \tag{9}$$

в області $(\Omega)$, граничні умови

$$\sigma_{zz}^{(0)}(\pm z_0,\gamma)=0, \quad \sigma_{\gamma z}^{(0)}(\pm z_0,\gamma)=0, \quad \sigma_{\gamma z}^{(0)}(z,\pm h)=0, \quad \sigma_{\gamma\gamma}^{(0)}(z,\pm h)=\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,\pm h), \tag{10}$$

$$\sigma_{zz}^*(\pm z_0,\gamma)=0,\ \ \sigma_{\gamma z}^*(\pm z_0,\gamma)=0,\ \ \sigma_{\gamma z}^*(z,\pm h)=0,$$

$$u_\gamma^*(z,h) + Z_m^{(1)*} P_m\left(\frac{z}{z_0}\right) = 0,\ \ (m=\overline{0,m_0}),$$

$$u_\gamma^*(z,-h) + Z_n^{(2)*} P_n\left(\frac{z}{z_0}\right) = 0,\ \ (n=\overline{0,n_0}) \tag{11}$$

на межі області $(\Omega)$, а також інтегральні умови

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} \sigma_{\gamma\gamma}^*(z,h) P_m\left(\frac{z}{z_0}\right) dz = \frac{B_m^{(1)}}{R+h},\ \ (m=\overline{0,m_0}),$$

$$\int\limits_{-z_0}^{z_0} \sigma_{\gamma\gamma}^*(z,-h) P_n\left(\frac{z}{z_0}\right) dz = \frac{B_n^{(2)}}{R-h},\ \ (n=\overline{0,n_0}). \tag{12}$$

У співвідношеннях (9) – (12) $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$, $Z_m^{(1)*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $Z_n^{(2)*}$, $(n=\overline{0,n_0})$ — модифіковані множники Лагранжа; індекси $m$, $n$, якщо вони повторюються, є індексами підсумування;

$$\sigma_{zz}^*(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_z^*}{\partial z}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{u_\gamma^*}{(R+\gamma)}\right)\right],$$
$$\sigma_{\varphi\varphi}^*(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{u_\gamma^*}{(R+\gamma)}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_z^*}{\partial z}\right)\right],$$
$$\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,\gamma)=G\left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial\gamma}+\frac{2\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial z}+\frac{u_\gamma^*}{(R+\gamma)}\right)\right],$$
$$\sigma_{\gamma z}^*(z,\gamma)=G\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial\gamma}+\frac{\partial u_\gamma^*}{\partial z}\right). \tag{13}$$

Отже, для відшукання розв'язку задачі оптимізації, яку розглядаємо, потрібно спочатку визначити функції $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$, які є розв'язком задачі (9), (11), (12) і використавши (13), знайти функцію $\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,\gamma)$. Після цього, розв'язавши граничну задачу (5),(10), визначити оптимальні переміщення $u_z(z,\gamma)$, $u_\gamma(z,\gamma)$, оптимальні напруження (4), а з граничних умов (6) — оптимальне силове навантаження $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z)$.

Водночас, врахувавши (4), (13), бачимо, що функції $\sigma_{zz}^*(z,\gamma)$, $\sigma_{\varphi\varphi}^*(z,\gamma)$, $\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,\gamma)$, $\sigma_{\gamma z}^*(z,\gamma)$, які є розв'язком задачі (9),(11), будуть задовольняти і граничну задачу (5),(10). Оскільки розв'язок задачі (5), (10) єдиний у класі гладких функцій, то розв'язок задачі оптимізації, яку розглядаємо, можна записати у вигляді

$$u_z(z,\gamma)\equiv u_z^*(z,\gamma),\;\; u_\gamma(z,\gamma)\equiv u_\gamma^*(z,\gamma); \tag{14}$$

$$\sigma_{zz}(z,\gamma)\equiv\sigma_{zz}^*(z,\gamma),\;\; \sigma_{\varphi\varphi}(z,\gamma)\equiv\sigma_{\varphi\varphi}^*(z,\gamma),$$
$$\sigma_{\gamma\gamma}(z,\gamma)\equiv\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,\gamma),\;\; \sigma_{\gamma z}(z,\gamma)\equiv\sigma_{\gamma z}^*(z,\gamma); \tag{15}$$

$$f_{3\gamma}^{(+)}(z)\equiv\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,h),\;\; f_{3\gamma}^{(-)}(z)\equiv\sigma_{\gamma\gamma}^*(z,-h). \tag{16}$$

Отже, для побудови розв'язку задачі оптимізації досить розв'язати задачу (9), (11), (12) на множники Лагранжа $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$,$Z_m^{(1)*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $Z_n^{(2)*}$, $(n=\overline{0,n_0})$ і використати формули (14) – (16).

Структура граничної задачі (9),(11) дає змогу побудувати її параметричні розв'язки в замкненій формі. У цьому випадку розв'язок системи рівнянь (9) щодо функцій $u_z^*(z,\gamma)$, $u_\gamma^*(z,\gamma)$ будемо шукати у вигляді

$$u_z^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i\,!}u_z^{*(0)}(\xi)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\varphi_{1,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)\,!},$$
$$u_\gamma^*(z,\gamma)=\int\limits_{-z_0}^{z}\frac{(z-\xi)^i}{i\,!}u_\gamma^{*(0)}(\gamma)\,d\xi+\sum_{j=0}^{i}\varphi_{3,j+1}(\gamma)\frac{(z+z_0)^{i-j}}{(i-j)\,!}. \tag{17}$$

Тут $\varphi_{1,s}(\gamma)$, $\varphi_{3,s}(\gamma)$, $(s=\overline{1,i+1})$ — невідомі функції;

$$u_z^{*(0)}(z)=C_3^*-\frac{2b_5z}{b_4}C_1^*,\qquad u_\gamma^{*(0)}(\gamma)=(R+\gamma)C_1^*+\frac{C_2^*}{(R+\gamma)},\tag{18}$$

де $b_4=\dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $b_5=\dfrac{2\nu}{1-2\nu}$; $C_1^*$, $C_2^*$, $C_3^*$ — довільні сталі; $i=max\{m_0,n_0\}-1$, а $m_0$, $n_0$ надають кількість інтегральних обмежень (8) у задачі оптимізації.

Підставляючи функції (17) в рівняння (9), можна отримати систему звичайних диференціальних рівнянь щодо функцій $\varphi_{1,s}(\gamma)$, $\varphi_{3,s}(\gamma)$, $(s=\overline{1,i+1})$. Набір довільних сталих, а також сукупність множників Лагранжа $Z_m^{(1)*}$, $(m=\overline{0,m_0})$, $Z_n^{(2)*}$, $(n=\overline{0,n_0})$ дають змогу задовольнити граничні умови (11) та інтегральні умови (12) на поверхні оболонки.

Запишемо загальний вигляд розв'язку задачі (9), (11), (12), наприклад, при $m_0=n_0=1$. Для цього випадку на основі (17), (18) маємо, що

$$u_z^*(z,\gamma)=(z+z_0)C_3^*-\frac{b_5}{b_4}(z^2-z_0^2)C_1^*+\varphi_{11}(\gamma),$$

$$u_\gamma^*(z,\gamma)=(z+z_0)\left[(R+\gamma)C_1^*+\frac{C_2^*}{R+\gamma}\right]+\varphi_{31}(\gamma).\tag{19}$$

Підставляючи функції (19) в рівняння системи (9) та використавши попередньо співвідношення (13), отримаємо, що рівняння (9) будуть задовольнятися, якщо функції $\varphi_{11}(\gamma)$, $\varphi_{31}(\gamma)$ будуть розв'язками системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\varphi_{11}''+\frac{\varphi_{11}'}{R+\gamma}+2C_1^*=0,\qquad \varphi_{31}''+\frac{\varphi_{31}'}{R+\gamma}-\frac{\varphi_{31}}{(R+\gamma)^2}=0.\tag{20}$$

Загальний розв'язок системи (20) має вигляд

$$\varphi_{11}(\gamma)=C_4^*\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)-\frac{(R+\gamma)^2}{2}C_1^*+C_5^*,\quad \varphi_{31}(\gamma)=(R+\gamma)C_6^*+\frac{C_7^*}{R+\gamma},\tag{21}$$

де $C_1^*$, $C_4^*$, ... ,$C_7^*$ — довільні сталі.

Підставивши (21) в (19), отримуємо

$$u_z^*(z,\gamma)=-C_1^*\left[\frac{b_5}{b_4}(z^2-z_0^2)+\frac{(R+\gamma)^2}{2}\right]+C_3^*(z+z_0)+C_4^*\ln\left(1+\frac{\gamma}{R}\right)+C_5^*,$$
$$u_\gamma^*(z,\gamma)=(z+z_0)\left[(R+\gamma)C_1^*+\frac{C_2^*}{R+\gamma}\right]+(R+\gamma)C_6^*+\frac{C_7^*}{R+\gamma}.\tag{22}$$

Використовуючи (13), на основі (22)

$$\sigma^*_{zz}(z,\gamma) = G\left[b_4 C^*_3 + 2b_5(C^*_6 + z_0 C^*_1)\right],$$
$$\sigma^*_{\varphi\varphi}(z,\gamma) = G\left\{C^*_1\left[(b_4+b_5)(z+z_0) - \frac{2b_5^2}{b_4}z\right] + C^*_2\frac{(b_4-b_5)(z+z_0)}{(R+\gamma)^2} + \right.$$
$$\left. + b_5C^*_3 + (b_4+b_5)C^*_6 + \frac{b_4-b_5}{(R+\gamma)^2}C^*_7\right\},$$
$$\sigma^*_{\gamma\gamma}(z,\gamma) = G\left\{C^*_1\left[(b_4+b_5)(z+z_0) - \frac{2b_5^2}{b_4}z\right] - C^*_2\frac{(b_4-b_5)(z+z_0)}{(R+\gamma)^2} + \right.$$
$$\left. + b_5C^*_3 + (b_4+b_5)C^*_6 - \frac{b_4-b_5}{(R+\gamma)^2}C^*_7\right\},$$
$$\sigma^*_{\gamma z}(z,\gamma) = G\,\frac{C^*_2 + C^*_4}{R+\gamma}. \qquad (23)$$

Отже, розв'язок системи (9) має вигляд (23). Довільні сталі $C^*_i$, $(i=\overline{1,7})$ і множники Лагранжа $Z^{(1)*}_m$, $(m=0,1)$, $Z^{(2)*}_n$, $(n=0,1)$ однозначно визначаються з граничних (11) та інтегральних умов (12).

У цьому випадку

$$C^*_1 = \frac{1}{4Rhz_0}\left[(R-h)Z^{(2)*}_1 - (R+h)Z^{(1)*}_1\right],$$
$$C^*_2 = \frac{R^2-h^2}{4Rhz_0}\left[(R-h)Z^{(1)*}_1 - (R+h)Z^{(2)*}_1\right],$$
$$C^*_3 = \frac{b_5}{2b_4Rh}\left[(R+h)Z^{(1)*}_0 - (R-h)Z^{(2)*}_0\right],\ \ C^*_4 = -C^*_2,\ \ C^*_5 = 0,$$
$$C^*_6 = \frac{R+h}{4Rh}\left(Z^{(1)*}_1 - Z^{(1)*}_0\right) - \frac{R-h}{4Rh}\left(Z^{(2)*}_1 - Z^{(2)*}_0\right),$$
$$C^*_7 = \frac{R^2-h^2}{4Rh}\left[(R+h)\left(Z^{(2)*}_1 - Z^{(2)*}_0\right) - (R-h)\left(Z^{(1)*}_1 - Z^{(1)*}_0\right)\right],$$
$$Z^{(1)*}_j = (2j+1)\left(A_1B^{(1)}_j - A_3B^{(2)}_j\right),$$
$$Z^{(2)*}_j = (2j+1)\left(A_3B^{(1)}_j - A_2B^{(2)}_j\right),\ \ (j=0,1),$$

де

$$A_i = \frac{(b_4+b_5)(R^2+h^2) + (-1)^i 2b_5Rh}{4Rh(b_5-b_4)(2b_5+b_4)z_0G},\ \ (i=1,2),$$
$$A_3 = \frac{(b_5+b_4)(R^2-h^2)}{4Rh(b_5-b_4)(2b_5+b_4)z_0G}.$$

Використовуючи тепер співвідношення (14) – (16), отримуємо розв'язок сформульованої задачі оптимізації для випадку, коли на поверхневе силове навантаження задається по дві інтегральні умови (8). Зокрема, інтенсивність оптимального поверхневого силового навантаження виражається формулою

$$f_{3\gamma}^{(\pm)}(z) = G\left\{C_1^*\left[(b_4+b_5)(z+z_0) - \frac{2b_5^2}{b_4}z\right] - C_2^*\frac{(b_4-b_5)(z+z_0)}{(R\pm h)^2} + \right.$$
$$\left. + b_5C_3^* + (b_4+b_5)C_6^* - \frac{b_4-b_5}{(R\pm h)^2}C_7^*\right\}.$$

Зауважимо, що у випадку квазістатичного формулювання розглянутої вище задачі оптимізації осесиметричного напружено–деформованого стану циліндричних оболонок зберігається загальна структура її розв'язку у вигляді (14) – (16), але він параметрично залежатиме від часу $\tau$, оскільки характеристики $B_m^{(1)}$, $(m=0,1)$, $B_n^{(2)}$, $(n=0,1)$ інтегральних умов (8) будуть функціями часу. Цей факт можна використати, зокрема, для забезпечення заданих технологічних режимів силового навантаження оболонки. Справді, якщо, наприклад, $f_{3\gamma}^{(\pm)*}(z,\tau)$ — технологічно задана інтенсивність поверхневого силового навантаження оболонки, а $f_{3\gamma}^{(\pm)}(z,\tau)$ — знайдена у вигляді (16) під час розв'язування задачі оптимізації, причому ця функція буде виражена через параметри $B_m^{(1)}(\tau)$, $B_n^{(2)}(\tau)$, то оптимізуючи, зокрема, по цих параметрах функціонал середньоквадратичного відхилення

$$K[B_m^{(1)}, B_n^{(2)}] = \int\limits_{-z_0}^{z_0}\int\limits_0^{\tau_0}\left(f_{3\gamma}^{(\pm)*} - f_{3\gamma}^{(\pm)}\right)^2 d\tau\, dz,$$

можна підібрати функції $B_m^{(1)}(\tau)$, $B_n^{(2)}(\tau)$ так, щоб максимально забезпечити технологічну інтенсивність $f_{3\gamma}^{(\pm)*}(z,\tau)$ силового навантаження на поверхнях оболонки.

На закінчення зазначимо, що запропоновану вище методику побудови розв'язків осьосиметричних задач оптимізації напружено–деформованого стану циліндричних оболонок можна поширити і на неосьосиметричні задачі оптимізації в такому ж формулюванні як для циліндричних, так і для інших типів оболонок обертання сталої товщини. Під час побудови розв'язків таких задач у запропонованій вище формі необхідно буде спочатку розвинути шукані функції в тригонометричні ряди Фур'є щодо кутової координати $\varphi$ і отримати послідовність розглянутих вище двовимірних за просторовими координатами задач оптимізації.

1. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек.— К.: Наукова думка, 1978.— 320 с.
2. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин.— К.: Наукова думка, 1979.— 364 с.
3. Буслаев В.С. Вариационное исчисление.— Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1980.— 285 с.

*Стаття надійшла до редколегії 12.06.96*

УДК 517.95

**Онышкевич Г. М.** Устойчивость по Ляпунову уравнения типа колебания пластинки с разрывными коэффициентами // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.5–16.

В работе рассмотрена смешанная задача для уравнения типа колебания пластинки с разрывными коэффициентами, которое вырождается на части границы. Получены условия существования и единственности обобщенного решения указаной задачи, а также условия устойчивости по Ляпунову нулевого решения.
Библиогр. 6 назв.

УДК 517.946

**Бабак П. П.** Асимптотическое поведение решений разнокомпонентных систем с малым параметром // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.17–25.

Рассмотрена разнокомпонентная система, содержащая систему параболического типа с начальными и краевыми условиями и систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями. Изучается поведение решений при $\varepsilon \to 0$ для трёх сингулярно возмущённых задач: (i) с малым параметром при еллиптическом операторе; (ii) с малым параметром при временной производной; (iii) с малым параметром при еллиптическом операторе и при временной производной.
Библиогр. 10 назв.

УДК 517.95

**Бокало Н. М.** Априорная оценка решения и теорема типа Фрагмена–Линделёфа для некоторых квазилинейных параболических систем в неограниченных областях // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.26–35.

Исследуется задача Фурье для некоторых квазилинейных параболических систем второго порядка в неограниченных по пространственным переменным областях. Получены априорные оценки как локального так и глобального типов обобщённых решений этой задачи. Для рассматриваемых решений из этих оценок, в частности, следует теорема типа Фрагмена–Линделёфа.
Библиогр. 7 назв.

УДК 539.3:538.54

**Гачкевич А. Р., Дзюбачик О. Н., Солодяк М. Т.** Температурные поля и напряжения в магнитомягких телах при сквозном индукционном нагреве // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.36–44.

Предложено расчетную модель определения электромагнитного, температурного и механических полей в магнитомягких ферромагнитных телах, находящихся под воздействием внешнего гармонического поля промышленной частоты. Решение нелинейной задачи ищется в виде ряда по параметру, обратному глубине проникновения электромагнитного поля. Проведен анализ численных исследований для технически чистого железа.
Библиогр. 16 назв.

УДК 517.95

**Сикорский В. М.** Задача Фурье со смешанным граничным условием для систем квазилинейных параболических уравнений // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.45–56.

Изучен вопрос существования и единственности обобщённого решения из пространства $W^{1,0}_{\text{loc}}$ задачи Фурье для систем квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях в случае, когда различные граничные условия задаются на разных частях границы области. Доказана теорема типа принципа Сен-Венана для задач такого типа, которая описывает поведение решения на бесконечности. Найден класс единственности решения, который является пространством функций экспоненциального роста. Существование обобщенного решения в классе единственности доказано в случае, когда правые части системы экспоненциально возростают на бесконечности.
Библиогр. 12 назв.

УДК 519.95

**Козицкий В. А.** Прямые и обратные задачи для псевдопараболического уравнения в моделях фильтрации жидкости в капилярно-пористых средах // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.57–70.

В области $Q_T = \{(x,t) : x \in (0,H),\, t \in (0,T]\}$ рассматривается уравнение $u_{xxt} - k(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + c(x,t)u_{xt} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = F(x,t)$, где $k_t, c_t, \eta, a, b, F \in C(\bar{Q}_T)$. С помощю построенного ре-

шения характеристической задачи для данного уравнения доказывается однозначная разрешимость локальных и нелокальных задач для этого уравнения. Получены достаточные условия однозначной разрешимости нелокальных задач в терминах коэффициентов граничных условий. Рассматриваются обратные краевые задачи определения источника зависимого от $t$ или от $x$. Доказаны глобальные теоремы существования и единственности решения этих задач.
Библиогр. 11 назв.

УДК 517.95

**Колинько М. Е., Лавренюк С. П.** Единственность решения задачи Фурье для одной нелинейной псевдопараболической системы // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.71–77.

В работе получены некоторые достаточные условия единственности обобщенного решения задачи без начальных условий для одной нелинейной псевдопараболической системы, не зависяшие от поведения решения, когда время стремится к минус бесконечности. Рассмотрен случай однородных краевых условий Дирихле и ограниченной области по пространственным переменным.
Библиогр. 15 назв.

УДК 517.946

**Клюс И. С., Пташник Б. И.** Трёхточечная задача для волнового уравнения // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.78–85.

Исследована классическая корректность задачи о нахождении решения однородного уравнения колебания струны по трём её фотографиям. Установлены условия существования и единственности решения, которые носят теоретико–числовой характер. Исследование задачи связано с проблемой малых знаменателей, при оценке которых снизу используется метрический подход.
Библиогр. 11 назв.

УДК 517.95

**Олискевич М. О.** Поведение решений многоточечной задачи для гиперболического уравнения при больших значениях времени // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.86–95.

Рассматривается многоточечная смешаная задача для гиперболического уравнения. С помощью функции Грина вспомогательной задачи получены условия устойчивости по Ляпунову решений исходного уравнения.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.95

**Ковальчук С. Н.** Определение коэффициента температуропроводности прямоугольной пластины // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.96–103.

Рассматриваются обратные задачи в прямоугольнике с интегральными условиями переопределения. Неизвестный коэффициент температуропроводности зависит только от времени. Устанавливаются условия существования и единственности решений этих задач.
Библиогр. 3 назв.

УДК 517.956

**Берегова Г.И.** Гиперболическая задача Стефана с нелокальными граничными условиями // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.104–112.

Рассматривается задача с неизвестной границей для общей гиперболической системы уравнений второго порядка с нелокальными граничными условиями. Доказана теорема корректной разрешимости задачи для малых $t$.
Библиогр. 3 назв.

УДК 517.927.25+512.928.5

**Головатый Ю. Д.** Умеренно сингулярные семейства компактных операторов в задачах теории сильно неоднородных сред // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.113–123.

Изучены некоторые сингулярно возмущенные задачи на собственные значения, связанные с исследованием сильно неоднородных колебательных систем. Предложена классификация семейств компактных операторов $\{B_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, возникающих в задачах такого типа. Для так называемых умеренно сингулярных семейств приведена общая схема построения и обоснования главных членов асимптотики при $\varepsilon \to 0$ собственных элементов операторов $B_\varepsilon$, рассмотрены примеры.
Библиогр. 11 назв.

УДК 517.927.25+512.928.5

**Грабчак Г.Е.** Спектральная задача Неймана для системы уравнений линейной теории упругости с сингулярно возмущенной плотностью // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.124–139.

В ограниченной в $\mathbb{R}^3$ области с гладкой границей рассматривается задача на собственные значения для системы уравнений теории упругости с постоянными коэффициентами, граничными условиями Неймана и сингулярно возмущенной плотностью в окрестности некоторой внутренней точки области. Изучено асимптотическое поведение при $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon$ – характерный размер области возмущения плотности) собственных элементов задачи. Найдены главные члены асимптотических разложений собственных значений и собственных векторов, получены оценки остаточных членов этих разложений.
Библиогр. 17 назв.

УДК 517.944.1

**Вус А. Я.** Интегрируемые системы взаимодействующих частиц на прямой // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.140–145.

Рассматриваются гамильтоновы системы взаимодействующих частиц с дополнительным первым интегралом, полиномиальным по импульсам. Получены свойства потенциалов взаимодействия при условии их аналитичности. Для случая интеграла с постоянными коэффициентами при старших по импульсам слагаемых получен явный вид интегрируемых потенциалов. Эти результаты обобщаются на случай попарно различных потенциалов взаимодействия.
Библиогр. 4 назв.

УДК 539.3

**Благута Г. И., Бурак Я. И.** Метод разложения по тензорных функциях в нелинейной теории пластин // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.146–153.

Предложено подход и методику построения динамических математических моделей нелинейной теории упругих пластин. При этом используется представление вектора перемещения разложением по заданному базису тензорных функций возростающей валентности. Коэффициенты этого разложения — тензорные функции соответствующей валентности. Для них выведено систему уравнений движения. Рассмотрено частные случаи полученной системы для линейно упругих пластин.
Библиогр. 4 назв.

УДК 539.3

**Вус И. Я., Доманский П. П.** Математическая модель пространственного движения упругих тел // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.154–161.

Предложено подход и методику построения математических моделей для решения пространственных задач нелинейной динамической теории упругости изотропных тел. При установлении определяющих соотношений за исходное принимается уравнение баланса энергии для всего упругого тела. Вектор перемещения подается разложением по заданному базису тензорных функций возрастающей валентности, коэффициенты которого являются тензорными функциями соответствующей валентности, зависящие от времени. Для коэффициентов разложения выведены система уравнений движения и соответствующие начальные условия. Рассмотрены частные случаи полученных систем нелинейных уравнений для тела из материала Мурнагана.
Библиогр. 9 назв.

УДК 539.377

**Бугрий Н. И.** Оптимизация схем силового нагружения и нагрева толстостенных термоупругих оболочек // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем.—Вып.45.—С.162–168.

Формулируется математическая постановка и предлагается методика решения пространственных квазистатических задач оптимизации термоупругого состояния толстостенных оболочек при их силовом нагружении и нагреве. В качестве критерия оптимизации принимается функционал энергии упругой деформации оболочки, а функций управления — интенсивность силовой нагрузки и температура. Функции управления удовлетворяют дополнительным интегральным ограничениям моментного типа. Задача оптимизации сведена к решению двух краевых задач относительно вектора перемещений и сопряженного к нему вектора.
Библиогр. 3 назв.

EDUCATION MINISTRY OF UKRAINE

**VISNYK LVIVSKOHO UNIVERSYTETU**

**(HERALD OF LVIV UNIVERSITY)**

*Mathematics and Mechanics*

*Issue from 1965*

**Volume 45**

# PROBLEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL MODELLING

LVIV, 1996