

Копитко М.Ф., Савула Я.Г.

Алгоритмічний підхід до дослідження задач пружного деформування оболонок

При чисельному дослідженні задач механіки деформування просторових тіл, один з характерних вимірів яких є значно менший від інших, у тривимірній постановці виникають значні труднощі. Підхід, який пов'язаний з використанням різних теорій оболонок, є обмежений геометричними формами середовищ та прийнятими гіпотезами стосовно шуканих функцій.

У зв'язку з цим у даній роботі пропонується підхід до дослідження задач механіки деформування оболонкових тіл, який має такі характерні особливості:

- використовуються тривимірні рівняння теорії пружності в криволінійній системі координат;
- розв'язки відповідної задачі будуються напіваналітичним методом скінченних елементів шляхом використання подання шуканих функцій за однією змінною у вигляді сум за поліномами Лежандра.

Використання напіваналітичного методу скінченних елементів має давню історію [2,3,4,6], але, в основному, він застосовувався при розв'язуванні неосесиметричних задач для тіл обертання, оболонок нульової гаусової кривини і в ролі базисних функцій вибирались тригонометричні функції. В останні роки опубліковано роботи І.Бабушки, наприклад [8], в яких запропонована і розвивається h -р версія методу скінченних елементів. Відмінність запропонованого авторами підходу від попереднього полягає в поданні шуканих функцій у вигляді ряду за поліномами Лежандра не в локальних вузлах скінченного елемента, а в кожному вузлі скінченноелементної сітки.

Розглянемо задачу деформування просторових тіл, геометрію яких можна описати в криволінійній системі координат, побудованій таким способом. Нехай

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega \quad (1)$$

векторне рівняння деякої поверхні в просторі, віднесеної до ліній головних кривин. У кожній точці поверхні введемо ортогональний трієдр

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{A_1} \bar{r}_{\alpha_1}, \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{A_2} \bar{r}_{\alpha_2}, \quad \bar{e}_n = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2, \quad (2)$$

де $\bar{r}_{\alpha_1} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_1}$, $\bar{r}_{\alpha_2} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha_2}$; $A_1 = \sqrt{\bar{r}_{\alpha_1} \bar{r}_{\alpha_1}}$, $A_2 = \sqrt{\bar{r}_{\alpha_2} \bar{r}_{\alpha_2}}$ – коефіцієнти

Ляме поверхні (1).

Радіус-вектор довільної точки тіла подамо у вигляді

$$\bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \bar{n}(\alpha_1, \alpha_2) \alpha_3, \quad (3)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, \quad h^-(\alpha_1, \alpha_2) \leq \alpha_3 \leq h^+(\alpha_1, \alpha_2),$$

де $\bar{n}$ – нормаль до поверхні (1).

Введемо вектори, елементи яких складаються з переміщень довільної точки тіла та компонентів тензора деформації Коші і тензора напружень :

$$\begin{aligned} u &= [u_1, u_2, u_3]^T, \\ \varepsilon &= [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}]^T, \\ \sigma &= [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]^T. \end{aligned} \quad (4)$$

Зв'язок між вектором переміщень u і вектором деформацій ε у вибраній нами ортогональній системі координат запишеться у вигляді

$$\varepsilon = D_A u, \quad (5)$$

де

$$D_A = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & 0 & \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \\ \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \\ 0 & -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} & \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\ -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} & 0 & \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \\ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

У формулі (6) через H_i позначені коефіцієнти Ляме, які для введеної системи координат мають вигляд

$$H_1 = A_1(1 + k_1 \alpha_3), \quad H_2 = A_2(1 + k_2 \alpha_3), \quad H_3 = 1, \quad (7)$$

де $k_1(\alpha_1, \alpha_2), k_2(\alpha_1, \alpha_2)$ – головні кривизни поверхні (1).

Подано фізичний закон, який зв'язує напруження з деформаціями співвідношенням

$$\sigma = C \varepsilon. \quad (8)$$

У даній роботі він вибирається для матеріалу з однією площинною симетрією. У цьому випадку матриця C у формулі (8) складається з 13 незалежних компонентів.

Розглянемо задачі статичної лінійної теорії пружності, які в варіаційній постановці зводяться до мінімізації функціоналу Лагранжа

$$F(u) = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma^T \varepsilon dV - \iint_{S_t} \sigma_n u dS - \iint_{S^+} \sigma_n u dS - \iint_{S^-} \sigma_n u dS, \quad (9)$$

на множині функцій $u \in W_2^{(1)}(u)$, які задовільняють головні граничні умови

$$u = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in S_t. \quad (10)$$

У формулі (9) V -область, яку займає тіло, S_t – бокова поверхня, $S^\pm$ – лицьові поверхні, $\sigma_n = [\sigma_{1n}, \sigma_{2n}, \sigma_{3n}]$ – вектор заданих поверхневих навантажень.

Замінюючи в формулі (9) інтегрування за об'ємом, інтегруванням по поверхні і записуючи інтеграл по поверхні через інтеграл по області, отримаємо новий вигляд функціоналу

$$\begin{aligned} F(u) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \int_{h^-(\alpha_1, \alpha_2)}^{h^+(\alpha_1, \alpha_2)} \sigma^T \varepsilon A_1 A_2 (1 + k_1 \alpha_3) (1 + k_2 \alpha_3) d\alpha_3 \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ & - \int_{S_t} \int_{h^-(\alpha_1, \alpha_2)}^{h^+(\alpha_1, \alpha_2)} \sigma_2^0(\alpha_1, \alpha_2^{const}, \alpha_3) u A_1 (1 + k_1 \alpha_3) d\alpha_3 d\alpha_1 - \\ & - \int_{S_2} \int_{h^-(\alpha_1, \alpha_2)}^{h^+(\alpha_1, \alpha_2)} \sigma_1^0(\alpha_1^{const}, \alpha_2, \alpha_3) u A_2 (1 + k_2 \alpha_3) d\alpha_3 d\alpha_2 - \\ & - \iint_{\Omega} [\sigma_3^+ u (1 + k_1 h^+) (1 + k_2 h^+) - \sigma_3^- u (1 + k_1 h^-) (1 + k_2 h^-)] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\sigma_1^0 = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}]_{\alpha_1 = \alpha_1^{const}}$, $\sigma_2^0 = [\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}]_{\alpha_2 = \alpha_2^{const}}$,
 $\sigma_3^+ = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}]_{\alpha_3 = h^+(\alpha_1, \alpha_2)}$, $\sigma_3^- = [\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}]_{\alpha_3 = h^-(\alpha_1, \alpha_2)}$,
 вектори заданих поверхневих напружень, g_1 – крива на боковій поверхні, яка збігається з лінією α_2^{const} , g_2 – крива на боковій поверхні, яка збігається з лінією α_1^{const} .

Використовуючи формули (5) і (8), в функціоналі (11) в першому інтегралі підінтегральний вираз можна переписати відносно вектора переміщень u

$$\sigma^T \varepsilon = \varepsilon^T C^T \varepsilon = u^T D_A^T \varepsilon^T D_A u \quad (12)$$

Таким чином, розв'язування задачі зводиться до відшукування вектора переміщень u , який мінімізує функціонал (11) і задовільняє умови (10).

Пропонується для знаходження розв'язку задачі (11), (10) застосовувати чисельно-аналітичний підхід, який полягає в поданні шуканого розв'язку за координатою α_3 у вигляді скінченної суми за поліномами Лежандра, а в області Ω використовувати схему методу скінченних елементів, раніше запропоновану авторами [5]

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{m=0}^{M_i} u_i^m(\alpha_1, \alpha_2) P_m(\alpha_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (13)$$

де $P_m(\alpha_3)$ – поліноми Лежандра, $u_i^m(\alpha_1, \alpha_2)$ – невідомі функції, для апроксимації яких використовуються скінченноелементні апроксимації.

Запропонована вище методика реалізована у вигляді комплексу програм на мові Сі. Її ефективність була досліджена на прикладі розв'язування ряду тестових задач теорії пружності.

Задача 1.

Розглядається задача про плоский напружений стан прямокутної пластини (див. рис. 1) під дією рівномірного навантаження $\sigma_3^+ = [0, 0, 0]_{\alpha_3 = h^+(\alpha_1, \alpha_2)}$, $\sigma_3^- = [0, 0, 1]_{\alpha_3 = h^-(\alpha_1, \alpha_2)}$, аналітичний розв'язок якої приведено в роботі [7].

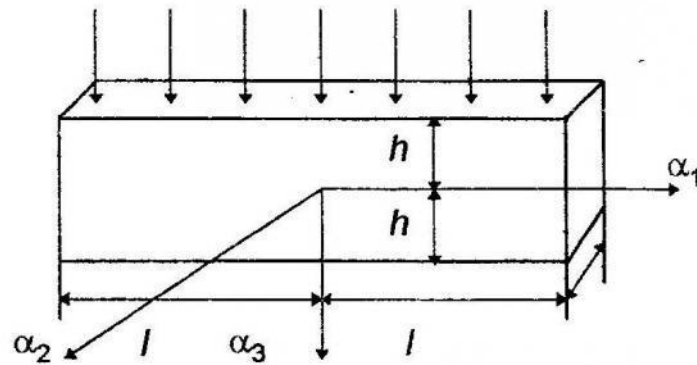


Рис. 1. Плоский напряженный стан пластины.

Для чотирьох скінченних елементів вздовж кординати α_1 і різного значення кількості членів розкладу M_i в формулі (13) вздовж координати α_3 в табл. 1 приведені значення переміщень u_3 при $\alpha_1 = 0$.

Табл. 1. Значення переміщень u_3 в центрі пластины

α_3	$M_1 = 1,$ $M_3 = 0$	$M_1 = 1,$ $M_3 = 2$	$M_1 = 2,$ $M_3 = 3$	$M_1 = 3,$ $M_3 = 4$	анал. розв.
-h	178.75	191.58	192.02	203.61	205.5
0	178.75	184.04	184.04	194.03	196.5
h	178.75	166.76	166.31	177.9	180.5

В табл. 2 приведені значення напружень σ_{11}, σ_{33} в точці $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = -h$.

Табл. 2. Напруження на навантаженій поверхні пластины

	$M_1 = 1,$ $M_3 = 0$	$M_1 = 1,$ $M_3 = 2$	$M_1 = 2,$ $M_3 = 3$	$M_1 = 3,$ $M_3 = 4$	анал. розв.
σ_{11}	-3.03	-3.03	-3.04	-3.04	-3.20
σ_{33}	-0.909	-1.02	-1.02	-1.00	-1.00

Як видно з приведених в табл.1,2 результатів для співвідношення $h/l = 1/2$ при збільшенні членів розкладу в формулі (13) запропонована методика дозволяє отримувати хороші результати як для переміщень так і для напружень.

Задача 2.

На прикладі задачі про папружено-деформований стан нескінченної в напрямі координати α_2 пластини, шарнірно опертої при $\alpha_1 = -l/2, \alpha_1 = l/2$ і навантаженої рівномірним тиском на краї $\alpha_3 = h/2$, досліджувалися питання використання запропонованого підходу до розв'язування задач для тіл з малою відносною товщиною. Ця задача має аналітичний розв'язок в рамках теорії пластин типу Тимошенка. В табл. 3 приведені значення прогину в центрі пластини і папруження σ_{11} в точці $\alpha_1 = 0, \alpha_3 = h/2$ для значення $M_1 = 1, M_3 = 2$ і чотирьох скінченних елементів вздовж ширини пластини для різних відношень h (розмір вздовж координати α_3) до l (розмір вздовж α_1).

Табл. 3.Значення прогину пластини і напругень для різних відносних товщин

h/l	0.1	0.01	0.001	0.0002
u_3	145.0	$1.4 \cdot 10^5$	$1.4 \cdot 10^8$	$1.75 \cdot 10^{10}$
w – анал.розв.	146.09	$1.42 \cdot 10^5$	$1.42 \cdot 10^8$	$1.78 \cdot 10^{10}$
σ_{11}	75.6	7400	$7.38 \cdot 10^5$	$1.84 \cdot 10^7$
σ_{11}^{anal}	75.0	7500	$7.5 \cdot 10^5$	$1.88 \cdot 10^7$

Задача 3

Розглянемо задачу про згин квадратної шарнірно опертої плити ($-a \leq \alpha_1 \leq a, -a \leq \alpha_2 \leq a, -h/2 \leq \alpha_3 \leq h/2$) під дією синусоїдального навантаження $\sigma_{33} = q_0 \sin(\pi/2a)\alpha_1 \sin(\pi/2a)\alpha_2$. Для такої задачі існує тривимірний розв'язок Б.Ф. Власова [1] .

Для товстої плити ($a/h=2$) в табл. 4 приведені значення переміщення u_3 і напругення в центрі плити ($\alpha_1 = \alpha_2 = a/2$) для різних значень членів розкладу в формулі (13) і 2×2 квадратичних елементів на четвертині плити.

Результати, приведені в табл.4, демонструють можливість дослідження за допомогою даної методики ефекту обтиску лише збільшенням порядку поліномів у формулі (13) без побудови спеціальної теорії оболонок.

Табл. 4. Переміщення і напруження в товстій плиті

$u_3 E / q_0 h$					
α_3 / h	розв'язок [1]	$M_1 = M_2 = 1$ $M_3 = 0$	$M_1 = M_2 = 1$ $M_3 = 2$	$M_i = 3$	$M_i = 4$
-0.5	1.215	0.8909	1.089	1.206	1.217
0.	0.967	0.8909	0.8961	0.9709	0.9648
0.5	0.772	0.8909	0.6910	0.7632	0.7684
σ_{11} / q_0					
-0.5	-1.205	-0.912	-0.962	-1.33	-1.25
0.	-0.022	0.	0.043	0.01	0.097
0.5	0.832	0.912	0.842	0.964	0.872

Як видно із приведених вище результатів дослідження задач 1-3, запропонована методика дозволяє розв'язувати широкий діапазон задач теорії пружності, задаючи певну кількість членів розкладу в формулі (13) і не використовуючи при цьому спеціальних математичних моделей, наприклад, таких як рівняння плоского напруженого стану, згину пластин і згину товстих плит.

1. Власов Б.Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты // Вестн. Моск. ун-та: Механика и математика. – 1957. – № 2. – С. 25-34. 2. Гуляр А.И., Майборода Е.А., Сахаров А.С. Эффективность полуаналитического метода конечных элементов при расчете призматических тел переменного сечения // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1987. – Вып. 52. – С. 64-67. 3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с. 4. Копытко М.Ф., Савула Я.Г. Об одном возможном расширении класса оболочек нулевой гауссовой кривизны // Проблемы машиностроения. – 1982. – № 17. – С. 61-65. 5. Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Расчет и оптимизация оболочек с резными поверхностями. – Львов: Вища школа, 1989. – 172 с. 6. Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. Методы исследования термо-вязкопластического деформирования трехмерных элементов конструкций (Обзор) // Прикладная механика. – 1993. – 29, № 9. – С.3-19. 7. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с. 8. Babuška I., Likang L. The problem of plate modeling: Theoretical and computational results // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1992. – № 100. – P. 249-273.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.97