

п'єзоелектрики та визначення білінійних форм і лінійних функціоналів, що входять у рівняння задачі (1.1), наведено в праці [1], звідки і запозичено вжиті нами позначення. В цій же статті встановлено достатні (і цілком вживані для практики) умови коректності варіаційної задачі (1.1).

Відзначимо, що білінійна форма $e(p, v)$ описує механізм перетворення механічної енергії в електричну і навпаки (прямий і зворотній п'єзоэффект).

2. Проекційно-сіткова схема. Нехай $\{V_h\}$ та $\{Q_h\}$ – послідовності скінченновимірних підпросторів з V та Q відповідно, причому $\dim V_h = N \rightarrow \infty$, $\dim Q_h = K \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$.

Для побудови проекційно-сіткової схеми розв'язування задачі (1.1) зафіксуємо базиси $\{v_i\}_{i=1}^N$ та $\{q_n\}_{n=1}^K$ просторів $\{V_h\}$ та $\{Q_h\}$ відповідно і виберемо крок інтегрування в часі $\Delta t = \text{const} > 0$. Тоді для відшукування наближених розв'язків задачі (1.1) скористаємось рекурентною схемою :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{задано } \Delta t, \gamma = \text{const} > 0, \\ \text{та вектор } (u^j, v^j, p^j) \in R^N \times R^N \times R^K; \\ \text{знайти вектор } (u^{j+1}, v^{j+1}, p^{j+1}) \in R^N \times R^N \times R^K \text{ такий, що} \\ \left[\begin{array}{cc} M + \Delta t \gamma (A + \frac{1}{2} \Delta t C) & -\frac{1}{2} \Delta t E \\ \frac{1}{2} \Delta t E & \Theta + \gamma \Delta t Z \end{array} \right] \begin{bmatrix} v^{j+\frac{1}{2}} \\ p^{j+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} L^j \\ R^j \end{bmatrix} + \\ + \left[\begin{array}{ccc} M + (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta t A & -\frac{1}{2} \Delta t C & 0 \\ 0 & 0 & \Theta + (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta t Z \end{array} \right] \begin{bmatrix} v^j \\ u^j \\ p^j \end{bmatrix} \\ v^{j+1} = 2v^{j+\frac{1}{2}} - v^j, \quad u^{j+1} = u^j + \Delta t \gamma v^{j+\frac{1}{2}}, \\ p^{j+1} = 2p^{j+\frac{1}{2}} - p^j, \quad j = 0, 1, \dots, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

складові якої обчислюються згідно правил

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \left\{ m(v_i, v_j) \right\}_{i,j=1}^N, \quad A = \left\{ a(v_i, v_j) \right\}_{i,j=1}^N, \quad C = \left\{ c(v_i, v_j) \right\}_{i,j=1}^N, \\ E = \left\{ e(q_n, v_j) \right\}_{n,j=1}^{KN}, \quad Z = \left\{ z(q_n, q_m) \right\}_{n,m=1}^K, \quad \Theta = \left\{ \Theta(q_n, q_m) \right\}_{n,m=1}^K, \\ L^j = \left\{ \langle l(t_{j+\frac{1}{2}}, v_i) \rangle \right\}_{i=1}^N, \quad R^j = \left\{ \langle r(t_{j+\frac{1}{2}}, q_n) \rangle \right\}_{n=1}^K. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Схема (2.1) дозволяє знаходити наближені розв'язки $(u_{h\Delta t}, p_{h\Delta t})$ задачі (1.1) у вигляді

$$\begin{cases} u_{h\Delta t}(x, t) = \sum_{i=1}^N \left\{ [1 - \xi^2(t)] u_i^j + \xi^2(t) u_i^{j+1} + \right. \\ \quad \left. + \Delta t [1 - \xi(t)] \xi(t) v_i^j \right\} v_i(x) \\ p_{h\Delta t}(x, t) = \sum_{n=1}^K \left\{ [1 - \xi(t)] p_n^j + \xi(t) p_n^{j+1} \right\} q_n(x) \\ \xi(t) = \frac{1}{\Delta t} (t - t_j) \quad \text{на } [t_j, t_{j+1}]. \end{cases} \quad (2.3)$$

Детальний аналіз проекційно-сіткової схеми (2.1) стосовно умов її стійкості та збіжності з побудовою відповідних апріорних оцінок в енергетичних нормах виконано в працях [2,3].

3. Ударне навантаження на п'єзокерамічний стержень. Розглянемо задачу про розподіл в часі електричних і механічних полів в п'єзоелементі з осью поляризації, виготовленого з п'єзокераміки PZT-4, при короткочасному механічному навантаженні. Один кінець стержня жорстко закріплений і заземлений ($u(t, 0) = 0$, $p(t, 0) = 0$), а до іншого прикладається навантаження, яке викликає напруження

$$\hat{\sigma}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1/8 T \\ 0, & 1/8 T < t \leq T \end{cases} \quad \text{при } x = L, \quad (3.1)$$

де T – час, протягом якого досліджуються електромеханічні процеси, вибирається таким чином, щоб при переході до безрозмірних змінних значення густини було рівне 1, тобто $T = \sqrt{\rho L^2 / c}$.

При такій постановці обчислювального експерименту білінійні форми і лінійні функціонали в варіаційній задачі (1.1) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} m(u, v) &= \int_0^L \rho u v \, dx; & c(u, v) &= \int_0^L c \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx; \\ a(u, v) &= \int_0^L a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx; & z(p, q) &= \int_0^L z \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} \, dx; \\ e(q, v) &= - \int_0^L e \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx; & \varepsilon(p, q) &= \int_0^L \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial x} \, dx; \\ \langle l_i, v \rangle &= \int_0^L \rho f v_i \, dx + \hat{\sigma}_i(t) v(L); & \langle r_i, q \rangle &= - \hat{J}_i(t) q(L); \end{aligned} \quad (3.2)$$

тут ρ – густина маси, c – модуль пружності, z – модуль провідності, a – модуль внутрішньої в'язкості, e – модуль п'єзоефекту, ε – модуль діелектричної проникливості.

Крім того, враховуючи, що вплив внутрішньої в'язкості і провідності матеріалу на досліджувані процеси незначний, відповідні білінійні форми $a(\cdot, \cdot)$ і $z(\cdot, \cdot)$ вибирались рівними нулю.

Розв'язуючи задачу за допомогою проекційно-сіткової схеми (2.1), і користуючись кусково-квадратичними апроксимаціями для дискретизації по просторовій змінній, отримаємо значення шуканих величин в дискретні моменти часу t_j .

Таким чином можна відслідкувати, як поширюються хвилі поздовжніх зміщень, швидкості деформацій і напружень вздовж стержня при короткочасному механічному навантаженні (на рис 3.1-3.4 графіки отримані при $N = K = 200$, $\Delta t = 1/800$ і $\gamma = 1/2$ в момент часу $t = 0.30625 T$).

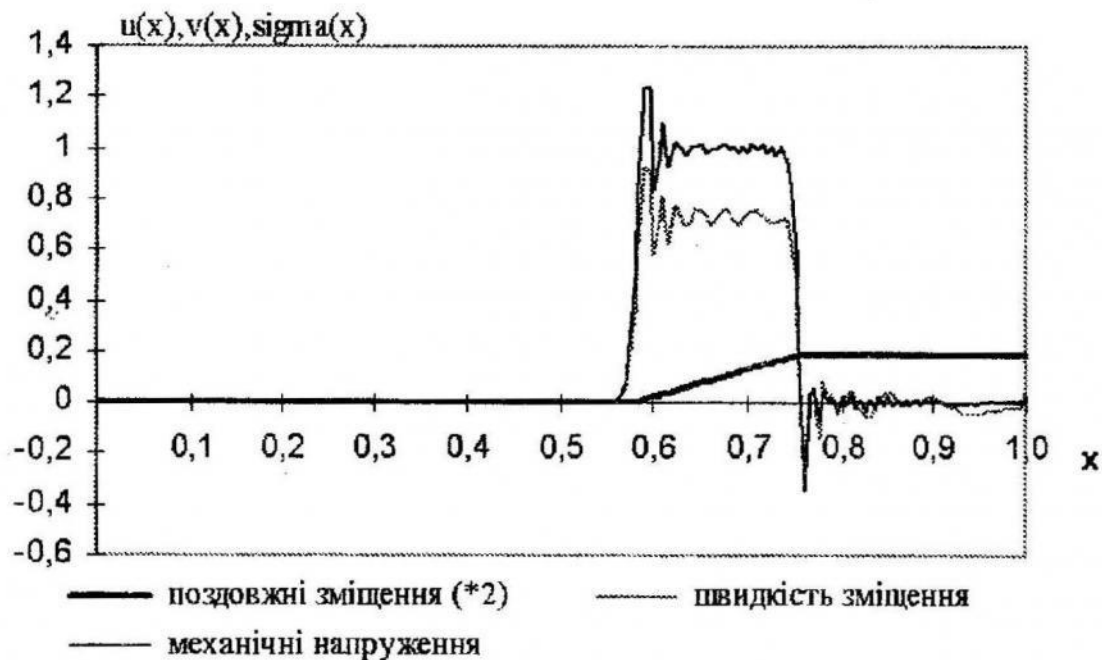


Рис. 3.1

Відзначимо характерну особливість поширення збурень в п'єзоматеріалі – механічні напруження відмінні від нуля лише в тій частині області, де відбувається приріст зміщень. За заднім фронтом хвилі напруження знову стає практично рівним нулю. На рис. 3.1 добре помітно, що в зонах нерегулярності шуканого розв'язку (в околі переднього і заднього фронтів хвилі збурень) проекційно-сіткова схема

породжує нефізичну осциляцію наближених характеристик, похибка якої може досягати 30% основного збурення.

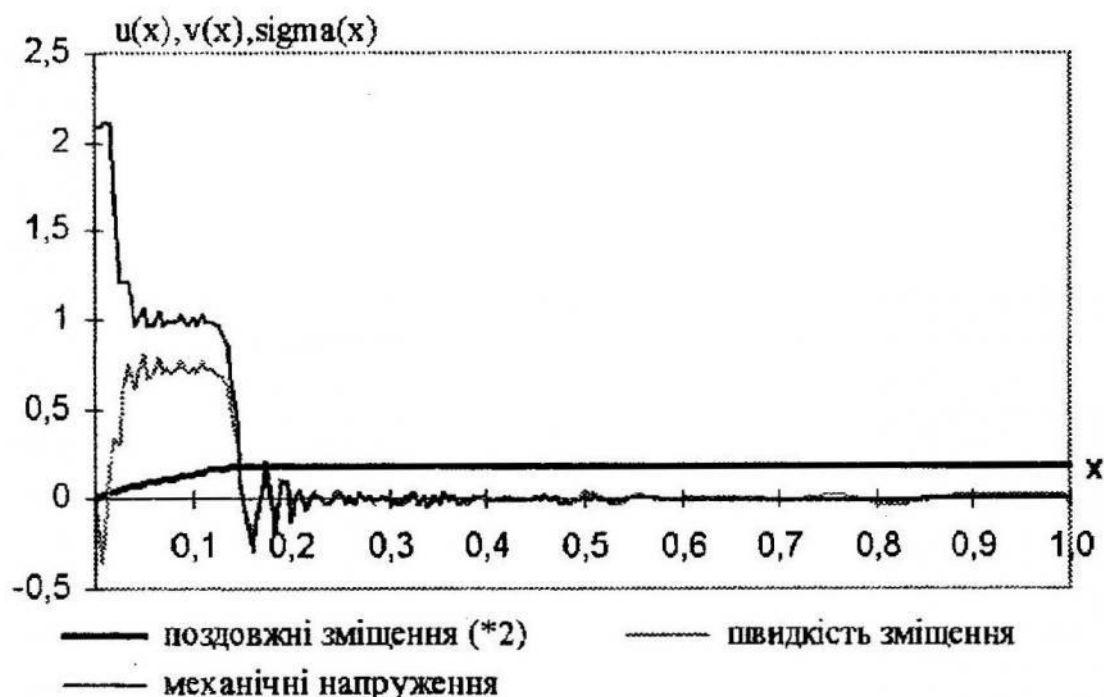


Рис. 3.2.

При підході хвилі збурень до заземленого торця спостерігається різке зростання механічних напружень біля цього краю (рис. 3.2 графіки в момент часу $t = 0.75 T$), що пояснюється незмінністю її фази – пряма і відбита хвиля напружень на границі з жорстким закріпленням не змінює свого знаку. Амплітуда напруження при цьому зростає вдвічі, а швидкість поширення деформацій починає змінювати знак, що в кінцевому рахунку приводить до гальмування точок стержня в околі закріплення.

Введені в рівняннях задачі (1.1) білінійні форми дозволяють обчислювати значення кінетичної, потенціальної енергій і дисипацію енергії у п'єзоелектрику за наступними формулами

$$\begin{aligned}
 |\varphi(t)|^2 &= \frac{1}{2} m(u'(t), u'(t)), \\
 \|\varphi(t)\|^2 &= \frac{1}{2} \{c(u(t), u(t)) + \varepsilon(p(t), p(t))\}, \\
 \|\|\varphi(t)\|\|^2 &= a(u'(t), u'(t)) + z(p(t), p(t)),
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

а також побудувати рівняння балансу енергії взаємодії фізико-механічних полів у п'єзоелектрику

$$\frac{d}{dt} \left\{ \|\varphi(t)\|^2 + \|\varphi(t)\|^2 \right\} + \|\varphi(t)\|^2 =$$

$$= \langle l(t), u'(t) \rangle + \langle r(t), p(t) \rangle, \quad \forall t \in (0, T]. \quad (3.4)$$

Перевіряючи виконання енергетичного рівняння можна, оцінити точність отриманих результатів.

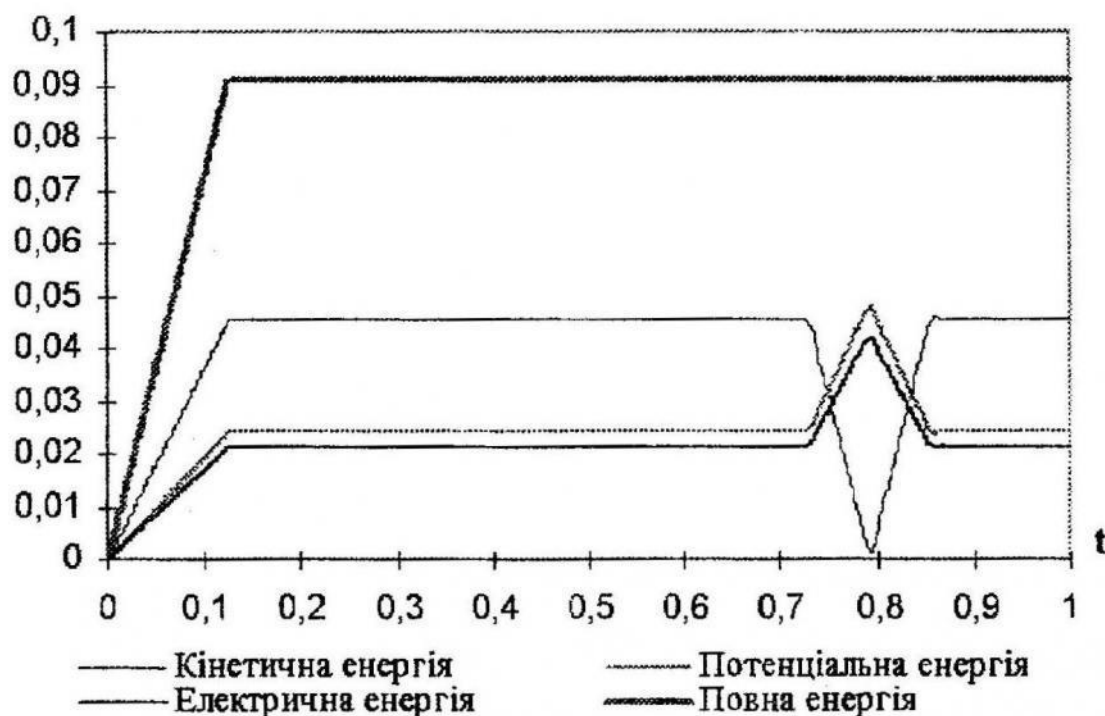
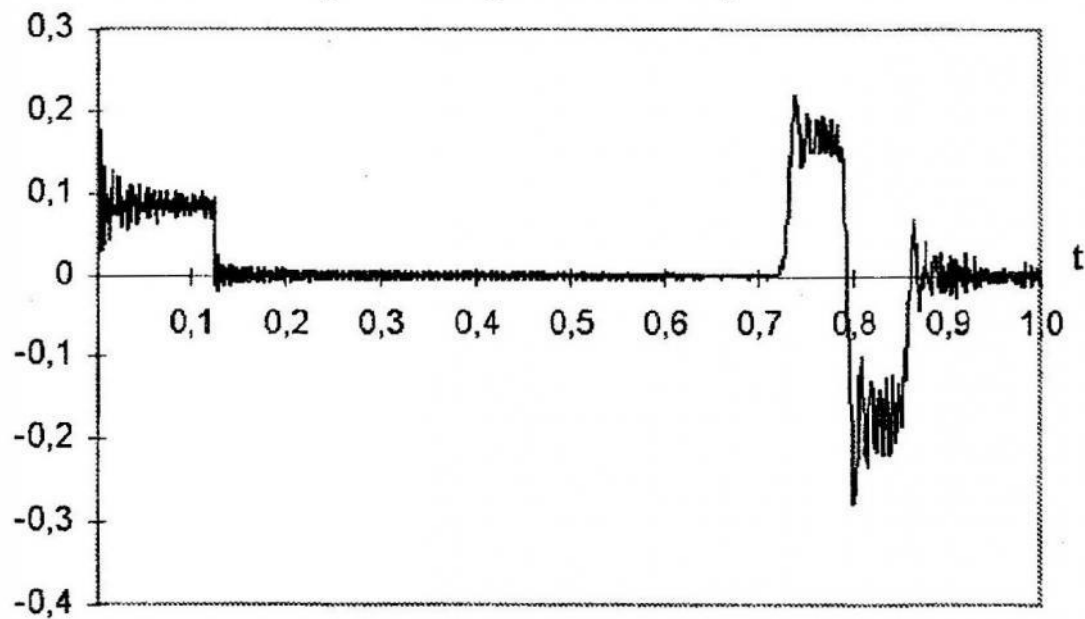


Рис. 3.3

Добре погодження інтегральних характеристик наближених розв'язків можна побачити на рис. 3.3 для всіх моментів часу $t \geq 1/8 T$. Оскільки інтенсивність дисипації енергії рівна нулю – слід очікувати, що втрат енергії в системі немає – це підтверджується незмінністю повної енергії після того, як зникло навантаження.

Зауважимо, що функція $k = k(t) = e(p(t), u'(t))$ встановлює значення динамічного коефіцієнта електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) полів в п'єзоелектрику який виділяє кількість енергії яка, в даний момент може перетворитись з механічної в електричну, і навпаки. Порівнюючи графіки енергій (рис. 3.3) та КЕМЗ (рис. 3.4), можна спостерігати, що при підході хвилі деформацій до заземленого краю КЕМЗ приймає додатні значення, тобто внаслідок зв'язності електричного і механічного полів кінетична енергія перетворюється в електричну та потенціальну. І навпаки, після того як хвиля відбилась – КЕМЗ

стає від'ємним, тобто спостерігається зворотній процес перетворення потенціальної і електричної енергій в кінетичну.



— Коефіцієнт електромеханічного зв'язку

Рис. 3.4

4. Вплив коефіцієнта рекурентної схеми на поведінку розв'язків. Ще однією особливістю процесу перетворення енергій є те, що швидкість такого перетворення при взаємодії хвилі деформацій з жорстко заземленим краєм приблизно в два рази більша ніж в ті моменти часу коли система навантажується ззовні.

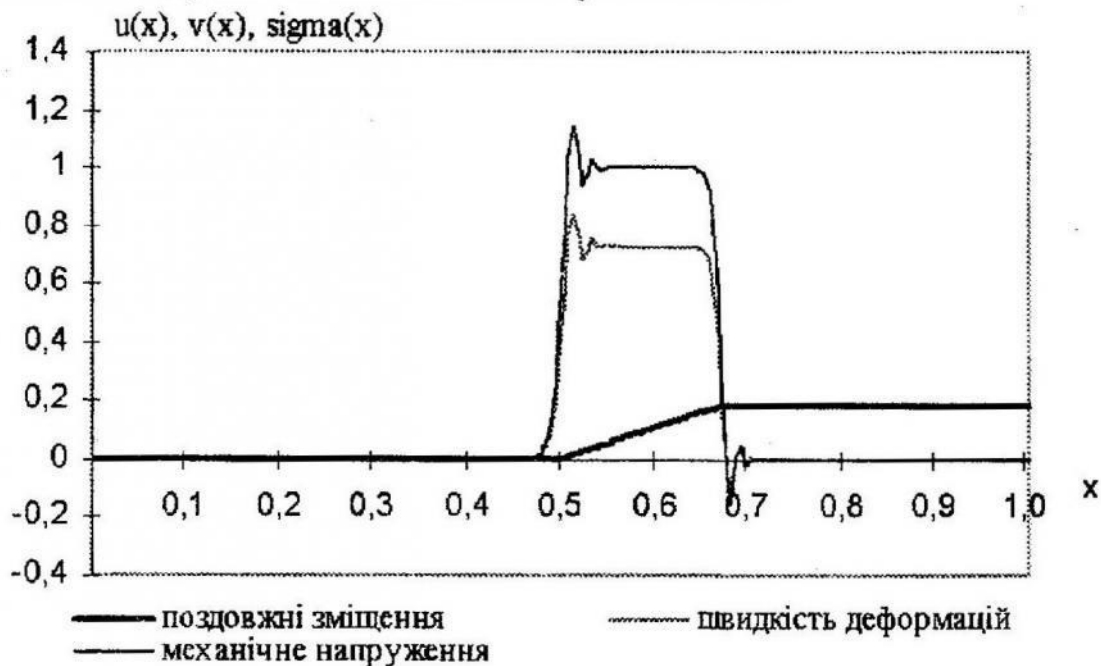


Рис. 4.1

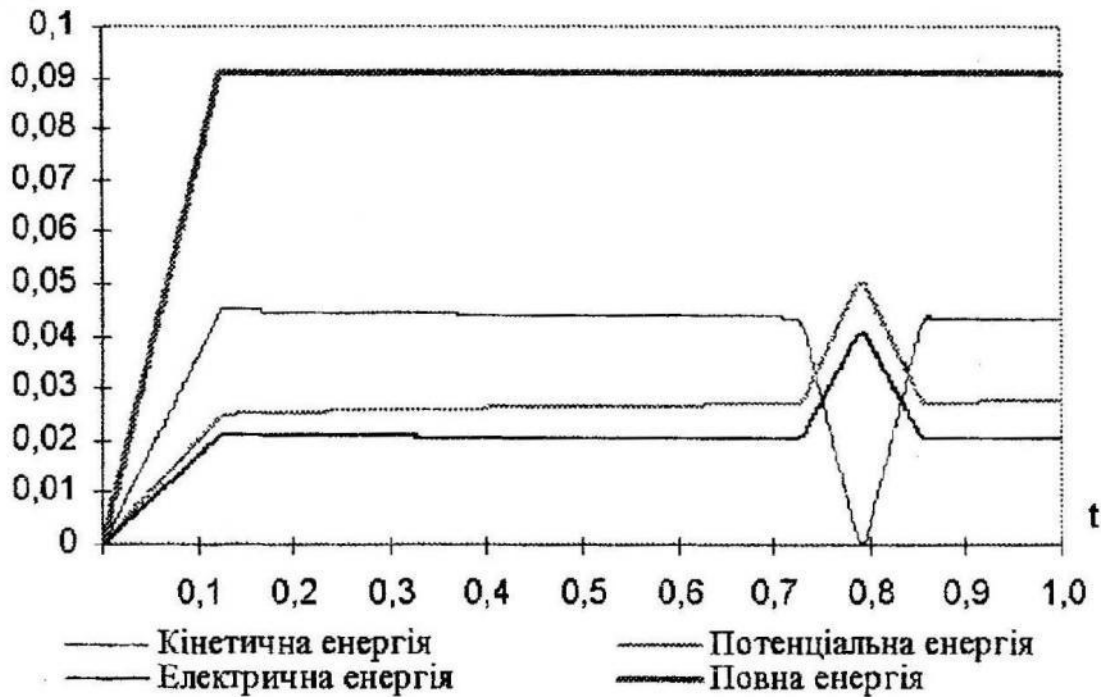


Рис. 4.2

Введений в (2.1) коефіцієнт рекурентної схеми γ , дає можливість обчислювати наближені розв'язки з більшою точністю. В праці [8] показано, що розв'язки задачі допускають фізичну інтерпретацію лише при $1/2 \leq \gamma \leq 1$. Як видно з рис. 4.1 (результати отримані при $N = K = 200$, $\Delta t = 1/800$, $\gamma = 0.55$) – із збільшенням коефіцієнта γ графіки механічного напруження і швидкості деформацій згладжуються.

Вплив цього коефіцієнта добре видно і на графіку енергій (рис. 4.2. При $\gamma > 1/2$ в обчислювальній схемі з'являється ще один доданок – дисипативний член, який врівноважує зміни в енергетичних характеристиках і приводить до того, що повна енергія зберігає своє постійне значення, незважаючи на зміни величин своїх складових.

1. Шинкаренко Г.А. Постановка та розв'язуваність початково-крайових задач електров'язкопружності // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1990. Вип.33 – с.10-16. 2. Шинкаренко Г.А. Апроксимація варіаційних задач електров'язкопружності. Напівдискретизація Гальоркіна // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1991. Вип. 35. – с.50-56. 3. Шинкаренко Г.А. Апроксимація варіаційних задач електров'язкопружності. Однокрокова схема інтегрування в часі // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.1991. Вип. 35. – с.56-62. 4. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьроэлектричества. I. Постановка задач и анализ устано-

вившихся вынужденных колебаний. П. Дифференциальные уравнения. Т.29, 1993, N7 – с.1252-1260. 5. Шинкаренко Г.А. Проекционно-сеточные аппроксимации для вариационных задач пьезоэлектричества. //Дискретизация и разрешимость нестационарных задач// Дифференциальные уравнения. Т.30, 1994,N2. – с.317-325. 6. Болкисев А.М., Шульга Н.А. Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наукова думка, 1990. – 227с. 7. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Т.5 – Киев: Наукова думка, 1989. – с.87-92. 8. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 157с.

Стаття надійшла до редколегії 19.11.97

УДК 533.6.013.42

В.М.Горлач, Я.В.Кондратюк

Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною. 3. Аналіз впливу в'язкості середовищ

В працях [1,2,3] проаналізовані (з погляду застосування проєкційно-сіткових методів) математичні моделі процесу нестационарної акустичної взаємодії пружного тіла та стисливої рідини для випадків ідеальних середовищ та середовищ з втратами енергії (дисипацією). В даній праці, на прикладі задачі про акустичну взаємодію пружного поршня з рідиною, що заповнює абсолютно жорстку камеру, проаналізовано вплив врахування в'язкості середовищ на характер чисельних розв'язків.

Математична модель акустичної взаємодії пружного тіла та стисливої рідини з врахуванням дисипації формулюється наступним чином [2,4].

1. Постановка задачі взаємодії

Нехай пружне тіло (відповідно, рідина) займає область Ω_S (відп., Ω_F) точок $x = (x_1, x_2, x_3)$ евклідового простору R^3 з межею Γ_S (відп., Γ_F). Контакт тіла та рідини здійснюється вздовж межі $\Gamma_C = \Gamma_S \cap \Gamma_F$. Позначимо через $\nu^S = (\nu_1^S, \nu_2^S, \nu_3^S)$ (відп., ν^F) одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_S (відп., Γ_F), та t – час, $0 \leq t \leq T$.