ВО, 1991. – 87с. 6. Горлач В.М., Кондратюк Я.В. Чисельна модель акустичної взаємодії пружного тіла з рідиною для середовищ з дисипацією // Modelling and investigation of system stability: thesis of Int.Conf. – Kiev – 1997. – P.41. 7. Geradin M., Robert G., Huck A. Eigenvalue analisis and transient response of fluid-structure interaction problems // Eng.Computational. – 1984. – Vol.1, №2. – P.151-160.

Стаття надійшла до редколегії 30.12.97

УДК 539.3

Муха І.С.

Уточнена теорія термопружних оболонок з урахуванням залежності пружних констант матеріалу від температури

В класичних математичних моделях теорії оболонок вважають, що зміна температури неістотно впливає на значення пружних констант E та G. Але експериментальні дослідження показують, що при високій температурі значення цих констант суттєво змінюються. Тому знехтувавши цією залежністю, можна отримати неадекватну модель термопружного деформування тонкостінного тіла. В даній праці зроблена спроба побудувати уточнену модель оболонок, яка враховує вищезгадану залежність.

Нехай початково трансверсально-ізотропне однорідне тонкостінне деформівне тіло займає в просторі об"єм V, обмежений поверхнею S. Припустимо, що тіло віднесене до триортогональної системи криволінійних координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, і в цій системі

$$V = \left\{ \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \vec{n}(\alpha_1, \alpha_2) \colon (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega, -{}^{h}\!/_{2} \le \alpha_3 \le {}^{h}\!/_{2} \right\}$$

де h – товщина тіла, $\vec{n}(\alpha_1, \alpha_2)$ – нормаль до поверхні $\Omega = \left\{ \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) \colon (\alpha_1, \alpha_2) \in \omega \right\}$. Нехай система координат α_1, α_2 є ортогональною та спряженою, і K_1, K_2 – головні кривини поверхні Ω.

Будемо виходити з теорії незв"язного термопружного деформування тіла. Припустимо, що в тонкостінному тілі реалізується узагальнений плоский напружений стан, тобто $\sigma_{33} = 0$. Крім цього, нехай пружні константи тіла є лінійними функціями приросту температури T, тобто модуль Юнга $E = E_1 - E_2 T$ і модуль зсуву в напрямі нормалі до площини ізотропії $G = G_1 - G_2 T$. При таких припущеннях густина енергії пружної деформації тонкостінного тіла може бути записана в вигляді

$$\Phi(\mathcal{E}, T) = \frac{1}{2}\{\frac{E_1 - E_2 T}{1-\nu^2}[(\mathcal{E}_{11} - \alpha T)^2 + (\mathcal{E}_{22} - \alpha T)^2 +$$

$$+ 2\nu(\mathcal{E}_{11} - \alpha T)(\mathcal{E}_{22} - \alpha T) + \frac{1-\nu}{2}\mathcal{E}_{12}^2] +$$

$$+ (G_1 - G_2 T)(\mathcal{E}_{13}^2 + \mathcal{E}_{23}^2)\},$$

де α – коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу; $\mathcal{E}_{ij} = \nabla_i U_j + \nabla_j U_i$ при $i \neq j$.

Приймемо кінематичні гіпотези типу Тимошенко, згідно з якими переміщення U_1 та U_2 є лінійними функціями α_3, а U_3 є постійними за товщиною тіла [3,4]. Тоді для деформацій матимемо формули

$$\mathcal{E}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii} + \alpha_3 \kappa_{ii}}{1 + K_i \alpha_3}, \quad \mathcal{E}_{12} = \frac{\varepsilon_{12} + \alpha_3 \kappa_{12}}{(1 + K_1 \alpha_3)(1 + K_2 \alpha_3)}, \quad \mathcal{E}_{i3} = \frac{\varepsilon_{i3}}{1 + K_i \alpha_3},$$

$$i = 1,2.$$

Введемо в розгляд усереднену густину енергії деформації

$$\int_V \Phi(\mathcal{E}, T) dV = \int_\Omega \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi(\mathcal{E}, T)(1 + K_1 \alpha_3)(1 + K_2 \alpha_3) d\alpha_3 d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \phi(\varepsilon, \kappa, \overset{0}{T}, \overset{1}{T}) d\Omega;$$

де

$$\overset{0}{T}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) d\alpha_3, \quad \overset{1}{T}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\alpha_3 d\alpha_3.$$

Вираз для $\phi(\varepsilon, \kappa, \overset{0}{T}, \overset{1}{T})$ отримується шляхом усереднення за товщиною функції $\Phi(\mathcal{E}, T)$. При цьому приймають гіпотезу стосовно реального розподілу деформацій за товщиною тіла, згідно з якою [1]

$$\varepsilon_{i3} = \frac{5\varepsilon_{i3}[0.25 - (\alpha_3/h)^2]}{1 + K_i \alpha_3}.$$

Така гіпотеза дозволяє не завищувати зсувну жорсткість оболонки і не порушувати основний енергетичний принцип.

В результаті отримаємо

$$\phi\ (\varepsilon, \kappa, \overset{0}{T}, \overset{1}{T}) = \frac{1}{2}\left\{ \frac{(E_1 - E_2 \overset{0}{T})h}{1-\nu^2}(\tilde{\varepsilon}_{11}^2 + \tilde{\varepsilon}_{22}^2 + 2\nu\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\varepsilon}_{22} + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}^2) - \right.$$

$$-\frac{E_2 \overset{1}{T} h^3}{12(1-\nu^2)}(\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\kappa}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22}\tilde{\kappa}_{22} + \nu\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\kappa}_{22} + \nu\tilde{\varepsilon}_{22}\tilde{\kappa}_{11} + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}\kappa_{12}) +$$

$$+\frac{(E_1 - E_2 \overset{0}{T})h^3}{12(1-\nu^2)}(\tilde{\kappa}_{11}^2 + \tilde{\kappa}_{22}^2 + 2\nu\tilde{\kappa}_{11}\tilde{\kappa}_{22} + \frac{1-\nu}{2}\kappa_{12}^2) +$$

$$\left. + \frac{5}{2}(\frac{G_1}{3} - \frac{G_2 \overset{0}{T}}{2})h(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2) \right\};$$

де $\tilde{\varepsilon}_{ii} = \varepsilon_{ii} - \alpha\overset{0}{T}$, $\tilde{\kappa}_{ii} = \kappa_{ii} - \alpha\overset{1}{T}$.

Далі скористаємось принципом віртуальних робіт. З нього отримаємо, що зусилля та моменти в оболонці рівні

$$N_{ii} = \frac{(E_1 - E_2 \overset{0}{T})h}{1-\nu^2}(\tilde{\varepsilon}_{ii} + \nu\tilde{\varepsilon}_{jj}) - \frac{E_2 \overset{1}{T} h^3}{12(1-\nu^2)}(\tilde{\kappa}_{ii} + \nu\tilde{\kappa}_{jj}),$$

$$N_{12} = \frac{(E_1 - E_2 \overset{0}{T})h}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12} - \frac{E_2 \overset{1}{T} h^3}{24(1+\nu)}\kappa_{12},$$

$$Q_i = \frac{5}{2}(\frac{G_1}{3} - \frac{G_2 \overset{0}{T}}{2})h\varepsilon_{i3},$$

$$M_{ii} = -\frac{E_2 \overset{1}{T} h^3}{12(1-\nu^2)}(\tilde{\varepsilon}_{ii} + \nu\tilde{\varepsilon}_{jj}) + \frac{(E_1 - E_2 \overset{0}{T})h^3}{12(1-\nu^2)}(\tilde{\kappa}_{ii} + \nu\tilde{\kappa}_{jj}),$$

$$M_{12} = -\frac{E_2 \overset{1}{T} h^3}{24(1+\nu)}\varepsilon_{12} + \frac{(E_1 - E_2 \overset{0}{T})h^3}{24(1+\nu)}\kappa_{12},$$

$$i, j = 1,2; \quad i \neq j.$$

Отримані фізичні співвідношення в сумі з традиційними співвідношеннями Коші [3,4] визначають функціонал Лагранжа теорії оболонок. Це дозволяє зробити варіаційну постановку задачі про термопружне деформування оболонки з урахуванням залежності пружних констант від температури. Описана математична модель з успіхом використовувалась в [2] для розв"язання задачі термопластичного деформування смуги-пластини.

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек // М:Наука. -1972. – 432 с. 2. Муха І.С., Кісіль Р.І. Застосування комбінованого чисельного підходу в задачах термопластичного деформування тонкостінних тіл // Доп. НАН України. – 1997.–№6. – с.69-74. 3. Муха І.С., Савула Я.Г. Нелінійна модель пружного деформування тонкостінних гнучких тіл // Вісн.Львів.ун-ту,сер.мех.-мат. – 1995. – Вип.41. – с. 82-91. 4. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек // Львів:Вища школа. – 1978.–159 с.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.97

УДК 539.3

Муха І.С.

Дослідження пружного деформування складових тонкостінних гнучких тіл методом скінченних елементів

Складові тонкостінні тіла з складною формою серединної поверхні широко застосовуються в сучасних інженерних конструкціях. Проблеми забезпечення їх міцності та надійності зумовлюють розвиток методів розв"язування задач про визначення напружено-деформованого стану грučких оболонок на основі геометрично нелінійних теорій пружного деформування. Дана праця присвячена розробці чисельних схем методу скінченних елементів для розв"язування вказаних задач.

Розглянемо процес деформування початково трансверсально-ізотропного однорідного гнучкого тонкостінного тіла, яке знаходиться в об"ємі V і обмежене поверхнею S. Припустимо, що тіло має структуру тонкостінної системи, складеної з гнучких оболонкових елементів постійної товщини. Вважатимемо, що кожен елемент системи віднесений до триортогональної системи координат, зв"язаної з лініями кривини на серединній поверхні тіла. Тоді $V = \mathrm{U}V_m$, де