

оболонки. Це дозволяє зробити варіаційну постановку задачі про термopружне деформування оболонки з урахуванням залежності пружних констант від температури. Описана математична модель з успіхом використовувалась в [2] для розв'язання задачі термопластичного деформування смуги-пластини.

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек // М:Наука. -1972. - 432 с.
2. Муха І.С., Кісіль Р.І. Застосування комбінованого чисельного підходу в задачах термопластичного деформування тонкостінних тіл // Доп. НАН України. - 1997.-№6. - с.69-74.
3. Муха І.С., Савула Я.Г. Нелінійна модель пружного деформування тонкостінних гнучких тіл // Вісн.Львів.ун-ту,сер.мех.-мат. - 1995. - Вип.41. - с. 82-91.
4. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек // Львів:Вища школа. - 1978.-159 с.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.97

УДК 539.3

Муха І.С.

Дослідження пружного деформування складових тонкостінних гнучких тіл методом скінченних елементів

Складові тонкостінні тіла з складною формою серединної поверхні широко застосовуються в сучасних інженерних конструкціях. Проблеми забезпечення їх міцності та надійності зумовлюють розвиток методів розв'язування задач про визначення напружено-деформованого стану гнучких оболонок на основі геометрично нелінійних теорій пружного деформування. Дана праця присвячена розробці чисельних схем методу скінченних елементів для розв'язування вказаних задач.

Розглянемо процес деформування початково трансверсально-ізотропного однорідного гнучкого тонкостінного тіла, яке знаходиться в об'ємі V і обмежене поверхнею S . Припустимо, що тіло має структуру тонкостінної системи, складеної з гнучких оболонкових елементів постійної товщини. Вважатимемо, що кожен елемент системи віднесений до триортгональної системи координат, зв'язаної з лініями кривини на серединній поверхні тіла. Тоді $V = UV_m$, де

$$V_m = \left\{ \bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in v_{m0}, -\frac{h_m}{2} \leq \alpha_3 \leq \frac{h_m}{2} \right\}.$$

Нехай $\Omega_m = \left\{ \bar{R}(\alpha_1, \alpha_2, 0) : (\alpha_1, \alpha_2) \in v_{m0} \right\}$, а Γ_m є межею області Ω_m .

Будемо припускати, що весь процес навантаження тіла зовнішніми силами проходить досить повільно, і отже його можна розглядати як ряд послідовних рівноважних станів. Це значить, що модель деформування тіла може бути записана в квазістатичній постановці. Нехай в деякий момент часу в тілі присутні переміщення точок U , повні деформації $\mathcal{E}$, і напруження Σ , які виникли під дією масових сил Q та поверхневих навантажень $\tilde{\Sigma}_n$, і є зрівноваженими.

Математичну модель деформування пружного тіла запишемо в варіаційній постановці у формі принципу Лагранжа. Будемо вважати, що деформації, які виникають в тілі у процесі деформування, є малими, а згин оболонки є середнім [5]. Приймемо гіпотези деформування нормального до серединної поверхні волокна оболонки у лінійній формі типу Тимошенко.

$$\begin{aligned} U_s(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= u_s(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \gamma_s(\alpha_1, \alpha_2), s=1,2 \\ U_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= u_3(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Крім цього нехай в оболонці реалізується узагальнений плоский напружений стан. Тоді варіаційний принцип Лагранжа можна записати так [7]

$$\begin{aligned} L(u, \gamma) &= \sum_m \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \varepsilon_{ij}(u, \gamma) A_{ijkl}^{(m1)} \varepsilon_{kl}(u, \gamma) d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \kappa_{rs}(u, \gamma) A_{rspt}^{(m2)} \kappa_{pt}(u, \gamma) d\Omega - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega_m} q_i^{(m1)} u_i d\Omega - \int_{\Omega_m} q_r^{(m2)} \gamma_r d\Omega - \int_{\Gamma_{m\sigma}} \tilde{\sigma}_{ni}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{m\sigma}} \tilde{m}_{nr}^* \gamma_r d\Gamma \right\} \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $A^{(ij)}$ -тензори, коефіцієнти яких є функціями пружних констант матеріалу і товщини h_i , $\Gamma_{i\sigma}$ -частина контура Γ_i , на якому задані граничні номінальні зусилля $\tilde{\sigma}_{ni}^*$ та граничні номінальні моменти $\tilde{m}_{nr}^*$;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rs} &= e_{rs} + \frac{1}{2} \omega_{r3} \omega_{s3}; & \varepsilon_{r3} &= e_{r3}; \\ \kappa_{rs} &= k_{rs} + \frac{1}{2} (\omega_{r3} \tau_{s3} + \omega_{s3} \tau_{r3}) - \frac{1}{2} \omega_{r3} \omega_{s3} \delta_{rs} K_r; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{rs} &= \frac{1}{2A_r A_s} [\nabla_s (A_r u_r) + \nabla_r (A_s u_s)] + K_r \delta_{rs} u_3; \\
e_{r3} &= \frac{1}{2} (\gamma_r + \frac{1}{A_r} \partial_r u_3 - K_r u_r); \quad k_{rr} = \frac{1}{A_r^2} \nabla_r (A_r \gamma_r); \\
k_{12} &= \frac{1}{2A_1 A_2} [\nabla_2 (A_1 \gamma_1) + \nabla_1 (A_2 \gamma_2) + K_1 \nabla_2 (A_1 u_1) + K_2 \nabla_1 (A_2 u_2)] \\
\omega_{r3} &= \frac{1}{2} (\gamma_r - \frac{1}{A_r} \partial_r u_3 + K_r u_r); \quad \tau_{r3} = K_r \gamma_r; \\
i, j, k, l &= 1, 2, 3; \quad r, s, p, t = 1, 2
\end{aligned}$$

Нехай тепер на тіло діють додаткові масові сили та поверхневі навантаження, і внаслідок цього в тілі виникають додаткові переміщення Δu та $\Delta \gamma$. Тоді для визначення приростів переміщень матимемо варіаційне рівняння [6]

$$\delta L^A(\Delta u, \Delta \gamma) = 0 \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned}
L^A(\Delta u, \Delta \gamma) &= \sum_m \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} \sigma_{rs} \Delta \omega_{r3} \Delta \omega_{s3} d\Omega + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} m_{rs} (\Delta \omega_{r3} \Delta \tau_{s3} + \Delta \omega_{s3} \Delta \tau_{r3} - \Delta \omega_{r3} \Delta \omega_{s3} \delta_{rs} K_r) d\Omega + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} (\Delta e_{ij} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{i3} \omega_{j3} + \frac{1}{2} \omega_{i3} \Delta \omega_{j3} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{i3} \Delta \omega_{j3}) \times A_{ijkl}^{(m1)} \times \\
&\times (\Delta e_{kl} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{k3} \omega_{l3} + \frac{1}{2} \omega_{k3} \Delta \omega_{l3} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{k3} \Delta \omega_{l3}) d\Omega + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} [\Delta k_{rs} + \frac{1}{2} (\Delta \omega_{r3} \tau_{s3} + \omega_{r3} \Delta \tau_{s3} + \Delta \omega_{s3} \tau_{r3} + \omega_{s3} \Delta \tau_{r3}) - \\
&- \Delta \omega_{r3} \omega_{s3} \delta_{rs} K_r + \frac{1}{2} (\Delta \omega_{r3} \Delta \tau_{s3} + \Delta \omega_{s3} \Delta \tau_{r3}) - \\
&- \frac{1}{2} \Delta \omega_{r3} \Delta \omega_{s3} \delta_{rs} K_r] \times A_{rspj}^{(m2)} \times [\Delta k_{pj} + \frac{1}{2} (\Delta \omega_{p3} \tau_{j3} + \omega_{p3} \Delta \tau_{j3} + \\
&+ \Delta \omega_{j3} \tau_{p3} + \omega_{j3} \Delta \tau_{p3}) - \Delta \omega_{p3} \omega_{j3} \delta_{pj} K_p + \\
&+ \frac{1}{2} (\Delta \omega_{p3} \Delta \tau_{j3} + \Delta \omega_{j3} \Delta \tau_{p3}) - \frac{1}{2} \Delta \omega_{p3} \Delta \omega_{j3} \delta_{pj} K_p] d\Omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega_m} \sigma_{ij} (\Delta e_{ij} + \frac{1}{2} \Delta \omega_{i3} \omega_{j3} + \frac{1}{2} \omega_{i3} \Delta \omega_{j3}) d\Omega + \\
& + \int_{\Omega_m} m_{rs} [\Delta k_{rs} + \frac{1}{2} (\Delta \omega_{r3} \tau_{s3} + \omega_{r3} \Delta \tau_{s3} + \Delta \omega_{s3} \tau_{r3} + \omega_{s3} \Delta \tau_{r3}) - \\
& - \Delta \omega_{r3} \omega_{s3} \delta_{rs} K_r] d\Omega - \int_{\Omega_m} (q_i^{(m1)} + \Delta q_i^{(m1)}) \Delta u_i d\Omega - \\
& - \int_{\Omega_m} (q_r^{(m2)} + \Delta q_r^{(m2)}) \Delta \gamma_r d\Omega - \int_{\Gamma_{m\sigma}} (\tilde{\sigma}_{ni}^* + \Delta \tilde{\sigma}_{ni}^*) \Delta u_i d\Gamma - \\
& - \int_{\Gamma_{m\sigma}} (\tilde{m}_{nr}^* + \Delta \tilde{m}_{nr}^*) \Delta \gamma_r d\Gamma
\end{aligned}$$

Тут прийняті такі позначення:

$$\sigma_{rr} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{rr} (1 + \alpha_3 K_s) d\alpha_3; \quad r, s = 1, 2; \quad r \neq s, \quad \sigma_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{12} d\alpha_3$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_{3r} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{r3} (1 + \alpha_3 K_s) d\alpha_3; \quad r, s = 1, 2; \quad r \neq s,$$

$$m_{rr} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{rr} (1 + \alpha_3 K_s) \alpha_3 d\alpha_3; \quad r, s = 1, 2; \quad r \neq s, \quad m_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \Sigma_{12} \alpha_3 d\alpha_3$$

Для мінімізації функціоналу (3) побудуємо ітераційний процес типу Ньютона. Для цього припустимо, що нам відомо деякі наближення $\Delta u_j^{(i)}$ та $\Delta \gamma_r^{(i)}$ шуканих функцій. Представимо точний розв'язок в вигляді

$$\Delta u_j = \Delta u_j^{(i)} + du_j^{(i)}, \Delta \gamma_r = \Delta \gamma_r^{(i)} + d\gamma_r^{(i)} \quad (4)$$

Будемо припускати, що величини $du_j^{(i)}, d\gamma_r^{(i)}$ є величинами вищого порядку малості в порівнянні з відповідними Δ -величинами. Запишемо функціонал типу (3) відносно величин $du_j^{(i)}, d\gamma_r^{(i)}$. Знехтуємо в ньому підкресленими членами, що мають порядок $(du)^3, (du)^4$. Тоді отримається квадратичний функціонал $\bar{L}^d(du, d\gamma)$. Для мінімізації цього функціоналу можна застосувати метод скінченних елементів з ізопараметричними апроксимаціями шуканих функцій [1, 2]. Для цього представимо область Ω у вигляді об'єднання

М криволінійних чотирикутників Ω_e , на границях яких вибрано вісім вузлових точок. Відобразимо внутрішність квадрата $\Xi = \{\zeta_1, \zeta_2: -1 \leq \zeta_i \leq 1\}$ на область Ω_e за допомогою перетворення

$$\alpha_p = \sum_{\substack{k,j=-1,0,1 \\ k^2+j^2 \neq 0}} \alpha_{pkj} \Phi_{kj}(\zeta_1, \zeta_2); \quad p=1,2; \quad (5)$$

де квадратичні базові функції Φ_{kj} визначаються за формулами

$$\Phi_{kj} = -\frac{1}{4}(1+k\zeta_1)(1+j\zeta_2)(1-k\zeta_1-j\zeta_2),$$

$$\Phi_{0j} = \frac{1}{2}(1-\zeta_1^2)(1+j\zeta_2), \quad \Phi_{k0} = \frac{1}{2}(1+k\zeta_1)(1-\zeta_2^2), \quad k, j = -1, 1;$$

$(\alpha_{1kj}, \alpha_{2kj})$ – координати вузла (k, j) елемента Ω_e .

Шукані функції $du_j^{(i)}, d\gamma_r^{(i)}$ представимо на стандартному елементі Ξ у вигляді

$$du_j^{(i)} = \Phi(\zeta_1, \zeta_2) q_j^{(ei1)}, \quad d\gamma_r^{(i)} = \Phi(\zeta_1, \zeta_2) q_r^{(ei2)}. \quad (6)$$

Тут $\Phi(\zeta_1, \zeta_2) = [\Phi_{-1,-1} \Phi_{0,-1} \Phi_{1,-1} \Phi_{1,0} \Phi_{1,1} \Phi_{0,1} \Phi_{-1,1} \Phi_{-1,0}]$; $q_j^{(ei1)}, q_r^{(ei2)}$ – стовпчики невідомих значень шуканих функцій у вузлових точках елемента Ω_e .

Виходячи з умов мінімуму квадратичного функціоналу $\bar{L}^d(du, d\gamma)$ на множині функцій вигляду (6), які задовільняють однорідні граничні умови на границі $\Gamma_m \setminus \Gamma_{m\sigma}$, отримаємо ключову систему лінійних алгебраїчних рівнянь методу скінченних елементів

$$\sum_{e=1}^M K^{(ei)} q^{(ei)} = \sum_{e=1}^M F^{(ei)}.$$

Розв'язки цієї системи є значеннями приростів $du_j^{(i)}, d\gamma_r^{(i)}$ у вузлових точках елемента Ω_e . Для знаходження $(i+1)$ -го наближення шуканих функцій $\Delta u_j^{(i+1)}, \Delta \gamma_r^{(i+1)}$ потрібно до відомих вузлових значень функцій $\Delta u_j^{(i)}, \Delta \gamma_r^{(i)}$ додати знайдені прирости. Описаний процес продовжують до тих пір, поки прирости функцій $du_j^{(i)}, d\gamma_r^{(i)}$ не стануть задовільняти умову

$$\|du_j^{(i)}\| \leq \varepsilon \|\Delta u_j^{(i)}\|, \quad \|d\gamma_r^{(i)}\| \leq \varepsilon \|\Delta \gamma_r^{(i)}\|. \quad (7)$$

Зауважимо, що обчислення членів $K^{(ei)}, F^{(ei)}$ на кожній ітерації по (і) вимагає колосальних затрат комп'ютерних ресурсів. Тому в праці пропонується методика, що дозволяє значно зменшити ці затрати. Суть її полягає в тому, щоб обчислювати один раз деякі величини в кожній точці чисельного інтегрування і запам'ятовувати їх на зовнішніх носіях. Ця ідея не нова, але в літературі пропонується обчислювати і запам'ятовувати значення функцій форми Φ_{kj} та їх

похідних $\frac{\partial \Phi_{kj}}{\partial \alpha_p}$ у вказаних точках. Спробуємо узагальнити цю ідею.

Якщо нам відомі значення функцій форми та їх похідних по α_p в деякій точці, то по них можна обчислити 11 величин

$$\Phi, \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \Phi, \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} \Phi, K_1 \Phi, K_2 \Phi, K_2 \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \Phi, K_1 \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} \Phi, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}, \frac{1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2}, \frac{K_2}{A_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1}, \frac{K_1}{A_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2},$$

які використовуються для визначення деформацій e_{kj}, k_{rs} та кутів повороту ω_{r3}, τ_{r3} . Ці незначні затрати ресурсів пам'яті значно зменшують обчислювальні затрати комп'ютера. Але це ще не все. Представимо для визначеності величину e_{kj} на елементі Ω_e у вигляді

$$e_{kj}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{p=1}^3 \sum_{l=1}^8 e_{kj}^{(1pl)}(\alpha_1, \alpha_2) u_{pl} + \sum_{p=1}^2 \sum_{l=1}^8 e_{kj}^{(2pl)}(\alpha_1, \alpha_2) \gamma_{pl} \quad (8)$$

де величини $e_{kj}^{(1pl)}(\alpha_1, \alpha_2), e_{kj}^{(2pl)}(\alpha_1, \alpha_2)$ – деякі вирази, що обчислюються через значення приведених вище 11 величин в точці (α_1, α_2) ; u_{pl}, γ_{pl} – значення функцій u_p і γ_p у вузлах елемента Ω_e . Якщо тепер обчислити в кожній точці інтегрування величини $e_{kj}^{(1pl)}, k_{kj}^{(1pl)}, \omega_{kj}^{(1pl)}, \tau_{kj}^{(1pl)}$ і запам'ятати їх на зовнішніх магнітних носіях, то тоді без особливих затрат обчислювальних ресурсів можна отримувати не тільки вказані величини, але і їх прирости. В останньому випадку в формули (8) потрібно підставити $\Delta u_{pl}, \Delta \gamma_{pl}$ замість u_{pl}, γ_{pl} . Описана методика особливо ефективна при розв'язуванні вище згаданих задач, коли на кожній ітерації кроку навантаження потрібно обчислювати не тільки поля шуканих d-величин, але й поля вже накопичених значень деформацій та поворотів.

На базі описаного алгоритму створено програмне забезпечення, яке використане для розв'язання ряду задач пружного деформування тонкостінних гнучких тіл. Зокрема розв'язана задача, запропонована в праці [3], і отримано добре співпадіння з приведеними там результатами.

В даній праці приведемо лише результати розрахунку однієї практично важливої конструкції, а саме колінчатого з'єднання трубопроводів. Ця конструкція є з'єднанням двох перпендикулярних труб за допомогою перехідної труби еліптичного поперечного перерізу. На тіло діє рівномірно розподілений внутрішній тиск. На краях обох труб змодельовано умови, що відображають заварені торці. Задача розв'язувалась при таких значеннях геометричних та фізичних величин: радіус труби $R = 0,1\text{м}$, довжина $|CB| = 0,4\text{м}$, товщина $h = 0,002\text{м}$, модуль Юнга $E = 40000\text{МПа}$, коефіцієнт Пуасона $\nu = 0,3$.

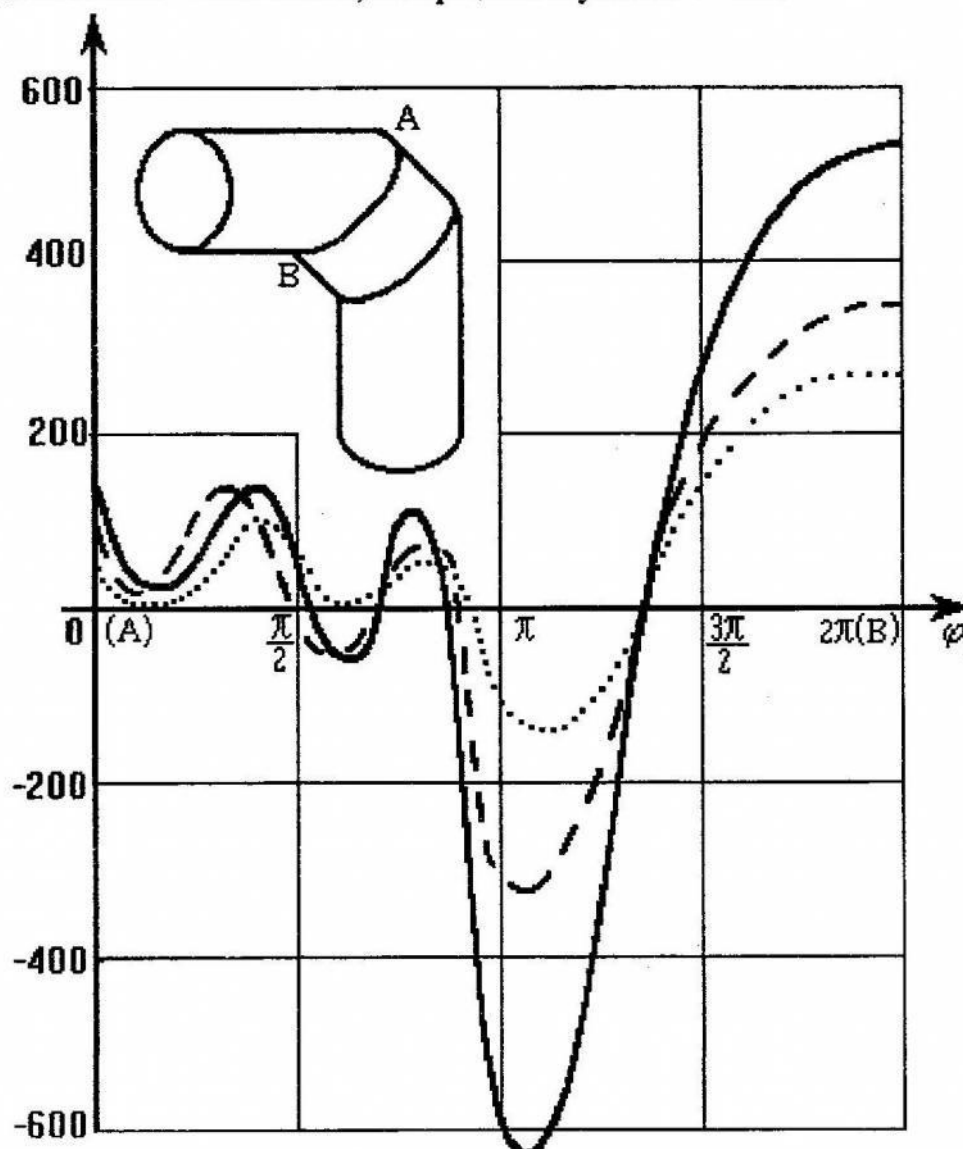


Рис. 1

З метою подальшого зміцнення конструкції запропоновано встановити ребро жорсткості в площині серединного перерізу перехідника. Розглядались три варіанти, а саме: (а) ребро постійної висоти $H=0.008\text{м}$; (б) ребро еліптичного профілю з висотою $H=0.004\text{м}$ в точках А і В, та $H=0.012\text{м}$ посередині; (в) ребро еліптичного профілю з висотою $H=0.012\text{м}$ в точках А і В та $H=0.004\text{м}$ посередині. На перший погляд найкращі результати слід було б очікувати для ребра (б), оскільки максимальні напруження виникають посередині. Але чисельні експерименти показали, що така гіпотеза була помилковою. Виявилось, що найкраща картина розподілу напружень отримана для ребра (в). Ці результати приведені на рис. 1 точковою лінією. Як бачимо, за рахунок незначного збільшення маси конструкції можна добитись того, що максимальні напруження зменшаться майже вдвічі і тіло не вийде за межі пружності.

1. Григоренко Я.М., Муха І.С., Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Пружна рівновага складових оболонок зі скінченною зсувною жорсткістю // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1984. – №7. – с.33-36.
2. Григоренко Я.М., Муха І.С., Савула Я.Г. Чисельна реалізація двоїстих варіаційних принципів в теорії оболонок типу Тимошенка // Доп. АН УРСР, сер.А. – 1985. – №8. – с.23-28.
3. Григоренко Я.М., Тимонин А.М. О численном решении нелинейных краевых задач теории гибких оболочек сложной геометрии // Докл.НАН Украины. – 1992.–№12.– с.3-10.
4. Григоренко Я.М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // Прикл. механика. – 1996.-32, №6. – с.3-39.
5. Муштарі Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек // Казань: Таткнигоиздат. – 1957. – 432с.
6. Муха І.С. Чисельна схема розв'язання задач нелінійного деформування твердих тіл при наявності початкових переміщень // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1990. – Вип.33. – с.22-26.
7. Муха І.С., Савула Я.Г. Нелінійна модель пружного деформування тонкостінних гнучких тіл // Вісн.Львів.ун-ту,сер.мех.-мат. – 1995. – Вип.41. – с82-91.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.97