УДК 539.3

Н.В.Іванова

Нелінійне деформування гнучких оболонок з деформівною нормаллю

Аналіз деяких підходів до розв'язання крайових задач теорії оболонок в геометрично нелінійній постановці на основі класичної та п'ятимодальної теорій наведено в роботі [2]. В даній праці на основі принципу стаціонарності повної потенціальної енергії побудована схема розв'язування задач статики шестимодальної теорії оболонок з деформівною нормаллю із застосуванням квазілінеаризації на основі методу Ньютона. При побудові ітераційної схеми функціонал повної потенціальної енергії розкладається в ряд лише по переміщеннях при заданому зовнішньому навантаженні. Розв'язування задачі здійснюється за допомогою методу скінченних елементів з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій. Розглядається чисельний приклад.

1. Основні співвідношення нелінійної теорії оболонок з деформівною нормаллю. Нехай оболонка постійної товщини h займає в евклідовому просторі R^3 область V, обмежену поверхнею G, яка складається з двох лицьових поверхонь Ω_+, Ω_- та бічної поверхні S ($G=\Omega_+\cup\Omega_-\cup S$). Віднесемо серединну поверхню оболонки Ω, обмежену контуром Γ ($\Gamma\subset S$), до системи ортогональних криволінійних координат $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ так, що координатні лінії $\alpha_i=\mathrm{const}$ $(i=1,2)$ співпадатимуть з лініями головних кривин цієї поверхні. Введемо ортогональну до поверхні Ω змінну z, $|z|\leq h/2$.

Нехай на частині бічної поверхні S_σ ($S_\sigma\subset S$) поверхневого навантаження $\hat{\sigma}=\{\hat{\sigma}_n,\hat{\sigma}_s,\hat{\sigma}_z\}$ (система криволінійних координат (n,s,z) визначена в такий спосіб, що її орти утворюють праву трійку; орти n та s напрямлені відповідно вздовж нормалі та дотичної до бічної поверхні оболонки S). Заради означеності будемо вважати, що на решті бічної поверхні S_u ($S_u=S\backslash S_\sigma$) виконуються умови жорсткого защемлення $U_g=0$.

Процес деформування оболонки характеризується в даній системі координат трьома проекціями вектора повного зміщення точки на напрямки, дотичні до координатних ліній в розглядуваній точці. Згідно кінематичної гіпотези теорії оболонок типу Тимошенка з деформівною нормаллю ці зміщення можна представити у вигляді

$$U_i(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=u_i(\alpha_1,\alpha_2)+z\gamma_i(\alpha_1,\alpha_2), \quad (i=1,2,3), \quad (1.1)$$

де u_i – зміщення точок серединної поверхні, γ_i – компоненти вектора кутів повороту околу довільної точки цієї поверхні.

Введемо вектори

узагальнених зміщень

$$u=(u_1,u_2,u_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)^T;$$

компонент тензора деформацій

$$\varepsilon=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23},\chi_{11},\chi_{22},\chi_{12},\chi_{13},\chi_{23})^T;$$

усереднених характеристик зовнішнього навантаження

$$P=(p_1,p_2,p_3,m_1,m_2,m_3)^T;$$

симетричних зусиль-моментів

$$\sigma=(N_{11},N_{22},N_{33},N_{12},N_{13},N_{23},M_{11},M_{22},M_{12},M_{13},M_{23})^T;$$

заданих крайових зусиль-моментів

$$\sigma_g=(N_n^g,N_s^g,N_z^g,M_n^g,M_s^g,M_z^g)^T \quad \text{на } \Gamma_\sigma;$$

крайових зміщень

$$u_g=(u_n^g,u_s^g,u_z^g,\gamma_n^g,\gamma_s^g,\gamma_z^g)^T.$$

Вважаємо, що процес деформування розглядуваної оболонки супроводжується малими деформаціями при немалих кутах повороту довільного нескінченно малого об'ємного елементу оболонки, тобто має місце процес геометрично-нелінійного деформування. Крайова задача про рівновагу геометрично-нелінійних оболонок з деформівною нормаллю полягає у знаходженні такого вектора узагальнених зміщень u, що відповідні деформаційні компоненти ε, а також зусилля і моменти N_{ij}, M_{ij} задовольняють:

деформаційні співвідношення

$$\varepsilon=C_L u+\frac{1}{2}(C_\Omega u)_{11}^T E_\Omega (C_\Omega u), \quad (1.2)$$

рівняння рівноваги

$$C_\sigma \sigma^* + P = 0, \quad (1.3)$$

фізичні співвідношення

$$\sigma = B\varepsilon, \quad (1.4)$$

статичні крайові умови

$$G_\sigma \sigma^* = \sigma_g \qquad \text{на} \qquad \Gamma_\sigma, \tag{1.5}$$

кінематичні крайові умови

$$u_g = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_u. \tag{1.6}$$

В формулах (1.3), (1.5) та далі символом σ^* позначено вектор видозмінених зусиль-моментів
$\sigma^* = (N^*_{11}, N^*_{22}, N^*_{33}, N^*_{12}, N^*_{21}, N^*_{13}, N^*_{31}, N^*_{23}, N^*_{32}, M^*_{11}, M^*_{22}, M^*_{12}, M^*_{21}, M^*_{13}, M^*_{23})^T$,
який пов'язаний з симетричними зусиллями та моментами залежністю

$$\sigma^* = F\sigma. \tag{1.7}$$

Повний вигляд матриць C_L, C_Ω, E_Ω, C_σ, B, G_σ, F та вектора P можна знайти в праці авторів [1].

Відзначимо, що в деформаційних співвідношеннях (1.2) перший доданок відповідає лінійній складовій деформаційних компонент. За припущення, що кути повороту довільного нескінченно малого об'ємного елементу оболонки малі, другим доданком в співвідношеннях (1.2) можна знехтувати, тобто граничним переходом можна легко отримати деформаційні співвідношення лінійної теорії оболонок. Крім того, припускаючи, що кути повороту малі, з співвідношень між видозміненими та симетричними зусиллями і моментами (1.7) отримаємо, що $N^*_{ij} = N^*_{ji} = N_{ij}$, $(i,j=1,2,3)$, $M^*_{ij} = M^*_{ji} = M_{ij}$, $(i,j=1,2)$, $M^*_{13} = M_{13}, M^*_{23} = M_{23}$. Отже, оскільки рівняння рівноваги (1.3) записані в лінійній формі відносно відозмінених зусиль та моментів, то такий запис дозволяє граничним переходом легко отримати рівняння рівноваги лінійної теорії оболонок з деформівною нормаллю, а також, як частковий випадок, рівняння теорії оболонок типу Тимошенка або Кіргофа-Лява.

2. Стаціонарність потенціальної енергії. Схема методу скінченних елементів для розв'язання задачі нелінійного деформування оболонок будується на основі варіаційного принципу віртуальних робіт. В нелінійній теорії оболонок принцип Лагранжа, на відміну від лінійної теорії, можна трактувати лише як принцип стаціонарності повної потенціальної енергії, оскільки в загальному випадку нелінійного деформування потенціальна енергія може не мати єдиного мінімума [3].

Згідно принципу Лагранжа серед всіх кінематично допустимих зміщень, які задовольняють кінематичні крайові умови (1.6) істиними будуть ті, які надають функціоналу повної потенціальної енергії

$$l(u)=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\varepsilon^T(u)E_0B\varepsilon(u)d\Omega-\iint\limits_{\Omega}u^TPd\Omega-\int\limits_{\Gamma_\sigma}(G_u u)^T\sigma_g d\Gamma_\sigma \qquad (2.1)$$

стаціонарного значення, тобто для яких

$$\delta l(u)=0 \qquad (2.2)$$

Тут E_0 – матриця розмірності 11×11, ненульові елементи якої рівні: E_{ii}=1 (i=1,2,3,7,8) та E_{ii}=2 (i=4-6,9-11).

Умова стаціонарності функціонала повної потенціальної енергії приводить до рівнянь рівноваги (1.3) та природних (статичних) крайових умов (1.5).

3. Знаходження стаціонарного значення функціонала повної потенціальної енергії. Позначимо через u^i, $l(u^i)$ та $u^i+\Delta u^i$, $l(u^i+\Delta u^i)$ відповідно зміщення та потенціальну енергію в початковому та суміжному станах. Розкладаючи функціонал (2.1) в ряд в околі i-го наближення до стаціонарного значення і нехтуючи членами вище квадратичних, отримаємо

$$l(u^i+\Delta u)=l(u^i)+\delta l(u^i)+\frac{1}{2}\delta^2 l(u^i)\,. \qquad (3.1)$$

Тоді приріст потенціальної енергії

$$\Delta l(u^i;\Delta u)=l(u^i+\Delta u)-l(u^i)=\delta l(u^i)+\frac{1}{2}\delta^2 l(u^i) \qquad (3.2)$$

з урахуванням (2.1) після ряду перетворень можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}\Delta l(u^i;\Delta u)=&-\iint\limits_{\Omega}(\Delta u)^T Pd\Omega-\int\limits_{\Gamma_u}(G_u\Delta u)^T\sigma_g d\Gamma_u+\\&+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\left[C_L\Delta u+C_N(u^i;\Delta u)\right]^T E_0B\left[C_L\Delta u+C_N(u^i;\Delta u)\right]d\Omega+\\&+\iint\limits_{\Omega}\left[C_L\Delta u+C_N(u^i;\Delta u)\right]^T E_0B\left[C_Lu^i+\frac{1}{2}C_N(u^i;u^i)\right]d\Omega+\\&+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\left[C_N(\Delta u;\Delta u)\right]^T E_0B\left[C_Lu^i+\frac{1}{2}C_N(u^i;u^i)\right]d\Omega.\end{aligned} \qquad (3.3)$$

Тут використано наступне позначення

$$C_N(a,b)=(C_\Omega a)^T_{11}E_\Omega C_\Omega b\,.$$

Використовуючи скінченноелементну ізопараметричну апроксимацію, подамо шуканий вектор зміщень у вигляді [3]

$$u=Nq, \qquad (3.4)$$

де q – вектор невідомих вузлових значень зміщень, N – блочно-діагональна матриця апроксимуючих поліномів.

Перетворимо підінтегральний вираз останнього доданка в формулі (3.3). Для цього введемо вектор

$$b(u_i)=(b_1,\dots,b_{11})^T=E_0B\left[C_Lu_i+\frac{1}{2}C_N(u_i,u_i)\right] \tag{3.5}$$

і, використовуючи подання (3.4), отримаємо

$$\begin{aligned}\left[C_N(\Delta Nq,\Delta Nq)\right]^T E_0B\left[C_LNq_i+\frac{1}{2}C_N(Nq_i,Nq_i)\right]=\\ =\left[C_N(\Delta Nq,\Delta Nq)\right]^T b(Nq_i)=\\ =(\Delta q)^T\left[\sum_{j=1}^{11}b_j(Nq_i)(C_\Omega N)_{11}^T E_jC_\Omega N\right]\Delta q.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Умову стаціонарності функціонала (2.2) можна записати

$$\delta l(u^i+\Delta u)=\delta\left(\Delta l(u^i;\Delta u)\right)=0\,, \tag{3.7}$$

звідки випливає умова стаціонарності квадратичної функції (3.3), яка має наступний вигляд

$$\frac{\partial\Delta l(q_i;\Delta q)}{\partial\Delta q}=K_T(q_i)\Delta q+K(q_i)q_i-R=0 \tag{3.8}$$

В формулі (3.8) введено наступні позначення:
матриця січної жорсткості

$$K(q_i)=\iint_\Omega\left[\left(C_L+(C_\Omega Nq_i)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right)N\right]^T E_0B\left[C_L+\frac{1}{2}(C_\Omega Nq_i)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right]Nd\Omega;$$

матриця тангенціальної жорсткості

$$\begin{aligned}K_T(q_i)=\iint_\Omega\left[\left(C_L+(C_\Omega Nq_i)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right)N\right]^T E_0B\left[C_L+(C_\Omega Nq_i)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right]Nd\Omega+\\ +\iint_\Omega\sum_{j=1}^{11}b_j(Nq_i)(C_\Omega N)_{11}^T E_jC_\Omega Nd\Omega;\end{aligned}$$

вектор зовнішнього вузлового навантаження

$$R=\iint_\Omega N^TPd\Omega+\int_{\Gamma_\sigma}(G_uN)^T\sigma_g d\Gamma_\sigma\,.$$

Після розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь (3.8) відносно Δq знаходимо на i+1 ітерації матрицю-стовбець вузлових зміщень і поворотів

$$q_{i+1}=q_i+\Delta q\,, \tag{3.9}$$

при яких потенціальна енергія в першому наближенні набуває стаціонарного значення. Далі знову розв'язуємо систему (3.8) і продовжуємо процес уточнення значення потенціальної енергії для стану рівноваги. Алгоритм знаходження стаціонарного значення потенціальної енергії починається з допустимого розв'язку $q_0=0$. При цьому після першої ітерації отримаємо розв'язок геометрично лінійної задачі

$$K_T(0)\Delta q = R\ .$$

Ітераційний процес (3.8), (3.9) зупиняється після n–ої ітерації, якщо для наперед заданого числа $\varepsilon>0$ виконується наступна умова

$$\|\Delta q\| = \left[\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\Delta q_j}{q_j^n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon.$$

Тут k – число ступенів вільності всього ансамблю скінченних елементів, q_i^j – j-а компонента матриці-стовбця вузлових зміщень і поворотів після i–ої ітерації.

<u>4. Чисельний приклад.</u> Розглянемо задачу нелінійного деформування трансверсально ізотропної жорстко защемленої по контуру циліндричної, навантаженої зовнішнім тиском p. Серединна поверхня оболонки описується наступними параметричними рівняннями:

$$x(\alpha_1,\alpha_2) = R\cos\alpha_2; \qquad y(\alpha_1,\alpha_2) = R\sin\alpha_2;$$
$$z(\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_1;$$

Параметри матеріалу та геометрія оболонки наступні: $0 \le \alpha_1 \le L$, $-\theta \le \alpha_2 \le \theta$, $h/R=1/800$; $\rho=1200$ кг/м^3; $h=3.175\cdot 10^{-3}$ м; $R=2.54$ м; $L=0.254$ м; $\theta=0.1$; $E=3.1\cdot 10^9$ Н/м^2; $\nu=0.3$; модуль зсуву $G=E/20$. З огляду на подвійну симетрію задачі розглядалась 1/4 оболонки. Задача розв'язувалась методом скінченних елементів з використанням біквадратичних апроксимацій. Залежність зміщень в центрі оболонки від різних значень навантаження $p^* = pR\cdot 10^4/Eh$ наведена на рис.1. Криві 1 та 2 відповідають лінійному та нелінійному розв'язкам, отриманим по запропонованій в даній роботі методиці; криві 3 та 4 відображають розв'язки, отримані в роботах [4] та [5].

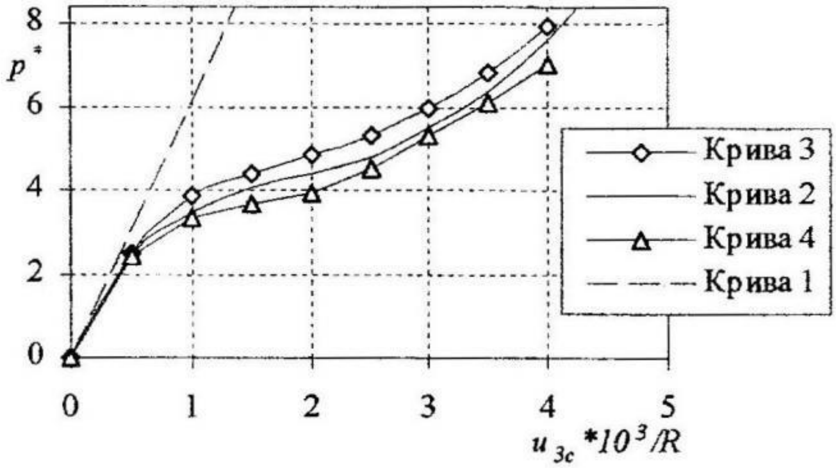

Рис. 1

1. Вагін П.П., Іванова Н.В. Нелінійне деформування багатошарових оболонок. / Львів. ун-т. – Львів, 1996. – 27 с. – Деп. в УкрІНТЕІ 20.12.96 N 285 Ук96. 2. Григоренко Я.М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках. // Прикладная механика, 1996, – т.32. – № 6, – с.3-40. 3. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с. 4. Chang T.Y., Sawamiphakdi K. Large deformation analysis of laminated shells by finite element method. // Computers and Structures. – 1981. – Vol. 13. – p. 331-340. 5. Noor A.K. Resent advances reduction methods for nonlinear problems. // Computers and Structures. – 1981. – Vol. 13. – p. 31-44.

Стаття надійшла до редколегії 14.10.97

УДК 519.68

Х.С. Дороцька, Г.Г. Цегелик

Побудова та аналіз оптимальних стратегій пошуку інформації в послідовних файлах для різних законів розподілу ймовірностей звертання до записів

Розглядається побудова та аналіз оптимальних стратегій різних варіантів пошуку інформації в послідовних файлах, що містяться в