УДК 518:517.948

М.В.Жук, А.Ю.Кіндибалюк

Розв'язування деякого нелінійного диференціального рівняння методом Канторовича

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$Au \equiv -\frac{\partial p\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial q\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} = f(x, y) \qquad (1)$$

при однорідній крайовій умові

$$Pu\Big|_{\Gamma} = \left[p\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\nu, x) + q\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(\nu, y)\right]_{\Gamma} = 0, \qquad (2)$$

де Γ – межа області D, обмеженої по x прямими $x = a$ і $x = b$, а по y – достатньо гладкими кривими $y = g(x)$ і $y = h(x)$, причому $g(x) < h(x)$, ν – зовнішня нормаль до Γ.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $p(x, y, s, t, z)$, $q(x, y, s, t, z)$ вимірні при $(x, y) \in D$, $-\infty < s, t, z < +\infty$, диференційовані за змінними s, t, z, причому

$$\max\left\{\left|\frac{\partial p}{\partial s}\right|, \left|\frac{\partial q}{\partial s}\right|\right\} \le M_1, \max\left\{\left|\frac{\partial p}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial p}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial q}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\right\} \le M_2,$$

де M_1, M_2 – *const*.

Не обмежуючи загальності можемо вважати, що $p(x, y, 0, 0, 0) = 0$, $q(x, y, 0, 0, 0) = 0$.

Введемо допоміжний оператор T, який визначається за формулами

$$Tu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (3)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu, y)\right]_{\Gamma} = 0. \qquad (4)$$

За область визначення $D(T)$ оператора T приймаємо множину двічі неперервно диференційованих функцій $u(x,y)$ в замкнутій області $\overline{D}$, які задовольняють крайовій умові (4) і рівнянню

$$\iint_D u\,dx\,dy = 0\,. \tag{5}$$

Тоді на лінеалі $D(T)$ оператор T буде додатно визначеним. Дійсно, використовуючи нерівність Пуанкаре

$$\iint_D u\,dx\,dy \le C_1 \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + C_2 \left(\iint_D u\,dx\,dy\right)^2,$$

де C_1, C_2 – додатні постійні. Для симетричного оператора T маємо

$$(Tu,u) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \ge \gamma^2 \|u\|^2, \tag{6}$$

де $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{C_1}}$.

Позначимо через $H_T \subset H$ енергетичний простір оператора T, тобто замикання $D(T)$ в метриці

$$[u,v]_T = (Tu,v) = \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\,dy,$$

$$|u|_T^2 = [u,u]_T\,.$$

При цьому функції із енергетичного простору H_T мають перші узагальнені похідні, сумовані з квадратом в області D, і крайова умова (4) природна. Крім того, функції $u(x,y)$ із енергетичного простору H_T задовольняють умові (5).

Із нерівності (6) внаслідок граничного переходу для довільного $u \in H_T$ отримуємо

$$\|u\| \le \frac{1}{\gamma} |u|_T\,. \tag{7}$$

Для довільних $u, v \in H_T$ формально введемо квазібілінійну форму

$$A(u,v) \equiv \iint_D \left[p\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + q\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\,dy$$

Припускаємо, що при $(x,y)\in\overline{D}$ і довільних s,t,z виконується нерівність

$$\frac{\partial p}{\partial t}\xi_1^2+\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial t}\right)\xi_1\xi_2+\frac{\partial q}{\partial z}\xi_2^2+\frac{\partial p}{\partial s}\xi_1\xi_0+\frac{\partial q}{\partial s}\xi_2\xi_0\geq$$

$$\geq M\left(\xi_1^2+\xi_2^2\right)+N\xi_0^2,$$

де $M=const>0$, $N=const$, причому співвідношення між постійними M, N і γ такі, що для константи μ, яка визначається співвідношенням

$$\mu=\begin{cases} M, & \text{коли } N\geq 0,\\ M+\dfrac{N}{\gamma^2}, & \text{коли } N<0,\end{cases}$$

виконується умова $\mu>0$.

Тоді для довільних $u,v,w\in H_T$, аналогічно як і в праці [2], можна встановити нерівності

$$A(u,u-v)-A(v,u-v)\geq\mu|u-v|_T^2, \tag{8}$$

$$A(u,w)-A(v,w)\leq\eta|u-v|_T|w|_T, \tag{9}$$

де $\eta=\dfrac{\sqrt{2}M_1}{\gamma}+2M_2$.

Відомо (див., наприклад, [1]), що виконання умов (8), (9) забезпечує існування та єдиність узагальненого розв'язку $u\in H_T$ задачі (1)–(2).

Задачу (1)–(2) розв'язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}c_k(x)\varphi_k(x,y), \tag{10}$$

де лінійно незалежні в проміжку $[g(x),h(x)]$ функції $\varphi_k(x,y)$ вибираються із умови, щоб система функцій $\{\chi_e(x)\varphi_k(x,y)\}\in H_T$ була повною системою лінійно незалежних функцій в просторі H_T. Шукані коефіцієнти $c_k(x)$ визначаємо із системи

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)}(Au_n-f)\varphi_i\,dy+\varphi_i\sqrt{1+(y')^2}\,Pu_n\Big|_{y=g(x)}+$$

$$+\varphi_i\sqrt{1+(y')^2}\,Pu_n\Big|_{y=h(x)}=0 \qquad (11)$$

при умовах

$$\int_{g(a)}^{h(a)}\varphi_i Pu_n\Big|_{x=a}\mathrm{d}y=0,\ \int_{g(b)}^{h(b)}\varphi_i Pu_n\Big|_{x=b}\mathrm{d}y=0, i=1,2,\ldots,n\,. \qquad (12)$$

Позначимо через $H_n\subset H$ простір функцій вигляду

$$v_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}c_k(x)\varphi_k(x,y)\,.$$

Узагальненим розв'язком системи методу Канторовича (11)–(12) називається функція $u_n(x,y)\in H_n\cap H_T$, що задовольняє тотожності

$$A(u_n,v_n)=\iint_D fv_n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

при довільній функції $v_n(x,y)\in H_n\cap H_T$.

Аналогічно, як і у праці [2], доводиться наступна теорема.

<u>Теорема</u>. Якщо обмеження на вихідні дані задачі (1)–(2) такі, що виконуються умови (8)–(9), то для довільної функції $f(x,y)\in H$ задача (1)–(2) має єдиний узагальнений розв'язок $u(x,y)\in H_T$; при довільному n система методу Канторовича (11)–(12) має єдиний узагальнений розв'язок $u_n(x,y)\in H_n\cap H_T$ і справедливі співвілношення

$$|u-u_n|_T\to 0\,, \qquad (13)$$

при $n\to\infty$, та оцінка

$$|u-u_n|_T\le C|u-v_n|_T\,, \qquad (14)$$

де $C=\sqrt{\dfrac{\eta}{\mu}}$, а v_n – елемент, що реалізує мінімум функціоналу $|u-v_n|_T$.

Зауваження 1. Якщо вихідне диференціальне рівняння (1) розглядається у вигляді

$$Au\equiv-\frac{\partial p\left(x,y,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}-\frac{\partial q\left(x,y,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y}=f(x,y)\,, \qquad (15)$$

то нерівність (8) випливає із умови еліптичності для рівняння (15).

Зауваження 2. Координатну систему функцій можна вибрати згідно рекомендацій праці [3] у вигляді

$$\varphi_k(x,y)=\cos\left(\frac{kn(y-g(x))}{h(x)-g(x)}\right), k=1,2,...$$

1. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М.: 1974. 2. Жук М.В. Дослідження швидкості збіжності методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь. //Укр. матем. журн. 1976. Т.28. №2. С.183–193. 3. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.

Стаття надійшла до редколегії 3.09.97

УДК 519.6

Бартіш М.Я.,Чипурко А.І.

Дослідження одного рекурсивного методу розв'язування задачі про найменші квадрати

Розглянемо постановку задачі про найменші квадрати:

$$\text{знайти} \quad \min\frac{1}{2}F(x)^T F(x) \tag{1}$$

де $F(x):R^n \to R^m$ – нелінійна по x , $m \geq n$.

На практиці для розв'язування (1) найчастіше використовують метод Гаусса-Ньютона [1]. Даний метод на кожному кроці вимагає обчислення матриці Якобі функції $F(x)$, що у випадку складності функції є операцією трудомісткою.

В цій роботі пропонується рекурсивна модифікація методу Гаусса-Ньютона :

$$x_k^{\nu+1}=x_k^\nu-\left[F'(x_k)^T F'(x_k)\right]^{-1}F'(x_k)^T F(x_k^\nu), \tag{2}$$

$$x_{k+1}^0=x_{k+1}=x_k^t \ , \ x_0^0=x_0 \ ,$$

$$\nu=0,1,\dots,t-1, \ k=0,1,\dots .$$

В методі (2) матриця $F'(x_k)$ обчислюється один раз на t кроків, що дозволяє значно зменшити кількість обчислень.

Умови збіжності та оцінки швидкості збіжності методу дає